САДУЛЛОЕВ Р.И., ШУКУРОВ Ҳ.Р.

АСОСҲОИ НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ ВА ОМОРИ РИЁЗӢ

ДУШАНБЕ
2009

ВАЗОРАТИ МАОРИФИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

САДУЛЛОЕВ Р.И. ШУКУРОВ Ҳ.Р.

АСОСҲОИ НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ ВА ОМОРИ РИЁЗӢ

Китоби дарсӣ барои мактабҳои олӣ

Бо қарори мушовараи
Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон
ба чоп тавсия шудааст

Душанбе
«ИРФОН»
2009

ББК 22.1+22.14 Я 73

Садуллоев Р.И., Шукуров Ҳ.Р.

С-15 Асосҳои назарияи эҳтимолият ва омори риёзӣ.– Душанбе, «Ирфон», 2009. -336 саҳ.

Ин китоб ба асосҳои назарияи эҳтимолият ва омори риёзӣ бахшида шудааст. Хонанда пас аз азхуд намудани мафҳумҳои бунёдӣ, таърифҳо ва теоремаҳои асосии ин фан, бо татбиқи он дар ҳалли масъалаҳои амалӣ шинос мешавад.

Дар охири ҳар як боб мисолу масъалаҳо бо ҷавобҳояшон, барои кори мустақилона оварда шудааст.

Китоб барои донишҷӯёни макотиби олӣ ва миёнаи махсус пешниҳод мешавад.

Муҳаррир: дотсенти кафедраи математикаи ҳисоббарор ва механикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, номзади илмҳои физика ва математика Азизов Р.Э.

Муқарризон: дотсенти кафедраи математикаи олии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, номзади илмҳои физика ва математика Камолиддинов Ҷ.

дотсенти кафедраи математика дар иқтисодиёти Донишгоҳи давлатии Тоҷикистон, номзади илмҳои физика ва математика Олимшоев Р.

1602010000-208
С ——————— 2009
М 501 (12)- 2009

ББК 22.1+22.14 Я 73

ISBN 978-99947-63-36-8

МУНДАРИЧА

МУҚАДДИМА.................................... 7

БОБИ I. МАФҲУМҲОИ АСОСИИ НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

§1. Ҳодисаҳо ва амалҳо бо онҳо.................. 10
§2. Элементҳои комбинаторика.................. 14
§3. Мафҳуми эҳтимолият ва таърифҳои он ... 15
§4. Аксиомаҳои назарияи эҳтимолият........ 22
§5. Масъалаҳо барои кори мустақилона ... 24

БОБИ II. ТЕОРЕМАҲОИ ҶАМЪ ВА ЗАРБИ ЭҲТИМОЛИЯТҲО

§1. Теоремаҳои ҷамъ ва зарби эҳтимолиятҳо... 27
§2. Формулаҳои эҳтимолияти пурра ва Бейес... 32
§3. Масъалаҳо барои кори мустақилона 34

БОБИ III. САНҶИШҲОИ ТАКРОРИИ НОВОБАСТА

§1. Формулаи Бернулли. Адади эҳтимолноктарини рӯйдиҳии ҳодиса 36
§2. Теоремаи локалии Муавр-Лаплас 38
§3. Теоремаи Пуассон 39
§4. Теоремаи интегралии Муавр-Лаплас ... 40
§5. Занҷири Марков 45
§6. Масъалаҳо барои кори мустақилона 50

БОБИ IV. БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФВ ВА ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ ОНҲО

§1. Мафҳуми бузургии тасодуфӣ............. 52
§2. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дискретӣ.. 53
§3. Интизорияти математикии бузургии тасодуфии

дискретӣ ва хосиятҳои он.. 55

§4. Функсияи тақсимоти бузургии тасодуфӣ........ 61
§5. Зичии тақсимоти эҳтимолиятҳо..................... 65
§6. Дисперсияи бузургии тасодуфӣ. Тамоили миёнаи квадратӣ. Мода ва медиана........................... 69
§7. Моментҳои бузургиҳои тасодуфӣ................ 75
§8. Масъалаҳо барои кори мустақилона............ 78

БОБИ V. БАЪЗЕ ҚОНУНҲОИ ТАҚСИМОТИ БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФӢ. ФУНКСИЯҲО АЗ БУЗУРГИИ ТАСОДУФӢ. ФУНКСИЯҲОИ ТАВСИФИИ БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФӢ

§1. Қонуни тақсимоти биномиалӣ................... 81
§2. Қонуни тақсимоти Пуассон........................ 84
§3. Қонуни тақсимоти геометрӣ ва гипергеометрӣ 86
§4. Қонуни тақсимоти мунтазам.......................... 90
§5. Қонуни тақсимоти нормалӣ.......................... 92
§6. Қонуни тақсимоти нишондиҳандагӣ................ 96
§7. Функсияҳо аз бузургии тасодуфӣ.................. 98
§8. Функсияи тавсифии комплексии бузургиҳои тасодуфӣ... 103
§ 9. Масъалаҳо барои кори мустақилона............. 109

БОБИ VI. ТЕОРЕМАҲОИ ҲУДУДИИ НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

§1. Нобаробариҳои Марков ва Чебишев.............. 112
§2. Қонуни ададҳои калон.................................. 116
§3. Теоремаи ҳудудии марказӣ............................ 119
§4. Масъалаҳо барои кори мустақилона................ 121

БОБИ VII. МУҚАДДИМАИ НАЗАРИЯИ РАВАНДҲОИ ТАСОДУФӢ

§1. Мафҳуми раванди тасодуфӣ.......................... 124
§2. Равандҳои тасодуфии марковӣ. Муодилаҳои Колмогоров... 126

§3. Сели ҳодисаҳо. Равандҳои пуассонӣ.............. 130
§4. Масъалаҳо барои кори мустақилона 134

БОБИ VIII. БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФИИ БИСЁРЧЕНАКА

§1. Мафҳуми бузургии тасодуфии бисёрченака........ 135
§2. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дученака
Функсияи тақсимоти дученака......................... ... 136
§3. Зичии тақсимоти бузургии тасодуфии дученака..... 142
§4. Қонуни тақсимоти шартии компонентаҳои бузургии
тасодуфии дученакаи дискретӣ........................ . 145
§5. Зичии тақсимоти компонентаҳои вектори
тасодуфии дученака. Қонуни тақсимоти шартӣ.. 147
§6. Ададҳои тавсифии бузургии тасодуфии дученака. 151
§7. Бузургиҳои тасодуфии n-ченака.................. 157
§8. Масъалаҳо барои кори мустақилона 161

БОБИ IX. ЭЛЕМЕНТҲОИ ОМОРИ РИЁЗӢ

§1. Мафҳумҳои асосӣ. Усули интихобӣ................ 163
§2. Тақсимоти омории маҷмӯи интихобӣ.
Полигон ва гистограмма 166
§3. Функсияи эмпирикии тақсимот...................... .169
§4. Ададҳои тавсифии тақсимоти оморӣ 171
§5. Масъалаҳо барои кори мустақилона............... 172

БОБИ X. БАҲОИ ПАРАМЕТРҲОИ МАҶМӮИ ГЕНЕРАЛӢ АЗ РӮИ МАҶМӮИ ИНТИХОБИИ ОН

§1. Баҳоҳои нуқтагӣ.. 175
§2. Усули ба ҳақиқат монанди калонтарин......... .. 180
§3. Усулҳои фосилагӣ.. 185
§4. Масъалаҳо барои кори мустақилона............... 197

Б О Б И XI. ТАФТИШИ ГИПОТЕЗАҲОИ ОМОРӢ

§1. Таснифи гипотезаҳои оморӣ. Марҳилаҳои асосии тафтиши гипотезаҳо 199
§2. Гипотеза дар бораи интизорияти математикии қонуни тақсимоти нормалӣ дар ҳолати маълум будани дисперсия.. 204
§3. Гипотеза дар бораи интизорияти математикии қонуни тақсимоти нормалӣ дар ҳолати номаълум будани дисперсия... 208
§4. Гипотеза дар бораи дисперсияи қонуни тақсимоти нормалӣ 210
§5. Гипотеза дар бораи баробарии интизориятҳои математикии қонуни тақсимоти нормалӣ дар ҳолати маълум будани дисперсияҳо 214
§6. Гипотеза дар бораи қимати ададии эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодиса 217
§7. Критерияи мувофиқоварии χ^2 220
§8. Масъалаҳо барои кори мустақилона 225

Б О Б И XII. ТАҲЛИЛИ ДИСПЕРСИОНӢ

§1. Таҳлили якомила .... .228
§2. Критерияи Бартлет .... .238
§3. Таҳлили дуомила... 240
§4. Масъалаҳо барои кори мустақилона 250

Б О Б И XIII. ТАҲЛИЛИ КОРРЕЛЯТСИОНӢ

§1. Вобастагии функсионалӣ ва коррелятсионӣ 252
§2. Ҷадвали коррелятсионӣ. Муодилаи регрессия.... 253
§3. Вобастагии коррелятсионии хаттӣ................... 257
§4. Вобастагии коррелятсионии ғайрихаттӣ.......... 266
§5. Коэффитсиенти коррелятсия ва хосиятҳои он.... 277
§6. Масъалаҳо барои кори мустақилона 284

Б О Б И XIV. МИСОЛ ВА МАСЪАЛАҲО 286
Замима 329
Рӯйхати адабиёт.. 334

МУҚАДДИМА

Дар тадқиқотҳои илмӣ, дар техника, дар истеҳсоли маҳсулоти оммавӣ ва умуман дар ҳаёти ҳаррӯза мо бо ҳодисаҳое вомехӯрем, ки онҳо дар натиҷаи якчанд маротиба дар шароити якхела гузаронидани таҷриба-амалӣ гардидани маҷмӯи шартҳо, ҳар дафъа бо каме тағйирот рӯй медиҳанд. Масъалан, дар вақти истеҳсоли маҳсулоти якхела ченаки ҳар як маҳсулоти истеҳсолшуда метавонад аз ченаки стандартии муайяншуда каме фарқ кунад, ё ин ки дар вақти якчанд маротиба тир парронидан натиҷаи ҳар як тирпарронӣ метавонад дигар бошад. *Чунин ҳодисаҳоро тасодуфӣ меноманд.*

Дар бисёр соҳаҳои илму техника, дар вақти ҳал намудани масъалаҳои амалӣ лозим меояд, ки таъсири омилҳои тасодуфӣ пешбинӣ карда шаванд. Аз ин ҷо, зарурияти омӯхтани ҳодисаҳои тасодуфӣ пайдо мешавад.

Назарияи эҳтимолият як шохаи илми математика буда, бо омӯзиши қонуниятҳои умумии ҳодисаҳои тасодуфӣ ва сохтани усулҳои ададии муайян намудани таъсири омилҳои тасодуфӣ ба ҳодисаҳои гуногун машғул мебошад.

Қонунҳои математикии назарияи эҳтимолият ин инъикоси қонунҳои омории ҳақиқӣ мебошанд, ки дар ҳодисаҳои тасодуфии оммавии табиӣ ҷой доранд. Барои омӯхтани чунин ҳодисаҳо назарияи эҳтимолият усули математикиро татбиқ менамояд ва бинобар ин чун дигар соҳаҳои математика илми мантиқан аниқ ва қатъӣ мебошад.

Пайдоиши назарияи эҳтимолият ба мобайни асри XVII рост меояд ва бо тадқиқотҳои Паскал (1623-1662), Ферма (1601-1665) ва Гюйгенс (1629-1695) дар соҳаи қиморбозиҳо вобаста мебошад. Қайд менамоем, ки натиҷаҳои чунин бозиҳо ба монанди қартабозӣ, партофтани як ё якчанд шашхол, гирифтани кура аз қуттие, ки дар он кураҳои гуногунранг мавҷуданд мисолҳои (моделҳои) содда ва аёнии ҳодисаҳои тасодуфӣ мебошанд. Дар мукотибаҳои Паскал ва Ферма, ки ба соли 1654 мансубанд, тадриҷан чунин мафҳумҳои асосӣ ба монанди эҳтимолият ва интизорияти математикӣ ташаккул ёфтаанд.

Дар асри XVIII дар натиҷаи тадқиқотҳои олимони бузург Муавр (1667-1754), Лаплас (1749-1827), Гаусс (1777-1855), Пуассон (1781-1840) усулҳои аналитикии назарияи эҳтимолият пурқуваттар карда шудаанд. Умуман, дар асри XVIII ва аввали асри XIX тараққиёти пуравҷи назарияи эҳтимолият мушоҳида карда мешавад.

Дар аввали асри XIX мактаби машҳури математикии Петербург созмон дода мешавад ва дар натиҷаи тадқиқотҳои илмии олимони ин мактаб назарияи эҳтимолият асоси қатъии мантиқӣ ва математикиро соҳиб шуда, ба усули эътиборнок, дақиқ ва самарноки донишомӯзӣ табдил дода мешавад. Дар ин давра, аз тарафи математики машҳури рус В. Я. Буняковский (1804-1889) аввалин китоби назарияи эҳтимолият навишта мешавад, ки ин ба тараққиёти минбаъдаи назарияи эҳтимолият дар Русия роли калон бозидааст. Тадқиқотҳои П.Л. Чебишев (1821-1894), А.А. Марков (1856-1922), А.М. Ляпунов (1857-1981) вобаста ба теоремаҳои ҳудудии назарияи эҳтимолият ва равандҳои тасодуфӣ ҷои назарияи эҳтимолиятро дар қатори илмҳои аниқи математикӣ муайян мекунанд.

Тараққиёти ояндаи назарияи эҳтимолият бо номи математикони машҳури давраи шӯравӣ С.Н. Бернштейн, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, А.Н. Романовский, Б.В. Гнеденко зич алоқаманд мебошад.

Давраи муосири тараққиёти назарияи эҳтимолият низ пуравҷ мебошад. Ҳоло назарияи эҳтимолият қисми асосии математикаи татбиқиро ташкил додааст, ки усулҳои он дар ҳамаи соҳаҳои илму техника ниҳоят васеъ татбиқ карда мешаванд. Олимони бисёр, махсусан, олимони ИМА, Франсия, Британияи Кабир, Олмон, Италия, Русия, Япония, Хитой ба ривоҷу равнақ додани назарияи эҳтимолият ва татбиқи он дар соҳаҳои гуногуни илму техника машғул мебошанд.

Ҳоло дар аксарияти факултетҳои макотиби олӣ назарияи эҳтимолият ва омори риёзӣ ҳамчун фанни алоҳида ё ҳамчун қисми таркибии фанни математикаи олӣ таълим дода мешавад.

Бо афзудани шумораи макотиби олӣ дар ҷумҳуриамон норасоии адабиёт аз фанни назарияи эҳтимолият ва омори риёзӣ бо забони тоҷикӣ, бараъло ҳис карда мешавад. Бо мақсади пур кардани ин ҷои холӣ ва расонидани ёрии амалӣ ба донишҷӯён китоби мазкур навишта шудааст. Мо кӯшиш ба харҷ додем, ки дар як китоб ҳам маълумоти заруриро аз қисми назариявӣ ва ҳам маҷмӯи мисолу масъалаҳоро ҷой диҳем.

Муаллифон ба дотсентон Ҷ. Камолиддинов, Р. Олимшоев ва Р.Э. Азизов, ки дастнависи ин китобро хонда, маслиҳатҳои муфид доданд, изҳори минатдорӣ менамоянд.

Аз хонандагони гиромӣ эҳтиромона хоҳиш менамоем, ки фикру мулоҳизаи худро оиди ин китоб ба нишонаи ш. Душанбе, хиёбони Рӯдакӣ 17, ДМТ, факултети механикаю математика фиристанд. Қаблан ба ҳамаи онҳо миннатдории самимии хешро изҳор менамоем.

Муаллифон

Б О Б И I. МАФҲУМҲОИ АСОСИИ НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

§1. ҲОДИСАҲО ВА АМАЛҲО БО ОНҲО

1. **Ҳодисаҳо ва таснифи онҳо.** *Таҷриба ё озмоиш* гуфта, амалӣ гаштани маҷмӯи шартҳо ё амалҳоеро меноманд, ки дар натиҷаи онҳо зуҳуроти мувофиқ рух медиҳад. Масалан, шинонидани ниҳол, задани тӯб ба дарвоза, холӣ кардани тир ба нишон, партофтани шашхол, гирифтани кура аз қуттӣ, партофтани танга, супоридани имтиҳон, истеҳсол намудани маҳсулот ва ғайраҳо озмоишҳо мебошанд.

Натиҷаи таҷрибаро(озмоишро) *ҳодиса* меноманд. Дар натиҷаи таҷрибаҳои дар боло овардашуда метавонанд мувофиқан ҳодисаҳои зерин рӯй диҳанд: *сабзидани ниҳол, ба дарвоза дохил шудани тӯб, ба нишон расидани тир, баромадани холҳои ҷуфти шашхол, баромадани кураи сафед, баромадани рӯяи рақамдори танга, супорида натавонистани имтиҳон, истеҳсол шудани маҳсулоти нуқсондор ва ғайраҳо.*

Се намуди ҳодисаро фарқ мекунанд:

1) Ҳодисаро *эътиборнок* меноманд, агар он дар санҷиши ҷорӣ ҳатман рӯй диҳад. Масалан, дар қуттӣ 10 кураи сафед мавҷуд аст. Бигузор, ҳодисаи A «гирифтани кураи сафед аз қуттӣ» бошад. Ин ҳодиса *эътиборнок* аст, чунки дар қуттӣ кураҳои ранги дигар мавҷуд нест. Дар оянда ҳодисаи эътиборнокро бо Ω ишора мекунем.

2) Ҳодисаро дар озмоиши ҷорӣ *имконнопазир* меноманд, агар он дар ин озмоиш рӯй надиҳад. Масалан, дар қуттӣ фақат кураҳои сиёҳ мавҷуд бошанд, пас ҳодисаи A «гирифтани кураи сафед аз қуттӣ» имконнопазир аст, чунки

дар қуттӣ кураи сафед мавҷуд нест. Дар оянда ҳодисаи имконнопазирро бо V ишора мекунем.

3) Ҳодисаро дар санҷиши мазкур *тасодуфӣ* меноманд, агар он дар ин таҷриба ё рӯй диҳад, ё рӯй надиҳад. Масалан, бурд дар бозии лотерея ҳодисаи тасодуфист.

Ҳодисаҳои тасодуфиро бо $A, B, C, \ldots$ ишора менамоянд.

Дар бораи ҳодисаҳои эътиборнок, имконнопазир ва тасодуфӣ сухан ронда, мо бояд қайд намоем, ки ҳамон як ҳодиса вобаста ба маҷмӯи шароитҳо метавонад *эътиборнок, имконнопазир* ва *тасодуфӣ* шавад.

Ду ҳодисаро дар озмоиши мазкур. *ҳамҷоя* меноманд, агар рӯйдиҳии яке аз онҳо рӯйдиҳии дигарашро истисно нанамояд. Масалан, ҳангоми партофтани ду мӯҳраи бозӣ ҳодисаи A –пайдошавии шаш хол дар рӯяи болоии мӯҳраи якум ва ҳодисаи B –пайдошавии панҷ хол дар рӯяи болоии мӯҳраи дуюм *ҳодисаҳои ҳамҷоя* мебошанд.

Ду ҳодисаро *ноҳамҷоя* меноманд, агар онҳо дар як санҷиш *якбора рӯй надиҳанд*. Масалан, ҳодисаи A – расидани тир ба нишон ва ҳодисаи B – нарасидани тир ба нишон, ҳангоми як маротиба тир холӣ кардан, ҳодисаҳои ноҳамҷоя мебошанд.

.Якчанд ҳодисаҳоро дар як гурӯҳ ноҳамҷоя меноманд, агар онҳо байни ҳам ҷуфт- ҷуфт ноҳамҷоя бошанд.

Ду ҳодисаро байни ҳам *муқобил* меноманд, агар руй додани яке аз онҳо *ба руй надодани дигараш баробарқувва* бошад. Масалан, ба нишон расидан(ҳодисаи A) ва ба нишон нарасидан(ҳодисаи B) дар натиҷаи як маротиба тир холӣ кардан, ҳодисаҳои байни ҳам муқобил мебошанд. Ҳодисаи расидан ба нишонро бо A ва ҳодисаи муқобил(ба нишон нарасидан)-ро бо $\bar{A}$ ишорат менамоем.

Маҷмӯи ҳодисаҳои $A_1, A_2, \ldots, A_n$ -ро *гурӯҳи пурраи ҳодисаҳо* меноманд, агар рӯйдиҳии *яке аз онҳо ҳодисаи эътиборнок* бошад. Масалан, бо A_k ҳодисаи пайдошавии k холро дар рӯяи болоӣ, ҳангоми партофтани як мӯҳраи бозӣ (шашхол), ишора мекунем $(k = 1,2,3,4,5,6)$. Ҳодисаҳои A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 гурӯҳи пурраро ташкил медиҳанд.

Ҳодисаҳоро *баробаримкон* меноманд, агар имкониятҳои рӯйдиҳии онҳо якхела бошанд.

Масалан,

1) пайдошавии рӯяи нишондор (ҳодисаи A) ва рӯяи рақамдор (ҳодисаи B), ҳангоми як маротиба партофтани тангаи симметрӣ, ҳодисаҳои баробаримкон мебошанд;

2) ҳангоми як маротиба партофтани шашхол ҳодисаҳои A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 баробаримкон мебошанд.

Ҳар як ҳодисаеро, ки дар натиҷаи таҷриба ё озмоиш рӯй медиҳад, *оқибати элементарии* озмоиш меноманд. Масалан, ҳодисаҳои $A_i\left(i = \overline{1,6}\right)$ пайдошавии холҳои 1,2,3,4,5,6 маҷмӯи ҳамаи оқибатҳои имконпазир, ҳангоми як маротиба партофтани шашхол, – *оқибатҳои элементарии* озмоиш мебошанд.

Он оқибатҳои элементарие, ки ба рӯйдиҳии ҳодисаи A меоранд, *оқибатҳои мусоид* ном доранд. Масалан, оқибатҳои мусоид барои руйдиҳии ҳодисаи «миқдори холҳо дар рӯяи болоӣ тоқ аст», ҳангоми як маротиба партофтани шашхол, оқибатҳои элементарии A_1, A_3, A_5 мебошанд.

Ҳосили зарб ё буриши ҳодисаҳои A ва B гуфта, ҳодисаи C -ро меноманд, ки он *аз дар як озмоиш якбора рӯйдиҳии ҳодисаҳои A ва B иборат аст.* Ҳосили зарби ҳодисаҳои A ва B - ро бо рамзи $C = AB$ ё $C = A \cap B$ ишора менамоянд.

Ҳосили зарби якчанд ҳодисаҳои ҳамҷояии A_1, A_2, $\cdots$, A_n гуфта, ҳодисаи C-ро меноманд, ки он аз якбора рӯйдиҳии ҳамаи ин ҳодисаҳо иборат аст:

$$C = A_1 A_2 \cdots A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n .$$

Сумма ё якҷояшавии ҳодисаҳои ҳамҷояи A ва B гуфта, ҳодисаи C - ро меноманд, ки он аз рӯйдиҳии ақаллан яке аз ҳодисаҳои A ё B иборат аст. Суммаи ҳодисаҳои A ва B -ро бо рамзи $C = A + B$ ё $C = A \cup B$ ишора менамоянд. Айнан ҳамин тавр, суммаи якчанд ҳодисаҳои ҳамҷояи $A_1, A_2, \cdots, A_n$ гуфта, ҳодисаеро меноманд, ки *аз рӯйдиҳии ақаллан яке аз ин ҳодисаҳо иборат аст.*

Сумма ё якҷояшавии ҳодисаҳои ноҳамҷояи A ва B гуфта, ҳодисаи C - ро меноманд, ки аз рӯйдиҳии ҳодисаи A ё B иборат аст. Суммаи якчанд ҳодисаҳои ноҳамҷояии $A_1, A_2, \cdots, A_n$ гуфта, ҳодисаеро меноманд, ки *аз рӯйдиҳии яке аз ин ҳодисаҳо иборат аст.*

Фарқи ҳодисаҳои A ва B гуфта, чунин ҳодисаи C - ро меноманд, ки он *аз рӯйдиҳии ҳодисаи A ва рӯй надодани ҳодисаи B иборат аст.* Фарқи ҳодисаҳои A ва B -ро бо рамзи $C = A - B$ ё $C = A \setminus B$ ишора менамоянд.

Мисол. Ду тирандоз ба нишон яктогӣ тир холӣ мекунанд. Ҳодисаи A- ба нишон расидани тирандози якум, ҳодисаи B - ба нишон расидани тирандози дуюм аст. $A + B$ ҳодисаи ба нишон расидани ақаллан яке аз тирандозон буда, ҳодисаи $A \cdot B$ дар як вақт ба нишон расидани ҳарду тирандоз мебошад.

Агар ҳодисаи B дар натиҷаи рӯй додани ҳодисаи A ҳатман рӯй диҳад, пас мегӯянд, ки ҳодисаи A *ҳолати хусусии ҳодисаи B* аст ва ин тавр менависанд: $A \subset B$ ё $B \supset A$.

Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$ бошад, яъне рӯй додани ҳодисаи A ҳатман ба рӯйдиҳии ҳодисаи B оварда расонад ва баръакс, рӯй додани ҳодисаи B ҳатман ба рӯйдиҳии ҳодисаи A оварда расонад, он гоҳ онҳоро байни *ҳам баробарқувва ё эквивалент* номида, чунин ишора мекунанд: $A \sim B$.

Амалҳои ҷамъ ва зарби ҳодисаҳо дорои хосиятҳои зеринанд:

1) $A + B = B + A,\ AB = BA$ (коммутативӣ);

2) $(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B = A + B + C$.

3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot C) \cdot B = A \cdot B \cdot C$ (ассотсиативӣ).

4) $(A+B)\cdot C=(A\cdot C)+(B\cdot C)$ (дистрибутивӣ).

5) $A+A=A,\ A\cdot A=A$.

6) $A+\overline{A}=\Omega,\ A\cdot\overline{A}=V$.

7) $A+V=A,\ A\cdot V=V$.

8) $A+\Omega=\Omega,\ A\cdot\Omega=A$.

§ 2. ЭЛЕМЕНТҲОИ КОМБИНАТОРИКА

Ҳангоми ҳисоб кардани миқдори оқибатҳои элементарии озмоиш баъзе формулаҳои *назарияи комбинаторика* лозим мешаванд. Бинобар ин таърифҳо ва формулаҳои зарурии назарияи комбинаторикаро меоварем.

Гурӯҳҳои элементҳое, ки аз ҳамон як хел элементҳои гуногун иборат буда, аз ҳамдигар фақат бо тартиби ҷойгиршавиашон фарқ мекунанд *ҷойивазкуниҳо* ном доранд.

Шумораи ҳамаи ҷойивазкуниҳо аз n элемент (P_n) ба $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ баробар аст:

$$P_n = n!. \qquad (1.1)$$

Ҷойгиркунӣ гуфта гурӯҳҳоеро меноманд, ки аз n элементҳои гуногун m тогӣ тартиб дода шудаанд ва аз ҳамдигар ё ақаллан бо як элемент, ё бо тартиби ҷойгиршавии элементҳо фарқ мекунанд. Шумораи ҳамаи ҷойгиркуниҳои имконпазир аз n элемент m - тогӣ ба

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) \qquad (1.2)$$

баробар аст.

Пайвасткунӣ гуфта гурӯҳҳоеро меноманд, ки аз n элементҳои гуногун m-тогӣ тартиб дода шудаанд ва аз ҳамдигар ақаллан бо як элемент фарқ мекунанд. Шумораи умумии пайвасткуниҳо аз n элемент m-тогиро бо C_n^m ишора менамоянд. Ин миқдор бо формулаи

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (1.3)$$

ҳисоб карда мешавад.

Пайвасткуниҳо хосиятҳои зерин доранд :

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$; 2. $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$;

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$; 4. $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$.

Мисолҳо.

1) Чор нафарро дар харак бо чанд тарзи гуногун шинонидан мумкин аст?

Ҳал. Мувофиқи формулаи (1.1)

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

2) Аз байни шаш номзад се нафарро ба се вазифаи гуногун бо чанд тарз таъин намудан мумкин аст.

Ҳал. Аз формулаи (1.2) истифода мекунем:

$$n = 6,\ m = 3 \Rightarrow A_6^3 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120.$$

3) Аз 10 нафар бо чанд тарз командаи волейбол тартиб додан мумкин аст?

Ҳал. Мувофиқи формулаи (1.3)

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210.$$

§3. МАФҲУМИ ЭҲТИМОЛИЯТ ВА ТАЪРИФҲОИ ОН

Оё имконияти рӯйдиҳии ҳодисаро бо ягон тарз чен кардан мумкин аст? Бо суханҳои дигар, оё имконияти рӯйдиҳии ҳодисаро бо ягон адад тавсиф(ифода) кардан мумкин аст? Кӯшиши ҷавоб ба ин саволи гузошташуда моро ба яке аз мафҳумҳои асоси назарияи эҳтимолият – *мафҳуми эҳтимолияти ҳодиса* меорад. Омӯзиши мафҳуми эҳтимолияти ҳодисаро одатан аз як ҳолати хусусии он – аз *таърифи классикӣ* оғоз менамоянд.

Таърифи 1. Эҳтимолияти ҳодисаи A гуфта, нисбати шумораи он оқибатҳое, ки ба рӯйдиҳии ин ҳодиса мусоидат менамоянд, ба шумораи ҳамаи оқибатҳои имконпазири озмоишро меноманд. Эҳтимолияти ҳодисаи A - ро бо $P(A)$ ишора мекунанд (P - ҳарфи якуми калимаи лотинии *probabilita* - эҳтимолият аст).

Ҳамин тавр, мувофиқи таъриф

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.4}$$

мешавад, ки дар ин ҷо m - шумораи оқибатҳои элементарие, ки ба рӯйдиҳии ҳодисаи A мусоидат мекунанд ва n бошад, шумораи ҳамаи оқибатҳои баробаримкони элементарие мебошанд, ки гурӯҳи пурраи ҳодисаҳоро ташкил медиҳанд.

Ин таърифро *таърифи классикии эҳтимолият* меноманд, чунки он дар давраи ибтидоии инкишофи назарияи эҳтимолият пайдо шудааст.

Аз таърифи номбаршуда, ҳамчун натиҷа, хосиятҳои зерини эҳтимолият бармеоянд:

1. Эҳтимолияти ҳодисаи *эътиборнок* Ω ба як баробар аст, чунки дар ин маврид $m = n$ аст ва $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$ мешавад.

2. Эҳтимолияти ҳодисаи имконнопазир V ба сифр баробар аст, чунки дар ин маврид $m = 0$ аст ва $P(V) = \frac{0}{n} = 0$ мешавад.

3. Азбаски барои ҳодисаи тасодуфии A, $0 < m < n$ аст, пас $0 < \frac{m}{n} < 1$ мешавад, яъне $0 < P(A) < 1$.

Ҳамин тариқ, эҳтимолияти ҳодисаи ихтиёрӣ нобаробариҳои $0 \le P(A) \le 1$-ро қонеъ менамояд.

Мисоли 1. Дар қуттӣ 20 дона кураҳои якхелаи бо ададҳои $1, 2, \ldots, 20$ рақамгузоришуда мавҷуданд. Аз қуттӣ тасодуфан як кура гирифта мешавад. Эҳтимолияти ба 3 каратӣ будани рақами ин кураро ёбед.

Ҳал. Бо A ҳодисаи «рақами кура ба 3 каратӣ аст» - ро ишора мекунем. Ба рӯйдиҳии ин ҳодиса 6 оқибат мусоид аст: $(3,6,9,12,15,18)$, яъне $m=6$ ва $n=20$ мебошад. Мувофиқи формулаи (1.4)

$$P(A) = \frac{6}{20} = 0{,}3$$

мешавад.

Мисоли 2. Шашхол як маротиба партофта мешавад. Эҳтимолияти дар рӯяи болоии он пайдошавии миқдори холҳои ҷуфтро ёбед.

Ҳал. Бо A ҳодисаи «миқдори холҳои пайдошуда ҷуфт аст» - ро ишора мекунем. Ба рӯйдиҳии ин ҳодиса се оқибат мусоид аст: $(2,4,6)$, яъне $m=3$ аст. Азбаски $n=6$ аст, пас мувофиқи формулаи (1.4)

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

мешавад.

Мисоли 3. Ба таври ихтиёрӣ ададИ дурақама интихоб карда мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки рақамҳои ин адад якхелаанд.

Ҳал. Ададҳои дурақама (аз 10 то 99) ҳамагӣ $n=90$ - то аст. Рақамҳои 9 адади дурақама бо ҳам баробаранд(11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99), яъне $m=9$ аст. Аз ин ҷо, мувофиқи формулаи (1.4)

$$P(A) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

мешавад.

Дар таърифи классикии эҳтимолият баробаримкон будани ҳодисаҳои элементарӣ дар назар дошта шудааст.

Дар амалия бошад озмоишҳое дучор мешаванд, ки *оқибатҳои имконпазирашон баробаримкон нестанд.* Дар ин маврид таърифи классикии эҳтимолият татбиқнашаванда аст.

Нисбати шумораи баамалоии ҳодисаи A, адади M - ро *ба шумораи умумии санҷишҳо* N *зудии нисбии ҳодисаи* A меноманд ва бо $W(A)$ ишора мекунанд:

$$W(A)=\frac{M}{N}. \qquad (1.5)$$

Мушоҳидаҳо собит сохтаанд, ки дар мавриди кифоя зиёд будани шумораи озмоишҳои якхела N, дар аксари ҳолатҳо зудии нисбии ҳодиса $W(A)$ ба ягон бузургӣ майл мекунад, яъне *устувории зудии нисбӣ* ба назар мерасад. Ин маънои онро дорад, ки дар силсилаи гуногуни санҷишҳо ин бузургӣ ба ягон адади доимӣ майл мекунад.

Таърифи 2. Ҳудуди зудии нисбиро ҳангоми $N\to\infty$ эҳтимолияти омории ҳодиса номида, бо $P(A)$ ишора мекунанд:

$$P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{M}{N}.$$

Аз ин ҷо, ҳангоми зиёд будани миқдори санҷишҳо формулаи тақрибии зеринро ҳосил менамоем:

$$P(A)\approx\frac{M}{N}.$$

Ин таърифро *таърифи омории эҳтимолият* меноманд.

Хосиятҳои зудии нисбӣ:

1. Зудии нисбии ҳодисаи тасодуфӣ ададе мебошад, ки дар фосилаи $(0,1)$ ҷойгир аст: $0<W(A)<1$.
2. Зудии нисбии ҳодисаи эътиборнок Ω ба як баробар аст: $W(\Omega)=1$.
3. Зудии нисбии ҳодисаи имконнопазир V ба сифр баробар аст: $W(V)=0$.
4. Зудии нисбии суммаи ду ҳодисаи ноҳамҷояи A ва B ба суммаи зудии нисбии ин ҳодисаҳо баробар аст:

$$W(A+B)=W(A)+W(B).$$

Мисолҳо.

1) Ба нишон 30 тир холӣ карда шудааст ва 25 - тои онҳо ба нишон расидаанд. Зудии ба нишонрасиро ёбед.

Ҳал. Азбаски $N=30$, $M=25$ аст, пас мувофиқи формулаи (1.5)

$$W=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}\approx 0{,}83$$

мешавад.

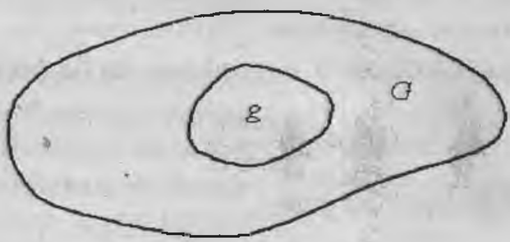
2) Ҳангоми холӣ кардани тир ба нишон собит гашт, ки $W=0{,}86$ аст. Шумораи тирҳои банишонрасидаро барои 30 тири холикардашуда муайян кунед.

Ҳал. Аз формулаи (1.5) $M=N\cdot W$ мешавад. Аз ин ҷо, $M=30\cdot 0{,}86=25{,}8$. Азбаски M адади бутун аст, пас миқдори тирҳои ба нишонрасида тақрибан ба 26 баробар аст.

3) Дар байни 500 маҳсулоти истеҳсолшуда 12 маҳсулоти нуқсондор ёфт шуд. Зудии нисбии пайдоиши маҳсулоти нуқсондорро ёбед.

Ҳал. Дар ин ҳолат $N=500$ ва $M=12$ аст. Мувофиқи формулаи (1.5) $W=\dfrac{12}{500}=0{,}024$ мешавад.

Дар таърифи классикии эҳтимолият фарз карда мешавад, ки шумораи оқибатҳои элементарӣ охирноканд. Дар амалия санҷишҳое мавҷуданд, ки шумораи оқибатҳои онҳо беохир мебошанд. Бо мақсади ин норасоии таърифи классикиро пурра кардан *мафҳуми эҳтимолияти геометрӣ* дохил карда шудааст.



Расми 1.1

Таърифи 3. Бигузор, дар ҳамворӣ соҳаи дорои масоҳат дода шуда бошад. Ин соҳаро бо G ва масоҳати онро бо S_G ишора мекунем. Дар дохили соҳаи G соҳаи g, бо масоҳати S_g, ҷойгир аст(Расми 1.1). Ба соҳаи G нуқтае тасодуфан партофта мешавад. Нуқтаи партофташуда ҳатман ба дохили соҳаи G меафтад ва эҳтимолияти афтодани нуқта ба дохили соҳаи g ба масоҳати ин соҳа мутаносиб буда, аз ҷойгиршавӣ ва шакли он вобаста намебошад.

Бигузор, ҳодисаи A афтодани нуқта ба соҳаи g бошад. Он гоҳ эҳтимолияти геометрии ин ҳодиса бо формулаи

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}$$

муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо S_g ва S_G мувофиқан масоҳати соҳаҳои g ва G мебошанд.

Айнан ҳамин хел мафҳуми эҳтимолияти геометрии афтодани нуқта ба ҷисми фазоии G муайян карда мешавад:

$$P(A) = \frac{V_g}{V_G},$$

ки дар ин ҷо V_g ва V_G мувофиқан ҳаҷми ҷисмҳои g ва G мебошанд.

Дар ҳолати умумӣ мафҳуми эҳтимолияти геометрӣ ба таври зерин дохил карда мешавад: *ченаки соҳаи g ва G (дарозӣ, масоҳат, ҳаҷм) -ро мувофиқан бо $mes\, g$ ва $mes\, G$ ишора мекунем.* Бо A ҳодисаи «афтодани нуқта ба соҳаи g»-ро ишора менамоем. Эҳтимолияти ба соҳаи g афтодани нуқтаи ба соҳаи G партофташуда бо формулаи

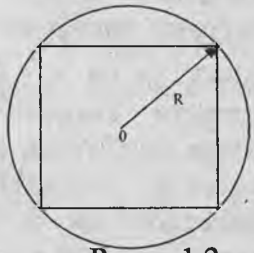
$$P(A) = \frac{mes\, g}{mes\, G}$$

муайян карда мешавад.

Мисолҳо.

1) Дар дохили доира квадрат кашида шудааст (Расми 1.2). Эҳтимолияти онро ёбед, ки нуқтаи ба доира партофташуда ба квадрат меафтад.

Ҳал. Бо R радиуси доира ва бо a тарафи квадратро ишора мекунем. Бигузор, S масоҳати доира ва S_1 масоҳати квадрат бошад. Маълум, ки $a=\sqrt{2}R$ аст. Мувофиқи таърифи геометрии эҳтимолият



Расми 1.2

$$P(A)=\frac{S_1}{S}=\frac{\left(\sqrt{2}R\right)^2}{\pi R^2}=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}\approx\frac{2}{3,14}\approx 0,64\cdot$$

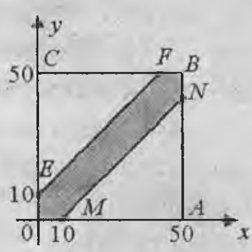
2) Дар дохили кураи радиусаш ба 3 баробар куб кашида шудааст. Ба таври тасодуфӣ нуқтае дар кура қайд карда мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки нуқта ба куб шомил аст.

Ҳал. Ишора дохил мекунем: R - радиуси кура, a - теғаи куб, V - ҳаҷми кура, V_1 - ҳаҷми куб.

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,\quad V_1=a^3=\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{8R^3}{3\sqrt{3}};$$

$$P(A)=\frac{V_1}{V}=\frac{\frac{8R^3}{3\sqrt{3}}}{\frac{4\pi R^3}{3}}=\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\approx 0,368\ .$$

3) Ду рафиқ, Одина ва Сафар маслиҳат карданд, ки дар чои муайян аз соати 12^{00} то 12^{50} дақиқа вомехӯранд. Шахси барвақт омада рафиқашро 10 дақиқа интизор мешаваду пас меравад. Вақти омадани ҳар яки онҳо дар тӯли 50 дақиқа тасодуфӣ буда, аз ҳамдигар вобаста нест. Эҳтимолияти вохӯрии



Расми 1.3

онҳоро ёбед.

Ҳал. Лаҳзаҳои омадани Одина ва Сафарро мувофиқан бо x ва y ишора мекунем. Барои он, ки онҳо вохӯранд зарур ва кифоя аст, ки шарти $|x-y|\le 10$ ичро шавад. x ва y - ро ҳамчун координатаҳоии нуқта дар системаи координатаи росткунча тасвир менамоем. Ҳамаи оқибатҳои имконпазирӣ вохӯрии онҳо тавассути нуқтаҳои квадрати тарафаш 50 тасвир ёфта, он оқибатҳое, ки ба вохӯрии онҳо мусоиданд, бо соҳаи рангкардашуда тасвир ёфтааст (Расмии 1.3). Мувофиқи таърифи геометрӣ, эҳтимолияти матлуб ба нисбати масоҳати соҳаи рангкардашуда ба масоҳати квадрати $OABC$ баробар аст:

$$P=\frac{S_{MNBFEO}}{S_{OABC}}=\frac{50^2-40^2}{50^2}=\frac{2500-1600}{2500}=\frac{900}{2500}=\frac{9}{25}=0{,}36.$$

§4. АКСИОМАҲОИ НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

Маълум аст, ки ҳар як соҳаи математикаи муосир аксиомаҳои худро дорад. Аксиома гуфта тасдиқотеро меноманд, ки дар ҳудуди назарияи мазкур дуруст ҳисобидашуда, беисбот қабул карда мешавад ва ҳамаи қоидаҳо ва теоремаҳои дигари назария дар асоси ин аксиомаҳо исбот карда мешаванд.

Назарияи эҳтимолият низ аксиомаҳои худро дорад, ки онҳоро солҳои 30-юм асри XX, математики машҳури рус А.Н. Колмогоров, бо истифодабарии мафҳумҳои назарияи маҷмӯҳо дохил намудааст.

Дар тартиб додани ин аксиомаҳо фазои (маҷмӯи) оқибатҳои элементарии санҷиш роли муҳим мебозад. Ин маҷмӯъро бо Ω ишора карда, системаи F - ро, ки аз зермаҷмӯъҳои маҷмӯи Ω иборат мебошад, дохил менамоем. Элементҳои системаи F-ро ҳодисаҳои тасодуфӣ, маҷмӯи Ω-ро ҳодисаи эътиборнок ва маҷмӯи холиро $\emptyset$ ҳодисаи имконнопазир меномем. Фарз мекунем, ки дар системаи F шартҳои зерин иҷро мешаванд:

1. Ω элементи системаи F мебошад.

2. Агар ҳодисаҳои A ва B - и дар Ω муайяншуда элементҳои F бошанд, он гоҳ $A+B, A\cdot B, \overline{A}, \overline{B}$ низ элементҳои F мешаванд.

3. Агар ҳодисаҳои $A_1, A_2, \ldots$, -и дар Ω муайяншуда, элементҳои F бошанд, он гоҳ суммаи онҳо $A_1 + A_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ ва ҳосили зарби онҳо $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ низ элементҳои F мешаванд.

Маҷмӯи муайяншудаи F - ро σ - алгебраи ҳодисаҳо меноманд.

Акнун аксиомаҳои назарияи эҳтимолиятро чунин баён намудан мумкин аст.

Аксиомаи 1(аксиомаи мавҷудияти эҳтимолият). Ба ҳаргуна ҳодисаи тасодуфии A аз σ - алгебраи ҳодисаҳо F, чунин адади ғайриманфии $P(A)$ мувофиқ меояд, ки онро эҳтимолияти рӯйдиҳии ин ҳодиса меноманд.

Аксиомаи 2(эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи эътиборнок). Эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи эътиборнок ба 1 баробар аст: $P(\Omega) = 1$.

Аксиомаи 3(аксиомаи ҷамъ). Агар ҳодисаҳои A ва B ноҳамҷоя бошанд, он гоҳ $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Аксиомаи 4(аксиомаи васеъкардашудаи ҷамъ). Агар ҳодисаи A ба рӯй додани ақаллан яке аз ҳодисаҳои ҷуфт-ҷуфт ноҳамҷоя $A_1, A_2, \ldots,$ баробарқувва бошад, яъне $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, он гоҳ $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Сегонаи (Ω, F, P)-ро *фазои эҳтимолӣ* меноманд. Дар мавзӯъҳои ояндаи китоб фарз карда мешавад, ки фазои эҳтимолӣ дода шудааст. Ҳамин тавр, эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодиса $P(A)$ - ченаки ададии имконияти рӯйдиҳии ҳодиса буда, аксиомаҳои овардашударо қаноат мекунонад.

Якчанд натиҷаҳои муҳими ин аксиомаҳоро меорем.

Натиҷаи 1. Эҳтимолиятҳои ҳодисаҳои ба ҳам муқобил бо баробарии зерин алоқаманд мебошанд: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Исбот. Аз таърифи ҳодисаҳои ба ҳам мукобил бармеояд,
ки $A + \bar{A} = \Omega$. Бинобар ин мувофиқи аксиомаи дуюм $P(A + \bar{A}) = 1$. Азбаски ҳодисаҳои A ва $\bar{A}$ ноҳамҷоя мебошанд, пас мувофиқи аксиомаи сеюм $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Натиҷаи 2. Эҳтимолияти ҳодисаи имконнопазир ба сифр баробар аст: $P(V) = 0$.

Исбот. Азбаски ҳодисаи эътиборнок ба ҳодисаи имконнопазир муқобил мебошад, дар асоси натиҷаи 1 ҳосил мекунем: $P(V) = 1 - P(\Omega)$. Мувофиқи аксиомаи дуюм $P(\Omega) = 1$ аст. Бинобар ин $P(V) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

Натиҷаи 3. Эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳар гуна ходиса ба порчаи $[0,1]$ тааллук дорад, яъне $P(A) \in [0;1]$.

Исбот. Мувофиқи натиҷаи 1 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ аст. Дар асоси аксиомаи якум $P(\bar{A})$ ададӣ ғайриманфӣ мебошад, пас $P(A) \leq 1$. Аз ин ҷо $0 \leq P(A) \leq 1$.

§5. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Ду танга партофта мешавад. Бигузор A_i, i=1,2 мувофиқан ҳодисаҳои баромадани «рақам» дар тангаҳои якум ва дуюм бошанд. Ҳодисаҳои B={Дар ҳарду танга «рақам» мебарояд}; C={Ақаллан дар як танга «рақам» мебарояд}; D={Дар ягон танга «рақам» намебарояд} - ро бо ёрии ҳодисаҳои A_1, i=1,2 ифода намоед.

Ҷавоб: $B = A_1 \cdot A_2$; $C = A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2$; $D = A_1 \cdot A_2$.

Масъалаи 2. Дар оила ду нафар фарзанд – як писар ва як духтар ҳастанд. Бигузор, ҳодисаҳои A={Синну соли писар аз 10 зиёд аст }, B={Синну соли духтар аз 10 зиёд аст }, C={Писар аз духтар калон аст } бошанд. Ҳодисаҳои D={Синну соли писар аз 10 зиёд аст ва ӯ аз духтар калон аст}, E={Синну соли писар аз 10 зиёд аст, вале ӯ аз духтар калон намебошад}, F={Синну соли ақаллан яке аз фарзандон аз 10 зиёд аст} -ро бо ёрии ҳодисаҳои A, B, C ифода намоед.

Ҷавоб: $D = A \cdot C$; $E = A \cdot \overline{C}$; $F = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B$.

Масъалаи 3. Дар гурӯҳ 8 нафар донишҷӯёни аълохон ҳастанд. Бо чанд тарзҳои гуногун 3 нафари онҳоро ба ҷамъомади умумидонишгоҳӣ пешбарӣ намудан мумкин аст. **Ҷавоб:** 56.

Масъалаи 4. Ду шашхол партофта мешавад. Эҳтимолияти он, ки суммаи холҳои пайдошуда ба 7 баробар аст, ёфта шавад. **Ҷавоб:** $\frac{1}{6}$.

Масъалаи 5. Шахсе ду рақами охирини телефони рафиқашро фаромӯш намуд. Ӯ ба рафиқаш занг задани шуда, рақамҳои фаромӯшкардаашро тасодуфан интихоб менамояд. Эҳтимолияти онро, ки ин ду рафиқ дар тамос мешаванд, муайян кунед. **Ҷавоб: 1/100.**

Масъалаи 6. Дар гурӯҳ 30 нафар донишҷӯён мехонанд. Аз кори санҷишӣ 6-нафар баҳои «аъло», 10-нафар баҳои «хуб» ва 9-нафар баҳои «қаноатбахш» гирифтанд. Эҳтимолияти он, ки 3-нафар донишҷӯи тасодуфан ба назди тахтаи синфӣ даъват шуда, баҳои «ғайриқаноатбахш» доранд, ёфта шавад. **Ҷавоб:** $\frac{1}{406}$.

Масъалаи 7. Ба нимҳамвории бо хатҳои праллел $x=-a$ ва $x=a$ ҷудокардашуда, тасодуфан тангаи радиусаш $r<a$ партофта мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки танга хатҳои додашударо намебурад.

Ҷавоб: P=(2a-2r) / 2a=(a-r)/a.

Масъалаи 8. Одина ва Сафар қарор доданд,ки дар ҷои муқарраршуда аз соати 11 то 12 вохӯранд. Шахси аввал омада шахси дуюмро 15 дақиқа интизор мешавад. Ҳодисаҳои A={ Вохӯрӣ баргузор мегардад }, B={ Вохӯрӣ баргузор намегардад }, C={ Вохӯрӣ баъди соати 11-у 30 дақиқа баргузор мегардад }-ро муайян намуда, эҳтимолияташро ҳисоб кунед.

Ҷавоб: $P(A)=7/16$, $P(B)=9/16$, $P(C)=1/4$.

Масъалаи 9. Дар дохили эллипси $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ даврai $x^2+y^2=4$ ҷойгир аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки нуқтаи ба эллипс партофташуда ба ҳалқаи байни эллипс ва доира меафтад.

Ҷавоб: $\frac{11}{15}$.

Масъалаи 10. Аз дохили давраи радиусаш 5 ба таври ихтиёрӣ як нуқта интихоб карда шудааст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ин нуқта аз марказ дар масофаи на зиёдтар аз 2 воҳид ҷойгир мешавад.

Ҷавоб: 0,16.

Масъалаи 11. Дар натиҷаи чандин санҷиш маълум карданд, ки аз 300 ниҳоли шинонидашуда 260-тояш месабзад. Эҳтимолияти сабзидани ниҳолро ёбед. Агар 2000 ниҳол шинонда шавад, пас чандтояш месабзад?

Ҷавоб: $p(A)\approx 0{,}87$; $n\approx 1740$.

Масъалаи 12. Дар натиҷаи чандин мусобиқаҳои спортӣ маълум гашт, ки аз 300 тири холикардашуда 288 - тояш ба нишон мерасад. Эҳтимолияти расидан ба нишонро ёбед. Аз 500 тир чандтояш ба нишон мерасад?

Ҷавоб: $p(A)\approx 0{,}96$; $n\approx 480$.

БОБИ II. ТЕОРЕМАҲОИ ҶАМЪ ВА ЗАРБИ ЭҲТИМОЛИЯТҲО

§ 1. ТЕОРЕМАҲОИ ҶАМЪ ВА ЗАРБИ ЭҲТИМОЛИЯТҲО

Теоремаи 1. Эҳтимолияти суммаи ду ҳодиса ба фарқи суммаи эҳтимолиятҳои ҳар яки онҳо ва эҳтимолияти ҳосили зарби онҳо баробар аст:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (2.1)$$

Исбот. Ҳодисаи $A+B$-ро ба намуди суммаи ҳодисаҳои ноҳамҷояи A ва $[B-A\cdot B]$ навиштан мумкин аст:

$$A+B=A+[B-A\cdot B].$$

Аз ин ҷо мувофиқи аксиомаи 3 ҳосил мекунем:

$$P(A+B)=P(A+[B-A\cdot B])=P(A)+P(B-A\cdot B). \qquad (2.2)$$

Аз баробарии охирин

$$P(B-A\cdot B)=P(B)-P(A\cdot B).$$

Ин ифодаро ба тарафи рости баробарии (2.2) гузошта, баробарии (2.1)-ро ҳосил мекунем. Теорема исбот шуд.

Баробарии (2.1)-ро барои се ҳодисаҳо васеъ намудан мумкин аст:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-$$
$$-P(A\cdot C)-P(B\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C).$$

Умуман, эҳтимолияти суммаи n ҳодисаҳо бо формулаи

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P\left(A_i\cap A_j\right)-\sum_{1\le i<j<k\le n}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)-$$
$$-\ldots+(-1)^{n+1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right),$$

муайян карда мешавад.

Агар ҳодисаҳои A ва B ноҳамҷоя бошанд, он гоҳ мувофиқи аксиомаи сеюм:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Ин тасдиқот барои шумораи охирноки ҳодисаҳои байни ҳам ҷуфт –ҷуфт ноҳамҷояи $A_1, A_2, ..., A_n$ низ ҷой дорад:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Таърифи 1. Ҳодисаи A - ро аз ҳодисаи B новобаста меноманд, агар эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A аз рӯй додан ва рӯй надодани ҳодисаи B вобаста набошад.

Таърифи 2. Ҳодисаи A - ро аз ҳодисаи B вобаста меноманд, агар эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A аз рӯй додан ва рӯй надодани ҳодисаи B вобаста бошад.

Мисол. Дар қуттӣ 3 кураи сурх ва 3 кураи сабз мавҷуданд. Аз қуттӣ як кура гирифта мешавад. Ҳодисаи A- кураи гирифташуда сурх аст. Эҳтимолияти ин ҳодиса ба $P(A)=\frac{3}{6}=0{,}5$ баробар аст. Кураи гирифташударо ба қуттӣ баргардонида, онҳоро омехта карда, аз қуттӣ боз як кура мегирем. Ҳодисаи B - кураи гирифташуда сурх аст. Эҳтимолияти ин ҳодиса низ $P(B)=\frac{3}{6}=0{,}5$ аст, яъне ин ҳодисаҳо новобастаанд.

Агар пас аз рӯй додани ҳодисаи A кура ба қуттӣ баргардонида нашавад, он гоҳ эҳтимолияти ҳодисаи B кам мешавад: $P(B)=\frac{2}{5}=0{,}4$. Агар дар санҷиши якум кураи сабз пайдо шуда бошад, он гоҳ эҳтимолияти ҳодисаи B меафзояд: $P(B)=\frac{3}{5}=0{,}6$. Ин мисол нишон медиҳад, ки эҳтимолияти ҳодисаи B аз рӯй додан ё рӯй надодани ҳодисаи A вобаста аст.

Эҳтимолияти рӯй додани ҳодисаи A, бо он шарте, ки аллакай ҳодисаи B рӯй додааст, *эҳтимолияти шартӣ* ном дошта, бо рамзи $P(A/B)$ ишора карда мешавад. Аён аст, ки агар ҳодисаи A аз ҳодисаи B новобаста бошад, он гоҳ $P(A/B)=P(A)$ аст.

Теоремаи 2. Эҳтимолияти ҳосили зарби ду ҳодисаи ихтиёрӣ, ба ҳосили зарби эҳтимолияти яке аз онҳо бар эҳтимолияти шартии дигараш баробар аст:

$$P(A \cdot B)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B). \qquad (2.3)$$

Дар ҳақиқат, бигузор аз шумораи умумии санҷишҳои элементарӣ n, k - тояш ба рӯйдиҳии ҳодисаи A мусоид бошанд. Аз ин k ҳодисаҳо бошад, l - тояш ба рӯйдиҳии ҳодисаи B мусоидат намоянд(яъне ба рӯйдиҳии ҳодисаи $A \cdot B$). Он гоҳ, мувофиқи таърифи классикии эҳтимолият

$$P(A \cdot B)=\frac{l}{n}=\frac{k}{n}\cdot\frac{l}{k}=P(A)P(B/A)$$

мешавад. Қисми дуюми баробарӣ айнан ҳамин тавр исбот карда мешавад.

Натиҷа. Эҳтимолияти ҳосили зарби ду ҳодисаи новобастаи A ва B ба ҳосили зарби эҳтимолиятҳои ин ҳодисаҳо баробар аст:

$$P(A \cdot B)=P(A)P(B). \qquad (2.4)$$

Мисол. Ду тирандоз ба нишон тир холӣ мекунанд. Эҳтимолияти ба нишон расидан барои тирандози якум ба 0,75 (ҳодисаи A) ва барои тирандози дуюм ба 0,8 (ҳодисаи B) баробар аст. Эҳтимолияти он, ки ҳар ду тирандоз ба нишон мерасанд, ба чанд баробар аст?

Ҳал. Азбаски ҳодисаҳои A ва B новобастаанд, пас мувофиқи баробарии (2.4) эҳтимолияти матлуб ба

$$P(A \cdot B)=P(A)P(B)=0{,}75 \cdot 0{,}8=0{,}6$$

баробар аст.

Таърифи 3. Ҳодисаҳои $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дар як гурӯҳ новобаста номида мешаванд, агар барои ҳар гуна $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n$, $(1 \le r \le n)$ баробарии зерин ҷой дошта бошад:

$$P\left(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{i_r}\right).$$

Дар ҳолати хусусӣ, агар $r = n$ бошад

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n\right).$$

Теоремаи 3. Эҳтимолияти ҳосили зарби якчанд ҳодисаҳо бо баробарии зерин муайян карда мешавад:

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 / A_1\right) \cdot P\left(A_3 / A_1 A_2\right) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot P\left(A_k / A_1 A_2 \ldots A_{k-1}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n / A_1 \cdot A_2 \ldots A_{n-1}\right). \qquad (2.5)$$

Дар ин ҷо бо $P\left(A_k / A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}\right)$ эҳтимолияти шартии ҳодисаи A_k, бо шарте, ки ҳодисаҳои $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ аллакай рӯй додаанд, ишора карда шудааст.

Исбот. Исботи теоремаро бо усули индуксияи математикӣ мегузаронем. Барои ин ишораи $B = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ -ро дохил менамоем. Барои $n = 2$ дурустии формулаи (2.5) аз формулаи (2.3) ҳосил мешавад. Бигузор, баробарии (2.5) барои ҳар гуна n дуруст бошад. Нишон медиҳем, ки ин баробарӣ барои $n+1$ низ дуруст мебошад.

Дар асоси формулаи (2.3)

$$P\left(B \cdot A_{n+1}\right) = P(B) \cdot P\left(A_{n+1} / B\right).$$

Ба ишораҳои пештара гузашта ва баробарии (2.5)-ро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем:

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n+1}\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 / A_1\right) \cdot P\left(A_3 / A_1 A_2\right) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot P\left(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}\right) \cdot P\left(A_{n+1} / A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\right).$$

Теорема исбот шуд.

Дар баъзе ҳолатҳо эҳтимолияти ҳодисаи мазкурро бо ёрии эҳтимолияти ҳодисаи ба он муқобил ёфтан қулайтар аст.

Бигузор, эҳтимолиятҳои ҳодисаҳои новобастаи $A_1, A_2, ..., A_n$ маълум бошанд:

$$P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, ..., \ P(A_n) = p_n \ .$$

Эҳтимолияти ҳодисаҳои муқобилро бо

$$P(\overline{A_1}) = q_1, P(\overline{A_2}) = q_2, ..., \ P(\overline{A_n}) = q_n$$

ишора мекунем. Пас $P(B) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n) = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$ -эҳтимолияти он, ки аз ҳодисаҳои $A_1, A_2, ..., A_n$ ягонтояш дар ин санҷиш рӯй намедиҳанд. Он гоҳ эҳтимолияти рӯй додани ақаллан яке аз ҳодисаҳои $A_1, A_2, ..., A_n$ ҳамчун эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи муқобил $\overline{B}$ ёфта мешавад:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n. \qquad (2.6)$$

Мисол. Агар корхона ҳамеша бо ду намуд маҳсулоти хом таъмин бошад, пас он метавонад бе танаффус фаъолият намояд. Эҳтимолияти қатшавии таъминот аз маҳсулоти хоми якум ба 0,05 ва дуюм ба 0,08 баробар аст. Эҳтимолияти аз фаъолият бозмондани корхонаро ёбед?

Ҳал. Ҳодисаи A_1 -таъмин нашудани корхона бо маҳсулоти хоми намуди I.

Ҳодисаи A_2- таъмин нашудани корхона бо маҳсулоти хоми намуди II.

Мувофиқи шарти масъала:

$$p_1 = P(A_1) = 0{,}05, \ p_2 = P(A_2) = 0{,}08,$$

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}05 = 0{,}95, \quad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}08 = 0{,}92.$$

Бо B ҳодисаи таъмин будани корхонаро бо маҳсулотҳои хоми навъи I ва II ишорат мекунем. Мувофиқи теоремаи зарби эҳтимолиятҳо

$$P(B) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}95 \cdot 0{,}92 = 0{,}874.$$

Аз ин ҷо, мувофиқи формулаи (2.6)

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}874 = 0{,}126.$$

§2. ФОРМУЛАҲОИ ЭҲТИМОЛИЯТИ ПУРРА ВА БЕЙЕС

Бигузор, ҳодисаҳои $A_1, A_2, ..., A_n$ ҷуфт-ҷуфт ноҳамҷоя буда, гурӯҳи пурраро ташкил диҳанд ва ҳодисаи B фақат бо яке аз ин ҳодисаҳо якҷоя рӯй диҳад. Илова бар ин, эҳтимолияти ин ҳодисаҳо $P(A_i),\ i = \overline{1,n}$ ва эҳтимолиятҳои шартии ҳодисаи B, $P(B / A_i),\ i = \overline{1,n}$ маълум бошанд. Эҳтимолияти ҳодисаи B - ро ҳисоб мекунем. Нишон медиҳем, ки формулаи

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i) \tag{2.7}$$

ҷой дорад.

Дар ҳақиқат, азбаски ҳодисаи B метавонад танҳо дар ҳолати рӯй додани яке аз ҳодисаҳои $A_i,\ i = \overline{1,n}$ рӯй диҳад, пас

$$B = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot B$$

буда, ҳодисаҳои $A_i B$, $i = \overline{1,n}$ ноҳамҷояанд. Бинобар ин, дар асоси теоремаҳои ҷамъ ва зарби эҳтимолиятҳо ҳосил мекунем:

$$P(B) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i).$$

Баробарии (2.7)–ро *формулаи эҳтимолияти пурра* меноманд.

Мисол. Барои қабули санҷиш устод 40 масъала тартиб дод, ки 25 -тои он аз назарияи эҳтимолият буда, 15 тояш аз омори риёзӣ мебошад. Барои супоридани санҷиш донишҷӯй бояд масъалаи тасодуфан интихобкардаашро ҳал намояд. Эҳтимолияти супоридани санҷишро барои донишҷӯе, ки 20 масъалаи назарияи эҳтимолият ва 10 масъалаи омори математикиро ҳал карда метавонад, ёбед.

Ҳал. Ҳодисаи A_1 - масъалаи интихобшуда аз назарияи эҳтимолият буда, ҳодисаи A_2 - масъалаи интихобшуда аз омори математикӣ аст. Эҳтимолияти ин ҳодисаҳо мувофиқан ба

$$P(A_1)=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}=0{,}625; \quad P(A_2)=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}=0{,}375$$

баробаранд.

Бигузор, B ҳодисаи ҳал шудани масъала бошад. Он гоҳ эҳтимолиятҳои шартии $P(B/A_1)$, $P(B/A_2)$ - ро ҳисоб мекунем:

$$P(B/A_1)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}=0{,}8; \quad P(B/A_2)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

Аз ин ҷо, дар асоси формулаи эҳтимолияти пурра

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)=$$

$$=0{,}625\cdot 0{,}8+0{,}375\cdot\frac{2}{3}=0{,}5+0{,}25=0{,}75$$

мешавад.

Бигузор, ҳамаи он шартҳое, ки барои ҳосил кардани формулаи эҳтимолияти пурра заруранд, иҷро шаванд ва дар натиҷаи гузаронидани як санҷиш. ҳодисаи B рӯй диҳад. Эҳтимолиятҳои шартии ҳодисаҳои A_i, $i=\overline{1,n}$ - ро меёбем. Азбаски

$$P(A_i\cdot B)=P(B)P(A_i/B)=P(A_i)P(B/A_i),$$

пас,

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}.$$

Дар асоси формулаи (2.7) ҳосил мекунем:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i)}.$$

Ин баробариро формулаи Бейес (1705-1761, математики англис) меноманд.

Мисол. Дар анбор маҳсулоти якҷинсаи дар ду коргоҳи корхона истеҳсолшуда мавҷуданд. Маълум аст, ки ҳаҷми маҳсулоти коргоҳи якум назар ба дуюм 3 маротиба зиёд аст. Эҳтимолияти истеҳсоли маҳсулоти нуқсондор дар ин коргоҳҳо мувофиқан ба 0,04 ва 0,01 баробаранд. Маҳсулоти тасодуфан гирифташуда нуқсондор аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ин маҳсулот дар коргохи якум истеҳсол шудааст.

Ҳал. Бо A_1 ва A_2 мувофиқан ҳодисаҳои истеҳсол шудани маҳсулотро дар коргоҳи якум ва дуюм ишора мекунем. Аён аст, ки $P(A_1) = \frac{3}{4} = 0,75$; $P(A_2) = \frac{1}{4} = 0,25$ аст. B-ҳодисаи он, ки маҳсулоти гирифташуда нуқсондор аст. Мувофиқи шарти масъала $P(B / A_1) = 0,04$, $P(B / A_2) = 0,01$ аст. Аз формулаи Байес, ҳангоми $n = 2$ ҳосил мекунем:

$$P(A_1 / B) = \frac{0,75 \cdot 0,04}{0,75 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,01} = \frac{0,03}{0,0325} \approx 0,92.$$

§3. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Се танга партофта мешавад. Эҳтимолияти руй додани ҳодисаҳои зеринро ҳисоб кунед:

A={ Дар ҳар се танга «герб» пайдо мешавад };

B={ Танҳо дар ду танга «герб» пайдо мешавад };

C={ Ақаллан дар як танга «герб» пайдо мешавад }.

Ҷавобҳо: $P(A)$= 1/8; $P(B)$=3/8; $P(C)$=7/8.

Масъалаи 2. Дар ду қуттӣ 10-тои асбобҳои якхела мавҷуданд. Дар қуттии якум 8 ва дар қуттии дуюм 7 асбоби бенуқсон ҳаст. Аз ҳар ду қуттӣ ба таври ихтиёрӣ яктогӣ асбоб гирифта мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳарду асбоби гирифташуда бенуқсон мебошад. **Ҷавоб:** $0{,}56$.

Масъалаи 3. Се тирандоз новобаста аз ҳамдигар ба як нишон тир холӣ мекунанд. Эҳтимолияти ба нишонрасии тирандозҳо мувофиқан ба 0,7; 0,8 ва 0,9 баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳарсеи тирандозҳо ба нишон мерасанд. **Ҷавоб:** 0,504.

Масъалаи 4. Коргар ба се дастгоҳ хизмат мерасонад. Эҳтимолияти он, ки дар давоми рӯзи корӣ, дастгоҳи якум диққати коргарро ба худ ҷалб менамояд ба 0,7 баробар аст. Ин эҳтимолият барои дастгоҳҳои дуюм ва сеюм мувофиқан ба 0,75 ва 0,8 баробар аст. Эҳтимолияти он, ки дар давоми рӯзи корӣ ду дастгоҳ диққати коргарро ба худ ҷалб менамояд, ёфта шавад. **Ҷавоб:** 0,425.

Масъалаи 5. Дар қуттӣ 6 кураи сафед ва 8 кураи сиёҳ мавҷуд аст. Аз қуттӣ пай дар пай, ду маротиба, яктогӣ кура гирифта мешавад (кураи гирифташуда ба қуттӣ баргардонида намешавад). Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳарду кураи гирифташуда сафед аст. **Ҷавоб:15/91**

Масъалаи 6. Эҳтимолияти сабзиши тухмӣ 0,7 аст. Эҳтимолияти он, ки аз ду тухмии шинонидашуда ақаллан яктояш месабзад ба чанд баробар аст? **Ҷавоб:** $0{,}91$.

Масъалаи 7. Донишҷӯй ба касалии зуком(ҳодисаи A) ё дар натиҷаи аз ҳад зиёд хунук хӯрдан гирифтор шудааст(ҳодисаи B) ё аз шахси бемор сироят ёфтааст (ҳодисаи C). Ҳодисаҳои B ва C -ро ноҳамҷоя ҳисобида, эҳтимолияти $p(A)$ -ро ёбед, агар $p(B)=0{,}5$, $p(C)=0{,}5$, $p(A/B)=0{,}3$, $p(A/C)=0{,}1$ бошанд. **Ҷавоб:** $p(A)=0{,}2$.

Масъалаи 8. Дар ду завод лампаи электрикӣ истеҳсол мешавад. Заводи якум 60% ва заводи дуюм 40%-и маҳсулотро тайёр мекунад. Маҳсулоти заводи якум 70% ва заводи дуюм 80% лампаи хушсифат дорад. Ба дӯкон маҳсулоти ҳарду завод дохил мешавад. Эҳтимолияти он, ки маҳсулоти харидашуда хушсифат аст, ёфта шавад.

БОБИ III. САНҶИШҲОИ ТАКРОРИИ НОВОБАСТА

§1. ФОРМУЛАИ БЕРНУЛЛИ. АДАДИ ЭҲТИМОЛНОКТАРИНИ РӮЙДИҲИИ ҲОДИСА

Бигузор, дар шароити якхела санҷишҳое гузаронида шаванд, ки дар ҳар кадоми онҳо ҳодисаи A бо эҳтимолияти якхела рӯй диҳад.

Агар эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A дар як санҷиш аз рӯйдиҳии он дар санҷишҳои дигар вобаста набошад, он гоҳ ин қабил санҷишҳоро байни ҳам *новобаста* меноманд.

Эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A - ро бо p ишора менамоем. Он гоҳ, эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи $\overline{A}$ ба $q = 1 - p$ баробар мешавад.

Эҳтимолияти он, ки дар n санҷиши новобаста ҳодисаи A расо m маротиба рӯй медиҳад, бо формулаи Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ аст.

Мисол. Эҳтимолияти ба нишонрасӣ ҳангоми як маротиба тир холӣ кардан ба 0,8 баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳангоми 4 тир холӣ кардан сетои он ба нишон мерасад.

Ҳал. Мувофиқи шарти мисол

$$n = 4,\ m = 3;\ p = 0{,}8;\ q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Ин қиматҳоро ба формулаи Бернулли гузошта, ҳосил мекунем:

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!(4-3)!}0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 4 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096.$$

Таъриф. Адади m_0 - ро *адади эҳтимолноктарини* рӯйдиҳии ҳодисаи A дар n санҷиш меноманд, агар қимати $P_n(m)$ ҳангоми $m = m_0$ аз дигар қиматҳои $P_n(m)$ хурд набошад, яъне $P_n(m_i) \le P_n(m_0)$ бошад, m_i=0, 1,2, ..., n.

Дар мавриди $p \ne 0$ ва $p \ne 1$ будан, адади эҳтимолноктарин m_0- ро аз нобаробариҳои

$$np - q \le m_0 \le np + p \qquad (3.1)$$

ёфтан мумкин аст, ки дар ин ҷо фарқи қиматҳои канорӣ ба 1 баробар аст:

$$np + p - (np - q) = np + p - np + q = p + q = 1.$$

Ду ҳолатҳои зерин имконпазиранд:

1) агар $np + p$ адади касрӣ бошад, пас як адади эҳтимолноктарин мавҷуд аст ва он ба қисми бутуни $np + p$ баробар мешавад: $m_0 = [np + p]$.

2) агар $np + p$ адади бутун бошад, пас ду ададҳои эҳтимолноктарин мавҷуданд: $m_0' = np - q$ ва $m_0'' = np + p$.

Мисол. Дар 10 қуттӣ маҳсулоти якҷинса мавҷуданд. Эҳтимолияти он, ки маҳсулоти қуттии ба таври ихтиёрӣ интихобшуда бенуқсонанд ба 0,8 баробар аст. Адади эҳтимолноктарини шумораи қуттиҳои маҳсулоташ бенуқсонро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $n = 10$; $p = 0{,}8$; $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ аст. Ин қиматҳоро ба нобаробарии (3.1) мегузорем:

$$10 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le m_0 \le 10 \cdot 0{,}8 + 0{,}8,$$

$$8 - 0{,}2 \le m_0 \le 8 + 0{,}8,$$

$$7{,}8 \le m_0 \le 8{,}8.$$

Азбаски $np + p = 10 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 = 8{,}8$ адади бутун нест, пас як адади эҳтимолноктарини $m_0 = [8{,}8] = 8$ мавҷуд аст.

Чӣ хеле ки дида мешавад, эҳтимолияти $P_n(m)$ -ро бо формулаи Бернулли аниқ ҳисоб намудан мумкин аст. Аммо, агар қиматҳои n ва m калон бошанд, он гоҳ ҳисобкунӣ бо ин формула душвор мегардад. Теоремаҳои зерин формулаҳои асимптотикиеро пешниҳод менамоянд, ки бо ёрии онҳо қимати тақрибии $P_n(m)$ -ро, дар ҳолати кифоя калон будани n ва m, бо осонӣ ҳисоб намудан мумкин аст.

§2. ТЕОРЕМАИ ЛОКАЛИИ МУАВР - ЛАПЛАС

Теорема. Бигузор, дар ҳар яке аз n санҷишҳои нобаста ҳодисаи A бо эҳтимолияти доимии аз 0 ва 1 фарққунандаи p руй диҳад ва m миқдори рӯйдиҳии ҳодисаи A дар ин санҷишҳо буда, бузургии $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ маҳдуд бошад: $|x|<c$, $c=const$, $q=1-p$. Он гоҳ ҳангоми $n\to\infty$ баробарии тақрибии зерин ҷой дорад:

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x), \qquad (3.2)$$

ки дар ин ҷо

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Қиматҳои функсияи $\varphi(x)$ барои $x\geq 0$ дар охири китоб, ба намуди ҷадвал оварда шудаанд (Ҷадвали 1).

Қайд менамоем, ки $\varphi(x)$ функсияи ҷуфт мебошад. Ин хосияти функсияро ба инобат гирифта, ҷадвали номбаршударо барои $x<0$ низ истифода намудан мумкин аст.

Мисол. Эҳтимолияти истеҳсол шудани маҳсулоти аълосифат ба 0,8 баробар аст. Эҳтимолияти онро ки дар байни 100 маҳсулоти истеҳсолшуда расо 75 маҳсулоти аълосифат ҳаст, тақрибан муайян кунед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $n = 100$, $m = 75$, $p = 0{,}8$, ва $q = 1 - p = 0{,}2$. Аз формулаи (3.2) истифода мебарем:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25.$$

Қимати функсияи $\varphi(x)$ -ро аз Ҷадвали 1 меёбем:

$$\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826.$$

Пас, $P_{100}(75) \approx \dfrac{0{,}1826}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \dfrac{0{,}1826}{4} = 0{,}04565$.

Қайд менамоем, ки формулаи тақрибии (3.2) барои он қиматҳои p, ки ба $1/2$ наздик мебошанд натиҷаи «хуб» медиҳад ва барои он қиматҳои p, ки ба 0 ва 1 наздик мебошанд натиҷаи «бад» медиҳад. Бинобар ин барои ҳолати дуюм формулаи асимптотикии дигаре истифода бурда мешавад, ки он аз теоремаи Пуассон ҳосил шудааст.

§3. ТЕОРЕМАИ ПУАССОН

Теорема. Агар 1) миқдори санҷишҳои новобаста n кифоя калон бошад; 2) эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодиса дар ҳар як санҷиш p доимӣ буда ба 0 наздик бошад; 3) $n \cdot p = \lambda$ (λ-доимӣ) бошад, он гоҳ баробарии тақрибии зерин ҷой дорад:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \tag{3.3}$$

Исбот. $p = \dfrac{\lambda}{n}$ -ро ба инобат гирифта, аз формулаи Бернуллӣ истифода мебарем:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{m!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

Маълум, ки ҳангоми $n \to \infty$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda};\ \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \to 1 \text{ ва } \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\to 1.$$

Аз ин ҷо $P_n(m) \to \frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$ ҳангоми $n \to \infty$. Теорема исбот шуд.

Мисол. 100 дастгоҳи бофандагӣ кор карда истодааст. Эҳтимолияти дар давоми вақти T канда шудани ришта дар дастгоҳи бофандагӣ ба 0,01 баробар аст. Эҳтимолияти онро, ки дар давоми вақти T риштаи на беш аз 3 дастгоҳ канда мешавад, ёфта шавад.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала

$$n = 100;\ \ p = 0{,}01;\ \ \lambda = n\cdot p = 100\cdot 0{,}01 = 1.$$

Аз формулаи (3.3) истифода мебарем:

$$P_{100}(m \le 3) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) = \frac{1^0}{0!}\cdot e^{-1} + \frac{1^1}{1!}\cdot e^{-1} +$$

$$+\frac{1^2}{2!}\cdot e^{-1} + \frac{1^3}{3!}\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = \frac{8}{3\cdot e} \approx 0{,}98.$$

Қайд. Иваз намудани формулаи Бернуллӣ бо формулаи тақрибии (3.3) дар ҳолатҳои $n\cdot p\cdot q \le 9$ мувофиқи мақсад аст. Дар ҳолатҳои $n\cdot p\cdot q > 9$ бошад, формулаи (3.2)-ро истифода мебаранд.

§4. ТЕОРЕМАИ ИНТЕГРАЛИИ МУАВР - ЛАПЛАС

Дар масъалаҳои бисёри амалӣ ҳисоб намудани эҳтимолияти дар n санҷишҳои новобаста на камтар аз m_1 ва на зиёда аз m_2 маротиба рӯй додани ҳодиса талаб карда мешавад. Ин эҳтимолиятро бо $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ ишора мекунем. Теоремаи зерин тарзи ҳисоб намудани ин эҳтимолиятро муайян мекунад.

Теорема. Бигузор, дар ҳар яке аз n санҷишҳои новобаста ҳодисаи A бо эҳтимолияти доимии аз 0 ва 1 фарққунандаи p рӯй диҳад, m миқдори рӯйдиҳии ҳодисаи A дар ин санҷишҳо бошад ва $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ маҳдуд бошад ($|x| < c$, ки c-адади доимӣ, $q = 1 - p$). Он гоҳ ҳангоми $n \to \infty$ баробарии тақрибии зерин ҷой дорад:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right], \tag{3.4}$$

ки дар ин ҷо

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функсияи $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ - ро бошад, функсияи Лаплас (1749-1827, *математик, физик ва астрономи фаронсавӣ*) ё интеграли эҳтимолиятҳо меноманд.

Ҷадвали қиматҳои ин функсия барои $x \ge 0$ дар охири китоб оварда шудааст (Ҷадвали 2).

Барои ёфтани қиматҳои ин функсия дар ҳолатҳои $x < 0$ бошад, аз хосияти тоқ будани ин функсия

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \tag{3.5}$$

ва ҷадвали номбаршуда истифода мебаранд.

Мисоли 1. Эҳтимолияти аълосифат истеҳсол шудани ҳар як маҳсулот ба 0,8 баробар аст. Эхтимолияти онро, ки дар байни 100 маҳсулоти истехсолшуда на камтар аз 75 ва на зиёда аз 85 маҳсулоти аълосифат ҳаст, тақрибан муайян кунед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала

$n = 100$; $m_1 = 75$; $m_2 = 85$; $p = 0{,}8$; $q = 1 - p = 0{,}2$.

Аз формулаи (3.4) истифода мебарем:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{85 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{5}{4} = 1,25;$$

Аз формулаи (3.5) ва Ҷадвали 2 истифода намуда меёбем:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,7887;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(1,25) = 0,7887.$$

Пас, $P_{100}(75 \le m \le 85) \approx \frac{1}{2}[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] = \frac{1}{2} \cdot 2\Phi(1,25) = 0,7887$.

Мисоли 2. Бо технологияи мавҷуда корхона ба ҳисоби миёнаи 80% маҳсулоти навъи олӣ истеҳсол менамояд. Эҳтимолияти он, ки дар байни 1000 маҳсулоти истеҳсол шуда шумораи маҳсулоти аълосифат аз фосилаи (750, 850) қимат қабул менамояд, ёфта шавад.

Ҳал. Бо A -ҳодисаи «истеҳсолшавии маҳсулоти аълосифат»-ро ишора мекунем. m -шумораи рӯйдиҳии ҳодисаи A дар n саниҷишҳои новобаста. Шумораи санҷишҳои новобаста $n = 1000$ буда, эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A дар ҳар санҷиши алоҳида $p = P(A) = 0,8$ аст. Мо бояд эҳтимолияти иҷрошавии нобаробарии $m_1 = 750 < m < 850 = m_2$ -ро ёбем. Аз формулаи

$$P(m_1 < m < m_2) \approx \frac{1}{2}[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)]$$

истифода мекунем.

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{750 - 1000 \cdot 0,8}{\sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{750 - 800}{\sqrt{1000 \cdot 0,16}} = \frac{-50}{\sqrt{160}} = -\frac{50}{4\sqrt{10}} = -\frac{25}{2\sqrt{10}} \approx -3,96.$$

$$x_2 = \frac{m_2 + np}{\sqrt{npq}} = \frac{850 - 1000 \cdot 0,8}{\sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{850 - 800}{\sqrt{1000 \cdot 0,16}} = \frac{50}{\sqrt{160}} = \frac{50}{4\sqrt{10}} = \frac{25}{2\sqrt{10}} \approx 3,96.$$

$$P(700 < m < 850) \approx \frac{1}{2}[\Phi(3,96) - \Phi(-3,96)] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Phi(3,96) = \Phi(3,96) = 0,9999.$$

Акнун яке аз натиҷаҳои дар амалия васеъ татбиқшавандаи ин теоремаро меоварем. Агар шартҳои теорема ҷой дошта бошанд, он гоҳ барои ҳаргуна адади $\varepsilon > 0$, дар вақти зиёд будани миқдори санҷишҳо n, баробарии тақрибии зерин ҷой дорад:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (3.6)$$

Дар ҳақиқат, нобаробарии $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ ба нобаробарии $np-n\varepsilon<m<np+n\varepsilon$ баробарқувва мебошад. Бинобар ин формулаи (3.4) –ро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=P(np-n\varepsilon<m<np+n\varepsilon)\approx\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{np+n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{np-n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)=\frac{1}{2}\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Мисоли 3. Эҳтимолияти сабзидани ҳар як тухми лӯбиё ба 0,95 баробар аст. 300 дона лӯбиё шинонида шуд. Сарҳади бузургии мутлақи дуршавии зуди нисбии тухмиҳои сабзидаро аз эҳтимолияти онҳо $p=0{,}95$ ёбед, агар ин сарҳад бо эҳтимолияти $\alpha=0{,}995$ кафолат дода шуда бошад.

Ҳал. Аз формулаи тақрибии (3.6) истифода мебарем. Барои мисоли мо $p=0{,}95$, $q=0{,}05$, $n=300$, $\alpha=0{,}995$ буда, ε -ро бояд ёбем. Аз ин ҷо

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{300}{0{,}0475}}\right)=0{,}995,\ \varepsilon\sqrt{\frac{300}{0{,}0475}}=2{,}81,$$

$$79{,}472\varepsilon=2{,}81;\ \varepsilon=\frac{2{,}81}{79{,}472}=0{,}035.$$

Мисоли 4. Аз конвейер ба ҳисоби миёна 80% маҳсулоти навъи аъло мебарояд. Чӣ қадар маҳсулот бояд гирифта шавад, ки бо эҳтимолияти 0,95 дуршавии зуди нисбии маҳсулоти навъи аъло аз 0,8, на зиёдтар аз 0,001 бошад.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $p = 0,8;\ q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2;\ \varepsilon = 0,001,\ \alpha = 0,95$. Аз баробарии

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 0,95$$

адади n-ро меёбем. Аз ҷадвали қиматҳои функсияи $\Phi(t)$ ҳосил мекунем:

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 1,96, \quad 0,001\sqrt{\frac{n}{0,8\cdot 0,2}} = 1,96, \quad \sqrt{\frac{n}{0,16}} = 1960,$$

$$\frac{\sqrt{n}}{0,4} = 1960,\ \sqrt{n} = 784,\ n = 784^2 = 614656.$$

Ҷавоб: 614651.

Мисоли 5. Дар ҳар яке аз 100 санҷишҳои новобаста ҳодисаи A бо эҳтимолияти доимии 0,8 рӯй медиҳад. Бигузор, m - шумораи рӯйдиҳии ҳодисаи A дар ин санҷишҳо бошад. Эҳтимолияти онро, ки қимати мутлақи фарқи зудии нисбӣ ва эҳтимолияти ҳодисаи A аз 0,01 кам мешавад, ҳисоб кунед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $n = 100;\ p = 0,8;\ q = 0,2;\ \varepsilon = 0,01$. Аз формулаи (3.6) истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$P\left(\left|\frac{m}{100} - 0,8\right| < 0,01\right) \approx \Phi\left(0,01\sqrt{\frac{100}{0,8\cdot 0,2}}\right) = \Phi(0,25) = 0,1974.$$

Дар ин боб мо схемаи санҷишҳои Бернуллиро дида баромадем, ки дар он натиҷаҳои ҳар як санҷиш аз ду ҳодисаҳои наҳамҷояи A ва $\overline{A}$ иборат мебошанд. Дар ҳолати умумӣ натиҷаи ҳар як санҷиш метавонад аз $k(k \geq 2)$ ҳодисаҳои ноҳамҷояи $A_1, A_2, ..., A_k$ иборат бошад. Фарз мекунем, ки ин ҳодисаҳо мувофиқан бо эҳтимолиятҳои доимӣ $p_1, p_2, ..., p_k$ рӯй диҳанд $\left(0 \leq p_i \leq 1,\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1\right)$. Он гоҳ эҳтимолияти он, ки дар n санҷишҳо ҳодисаи A_1 расо m_1

маротиба, ҳодисаи A_2 расо m_2 ва ҳоказо ҳодисаи A_k расо m_k маротиба рӯй медиҳад $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i = n\right)$ бо формулаи

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$$

ҳисоб карда мешавад.

§5. ЗАНҶИРИ МАРКОВ

Занҷири Марков ҳолати умумикардашудаи схемаи санҷишҳои такрории новобаста буда, бори аввал аз тарафи математики машҳури рус А.А. Марков ба таври системавӣ омӯхта шудааст. Ҳоло бо элементҳои ин назария шинос мешавем.

Фарз мекунем, ки санҷишҳои пай дар пай гузаронида шуда истодааст ва дар ҳар яки онҳо фақат ва фақат яке аз k ҳодисаҳои ноҳамҷояи $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, ..., A_k^{(s)}$ ба амал омада метавонад(индекси болоӣ рақами санҷишро ифода мекунад).

Таъриф. Пайдарпаии санҷишҳо занҷири Марков номида мешавад, агар эҳтимолияти шартии дар санҷиши $(s+1)$-ум рӯйдиҳии ҳодисаи $A_i^{(s+1)} (i = 1,2,...,k)$ ба шарте, ки дар санҷиши s-ум ҳодисаи ба мо маълум рӯй додааст, танҳо аз ҳодисаи дар ин санҷиши s-ум баамаломада вобаста буда, аз ҳодисаҳои дар санҷишҳои нисбатан пештара рӯйдода вобаста набошад.

Дар бисёр ҳолатҳо назарияи занҷири Марков бо мафҳумҳои физикӣ чунин маънидод карда мешавад: системаи физикии S-ро дида мебароем, ки он дар ҳар як лаҳзаи вақт метавонад дар яке аз ҳолатҳои $A_1, A_2, ..., A_k$ бошад ва ҳолати худро танҳо дар лаҳзаҳои вақти $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ дигар менамояд. Барои занҷири Марков эҳтимолияти гузариш ба ягон ҳолати $A_i (i = 1,2,...,k)$ дар лаҳзаи вакти $\tau(t_s < \tau < t_{s+1})$ танҳо аз ҳолати система дар лаҳзаи вакти $t(t_{s-1} < t < t_s)$ вобаста буда, аз ҳолати система дар лаҳзаҳои пештараи вакт вобаста намебошад.

Ҳоло, ҳолати оддитаринро барои занҷири якҷинсаи Марков дида мебароем, ки дар он эҳтимолияти шартии баамалоии ҳодисаи $A_j^{(s+1)}$ дар санҷиши $(s+1)$-ум ба шарте, ки дар санҷиши s-ум ҳодисаи $A_i^{(s)}$ ба амал омадааст аз рақами санҷиш вобаста намебошад. Чунин эҳтимолиятҳоро мо *эҳтимолиятҳои гузариш* меномем ва бо p_{ij} ишора менамоем. Дар ин ишора индекси якум ҳама вақт натиҷаи санҷиши пештараро ифода намояд, индекси дуюм дар лаҳзаи ояндаи вақт ба кадом ҳолат гузаштани системаро нишон медиҳад.

Дар ин ҳолат вазъи пурраи эҳтимолии тағйирёбиҳои имконпазири система, ки ҳангоми гузариш аз як санҷиш ба санҷиши дигар ба амал меояд, бо матритсаи

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

дода мешавад. Маълум ки элементҳои ин матритса эҳтимолиятҳои гузариши системаро аз як ҳолат ба ҳолати дигар ифода менамоянд. Бо ин сабаб, ин матритсаро *матритсаи гузариш* меноманд.

Элементҳои ин матритса бояд шартҳои зеринро қонеъ намоянд:

1. Пеш аз ҳама онҳо ҳамчун эҳтимолиятҳо бояд ғайриманфӣ бошанд, яъне барои ҳар гуна i ва j

$$0 \le p_{ij} \le 1.$$

2. Азбаски ҳангоми гузариш аз ҳолати $A_i^{(s)}$ дар санҷиши s -ум, система фақат ва фақат ба яке аз ҳолатҳои

$A_j^{(s+1)}(j=1,2,...,k)$ дар санҷиши $(s+1)$-ум мегузарад, пас баробарии зерин ҷой дорад:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \qquad (i=1,2,...,k)$$

Ҳамин тавр, суммаи элементҳои ҳар як сатри матритсаи гузариш ба 1 баробар аст.

Масъалаи аввалине, ки дар назарияи занҷири Марков дида мебароянд, чунин аст: *эҳтимолияти гузариши система аз ҳолати $A_i^{(s)}$ дар санҷиши s-ум ба ҳолати $A_j^{(s+n)}$ пас аз n санҷиш муайян карда шавад.* Ин эҳтимолиятро бо $P_{ij}(n)$ ишора мекунем. Барои муайян кардани ин эҳтимолият яке аз санҷишҳои мобайниро бо рақами $s+m$ $(m<n)$ дида мебароем. Маълум, ки дар ин санҷиш яке аз ҳодисаҳои имконпазири $A_z^{(s+m)}(1 \le z \le k)$ ба амал меояд. Эҳтимолияти чунин гузариш, мувофиқи ишораи дохилкардаамон ба $P_{iz}(m)$ баробар аст. Эҳтимолияти гузариш аз ҳолати $A_z^{(s+m)}$ ба ҳолати $A_j^{(s+n)}$ бошад ба $P_{zj}(n-m)$ баробар аст. Дар ин ҳолат, мувофиқи формулаи эҳтимолияти пурра ҳосил мекунем:

$$P_{ij}(n) = \sum_{z=1}^{k} P_{iz}(m) \cdot P_{zj}(n-m) \qquad (3.7)$$

Акнун бо π_n матритсаи гузаришро пас аз n санҷиш ишора намуда, ҳосил мекунем:

$$\pi_n = \begin{pmatrix} P_{11}(n) & P_{12}(n) & ... & P_{1k}(n) \\ P_{21}(n) & P_{22}(n) & ... & P_{2k}(n) \\ ..... & ...... & ... & ..... \\ P_{k1}(n) & P_{k2}(n) & ... & P_{kk}(n) \end{pmatrix}.$$

Мувофиқи формулаи (3.7) байни матритсаҳои гузариш бо индексҳои гуногун $\pi_s (0<s<n)$ таносуби зерин ҷой дорад:

$$\pi_n = \pi_m \cdot \pi_{n-m}, \quad (0<m<n).$$

Дар ҳолати хусусӣ, ҳангоми $n=2$:

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \pi_1 = \pi_1^2;$$

ҳангоми $n = 3$:

$$\pi_3 = \pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_1 \cdot \pi_1^2 = \pi_1^3;$$

ва умуман барои ҳар гуна n:

$$\pi_n = \pi_1^n$$

Ҳолати хусусии формулаи (3.7)-ро ҳангоми $m = 1$ будан низ қайд менамоем:

$$P_{ij}(n) = \sum_{z=1}^{k} p_{iz} \cdot P_{zj}(n-1).$$

Инчунин теоремаи зеринро дар бораи эҳтимолиятҳои ҳудудӣ бе исбот меоварем.

Теорема. Агар барои ягон рақами $s > 0$ ҳамаи элементҳои матритсаи гузариши π_s мусбат бошанд, он гоҳ чунин ададҳои доимии p_j $(j = 1,2,...,k)$ вуҷуд доранд, ки новобаста аз индекси i баробарии зерин ҷой дорад:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = p_j.$$

Ҳамин тавр, бузургии p_j -ро ҳамчун эҳтимолияти ба амал омадани ҳодисаи $A_j^{(n)}$ дар санҷиши n-ум, ҳангоми ниҳоят калон будани n фаҳмидан мумкин аст.

Маънои физикии ин теорема чунин аст: *эҳтимолияти он ки система дар ҳолати A_j ҷойгир аст аз он ки дар гузаштаи дур он дар кадом ҳолат буд, ба таври амалӣ, вобаста намебошад.*

Мисол. Дар бисёр масъалаҳои амалӣ донистани солҳои камобӣ ва серобии дарёҳо лозим меояд. Албатта такроршавии солҳои камобӣ ва серобӣ аниқ намебошанд. Барои муайян намудани такроршавии (гузариши) солҳои гуногунобии дарёҳо, шартан микдори оби дарёҳоро дар солҳои гуногун ба 4 намуд (ҳолат) ҷудо мекунем:

1-микдори камтарини об (s_1), 2-микдори нисбат ба ҳолати 1-ум зиёдтар (s_2), 3-микдори нисбат ба ҳолати 2-юм зиёдтар (s_3) ва 4-микдори зиёдтарини об (s_4).

Фарз мекунем, ки дар натиҷаи мушоҳидаҳои бисёрсола матритсаи гузариши зерин ҳосил карда шудааст:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Вакти миёнаи такроршавии солҳои камобӣ ва серобии дарёҳоро муайян мекунем.

Ҳал. Эҳтимолиятҳои ҳудудиро аз шарти $\overline{p} = \overline{p} \cdot \pi_1$

муайян мекунем, ки дар ин ҷо $\overline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ буда, $p_i\,(i = 1,2,3,4)$

эҳтимолияти дар ҳолати i-ум ҷойгир будани система мебошад. Ин шартро дар намуди системаи муодилаҳо менависем:

$$\begin{cases} p_1 = p_1 \cdot p_{11} + p_2 \cdot p_{21} + p_3 \cdot p_{31} + p_4 \cdot p_{41} \\ p_2 = p_1 \cdot p_{12} + p_2 \cdot p_{22} + p_3 \cdot p_{32} + p_4 \cdot p_{42} \\ p_3 = p_1 \cdot p_{13} + p_2 \cdot p_{23} + p_3 \cdot p_{33} + p_4 \cdot p_{43} \\ p_4 = p_1 \cdot p_{14} + p_2 \cdot p_{24} + p_3 \cdot p_{34} + p_4 \cdot p_{44} \end{cases}$$

Ҳамин тавр,

$$\begin{cases} p_1 = 0,2p_1 + 0,2p_2 + 0,1p_3, \\ p_2 = 0,4p_1 + 0,4p_2 + 0,4p_3 + 0,4p_4, \\ p_3 = 0,4p_1 + 0,3p_2 + 0,4p_3 + 0,5p_4, \\ p_4 = 0,1p_2 + 0,1p_3 + 0,1p_4. \end{cases}$$

ё

$$\begin{cases} -0{,}8p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}1p_3 = 0, \\ 0{,}4p_1 - 0{,}6p_2 + 0{,}4p_3 + 0{,}4p_4 = 0, \\ 0{,}4p_1 + 0{,}3p_2 - 0{,}6p_3 + 0{,}5p_4 = 0, \\ 0{,}1p_2 + 0{,}1p_3 - 0{,}9p_4 = 0. \end{cases}$$

Системаи якҷинсаи муодилаҳои алгебравии хаттии ҳосилшударо бо усули Гаусс ҳал намуда, шарти $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$-ро ба назар гирифта, ҳосил мекунем:

$$p_1 = \frac{65}{445};\ \ p_2 = \frac{178}{445};\ p_3 = \frac{164}{445};\ p_4 = \frac{38}{445}.$$

Давраи баргаштан ба ҳолати s_i ба $\frac{1}{p_i}$ баробар аст. Эҳтимолиятҳои ҳудудии солҳои камобӣ ва серобии дарёҳо мувофиқан ба $p_1 = \frac{65}{445} \approx 0{,}15$ ва $p_4 = \frac{38}{445} \approx 0{,}08$ баробар аст.

Бинобар ин, ба ҳисоби миёна, даври такроршавӣ барои солҳои камобӣ 6-7 сол буда, барои солҳои серобӣ 12-13 сол мебошад.

§6. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Эҳтимолияти рӯй додани ходисаи A дар ҳар як санҷиши новобаста ба 0,4 баробар аст. 8 маротиба санҷиш гузаронида мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳодисаи A расо 3 маротиба рӯй медиҳад: **Ҷавоб:** 0,28.

Масъалаи 2. Аз 10 билет фақат дутояш бурднок аст. Ихтиёрӣ 5 билет гирифта мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки аз ин 5 билет фақат яктояш бурднок аст.

Ҷавоб: 0,41.

Масъалаи 3. Дар тӯри барқӣ 10 лампочкаҳо пайваст карда шудаанд. Эҳтимолияти дар муддати вақти T аз кор баромадани ҳар як лампочка ба 0,3 баробар аст. Адади эхтимолноктарини лампочкаҳои дар муддати вақти T аз кор баромадаро муайян кунед. **Ҷавоб: 3.**

Масъалаи 4. Сад маҳсулот новобаста аз якдигар истеҳсол карда мешаванд. Эҳтимолияти истеҳсол шудани маҳсулоти нуқсондор ба 0,02 баробар аст. Эҳтимолиятҳои рӯй додани ҳодисаҳои зеринро муайян кунед:

а) се маҳсулоти аввалини истеҳсолшуда нуқсондор мебароянд;

б) шумораи маҳсулотҳои нуқсондор аз 3 зиёд намешавад.

Масъалаи 5. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳодисаи A дар 2400 озмоиши новобаста расо 1400 маротиба рӯй медиҳад, агар эҳтимолияти рӯйдиҳии ин ҳодиса дар ҳар як санҷиш ба 0,6 баробар бошад. **Ҷавоб:** 0,0041.

Масъалаи 6. 2300 озмоиш гузаронида мешавад, ки эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A дар ҳар яки онҳо ба 0,8 баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳодисаи A на камтар аз 1800 маротиба рӯй медиҳад. **Ҷавоб:** 0,8973.

Масъалаи 7. Боғбон дар як фасли сол 100 дарахтро пайванд мекунад. Ба ҳисоби миёна 50% ин пайвандҳо месабзанд. Эҳтимолиятҳои руй додани ҳодисаҳои зеринро муайян кунед:

а) расо 78 пайванд месабзад;

б) аз 77 то 84 пайванд месабзад.

Масъалаи 8. Матритсаи гузариши система аз як ҳолат ба ҳолати дигар дода шудааст:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Эҳтимолиятҳои ҳолатҳои ҳудудии системаро муайян кунед.

Ҷавоб: $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.

БОБИ IV. БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФӢ ВА ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ ОНҲО

§1. МАФҲУМИ БУЗУРГИИ ТАСОДУФӢ

Дар амалия бузургиҳое дучор меоянд, ки маҷмӯи қиматҳои имконпазири онҳо маълуманд, вале маълум нест, ки дар натиҷаи санҷиш ин бузургӣ кадом қиматашро қабул мекунад. Масалан, 1) шумораи донишҷӯёни факулта, ки имтиҳонҳои сессияи зимистонаро бомуваффақият месупоранд; 2) ҳарорати ҳаво дар шаҳри Душанбе соати 12^{00}-и рӯзи оянда.

Омӯхтани ин қабил ҳодисаҳо моро ба яке аз мафҳумҳои асосии назарияи эҳтимолият - мафҳуми бузургии тасодуфӣ меорад, ки он ба таври зайл таъриф дода мешавад: *бузургии тағйирёбандаи* X *- ро бузургии тасодуфӣ меноманд, агар он дар натиҷаи озмоиш тасодуфан як қиматро аз маҷмӯи қиматҳои имконпазираш қабул намояд, яъне пеш аз санҷиш маълум нест, ки бузургии тасодуфӣ кадоме аз қиматҳои имконпазири худро қабул менамояд.*

Бузургии тасодуфиро бо ҳарфҳои калони ҳуруфоти лотинӣ (X, Y, Z,...) ва қиматҳои онҳоро бо ҳарфҳои хурди мувофиқ, ки дорои индекси поёнианд (x_i, y_i, z_i,...), ишора менамоем.

Бузургии тасодуфиро *дискретӣ* меноманд, агар ҳамаи қиматҳои имконпазираш аз ҳамдигар ҷудо-ҷудо ҷойгир бошанд.

Маҷмӯи қиматҳои *бузургии тасодуфии дискретӣ* маҷмӯи шумораи элементҳояш охирнок ё ҳисобӣ мебошад(хотиррасон менамоем, ки маҷмӯи ададиро *ҳисобӣ* меноманд, агар байни элементҳои он ва маҷмӯи ададҳои натуралӣ N мувофиқгузории яккимата мавҷуд бошад). Масалан, ҳангоми як маротиба партофтани шашхол шумораи холҳои рӯяи болоии он аз маҷмӯи $\{1,2,3,4,5,6\}$ қимат қабул мекунад, яъне он бузургии тасодуфии дискретӣ аст.

Бузургии тасодуфии X- ро *бефосила* меноманд, агар он ҳамаи қиматҳои ягон фосиларо қабул карда тавонад (таърифи қатъии бузургии тасодуфии бефосила дар оянда бо мафҳуми функсияи тақсимоти бузургии тасодуфӣ дода мешавад). Масалан, ҳарорати ҳаво T бузургии тасодуфии бефосила аст.

Барои тавсифи пурраи бузургии тасодуфӣ донистани фақат маҷмӯи қиматҳои имконпазири он кифоя нест. Бузургии тасодуфӣ тавассути маҷмӯи ҳамаи қиматҳои имконпазираш ва бо эҳтимолиятҳои он, ки ин қиматҳоро қабул мекунад, пурра тавсиф мешавад. Маҷмӯи ҳамаи қиматҳои имконпазир ва эҳтимолиятҳои ба онҳо мувофиқро *қонуни тақсимоти бузургии тасодуфӣ* меноманд.

Таърифи яке аз мафҳумҳои асосии ин боб-новобастагии бузургиҳои тасодуфиро, дар асоси таърифи новобастагии ҳодисаҳо меорем. Бигузор, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфии X ва $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфии Y бошанд.

Таъриф. Бузургиҳои тасодуфии X ва Y новобаста номида мешаванд, агар барои ҳаргуна i ва j ҳодисаҳои $\{X = x_i\}$ ва $\{Y = y_j\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ новобаста бошанд.

§2. ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ БУЗУРГИИ ТАСОДУФИИ ДИСКРЕТӢ

Бигузор, маҷмӯи ҳамаи қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфии X: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ бо эҳтимолияташон $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ маълум бошанд. Бузургии тасодуфии X дар ҳар як санҷиш фақат як қиматро аз байни n қиматҳои имконпазираш қабул мекунад, яъне дар натиҷаи санҷиш ҳатман яке аз ҳодисаҳои байни ҳам ҷуфт-ҷуфт ноҳамҷояи $X = x_i$, $i = \overline{1,n}$ рӯй медиҳад. Бинобар ин суммаи эҳтимолиятҳои ин ҳодисаҳо ба 1 баробар аст:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дискретӣ одатан бо ёрии формулаи

$$P(X = x_i) = p_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$$

ё ҷадвали

Ҷадвали 1

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

дода мешавад.

Агар маҷмӯи қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфӣ маҷмӯи ҳисобиро ташкил диҳад, пас қонуни тақсимоти он намуди зеринро дорад:

Ҷадвали 2

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n	...

ки дар ин ҷо $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ аст.

Мисол. Танга 6 маротиба партофта мешавад. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии X - шумораи пайдошавии рӯяи рақамдорро тартиб диҳед.

Ҳал. Аён аст, ки бузургии тасодуфии X қиматҳои 0, 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 – ро қабул карда метавонад. Эҳтимолияти қабули ин қиматҳоро бо формулаи Бернулли ҳисоб мекунем: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $p = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$.

$$P_6(0)=C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}.$$

$$P_6(1)=C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{6}{2^6}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}.$$

$$P_6(2)=C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{15}{2^6}=\frac{15}{64}.$$

$$P_6(3)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{15}{2^6}=\frac{20}{2^6}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}.$$

$$P_6(4)=C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{15}{2^6}=\frac{15}{64}.$$

$$P_6(5)=C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{6}{2^6}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}.$$

$$P_6(6)=C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{6!}{6!\cdot 0!}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}.$$

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

Иҷрошавии баробарии назоратиро месанҷем:

$$\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}+\frac{20}{64}+\frac{15}{64}+\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{1+6+15+20+15+6+1}{64}=\frac{64}{64}=1.$$

§3. ИНТИЗОРИЯТИ МАТЕМАТИКИИ БУЗУРГИИ ТАСОДУФИИ ДИСКРЕТӢ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

Бигузор, бузургии тасодуфии дискретии X шумораи охирноки қиматҳоро қабул намояд.

Таъриф. *Интизорияти математикии* бузургии тасодуфии X гуфта, суммаи ҳосили зарби қиматҳои он $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ - ро ба эҳтимолиятҳои онҳо $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ меноманд ва бо $M(X)$ ишора менамоянд:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i. \quad (4.1)$$

Агар бузургии тасодуфии дискретии X шумораи беохири қиматҳоро қабул намояд, он гоҳ интизорияти математикии ин бузургии тасодуфӣ $M(X)$ тавассути баробарии

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \qquad (4.2)$$

муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо қатори $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ мутлақ наздикшаванда мебошад.

Эзоҳ. Аз баробариҳои (4.1) ва (4.2) дида мешавад, ки интизорияти математикии бузургии тасодуфӣ адади доимӣ аст: $M(X) = const$. Умуман, дар маҷмӯи қиматҳои бузургии тасодуфии X, қиматҳои аз $M(X)$ хурд ва ҳам калон дучор мешаванд. Бинобар ин, интизорияти математикиро *маркази тақсимоти бузургии тасодуфӣ* низ меноманд.

Интизорияти математикии бузургии тасодуфӣ дорои хосиятҳои зерин аст:

1) Агар n ва m мувофиқан қимати калонтарин ва хурдтарини бузургии тасодуфии X бошанд, он гоҳ барои интизорияти математикии он $M(X)$ нобаробариҳои

$m < M(X) < n$ ҷой доранд.

2) Интизорияти математикии бузургии доимӣ ба худи ин доимӣ баробар аст: $M(C) = C$. Дар ҳақиқат, қонуни тақсимоти ин бузургӣ намуди

X	C
P	1

-ро дорад. Мувофиқи таъриф, $M(X) = M(C) = C \cdot 1 = C$ аст.

3) Зарбшавандаи доимиро аз таҳти аломати интизорияти математикӣ баровардан мумкин аст: $M(k \cdot X) = k \cdot M(X)$, $k = const$. Дар ҳақиқат, агар қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии X бо ҷадвали 1 дода шавад, пас қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии $k \cdot X$ бо ҷадвали

Ҷадвали 3

$k \cdot X$	kx_1	kx_2	kx_3	$\dots$	kx_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

дода мешавад. Мувофиқи таърифи интизорияти математикӣ (баробарии (4.1)) аз ҷадвали 3 ҳосил мекунем:

$$M(kx) = kx_1 p_1 + kx_2 p_2 + \cdots + kx_n p_n =$$
$$= k(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) = kM(X).$$

4) Интизорияти математикии суммаи миқдори охирноки бузургиҳои тасодуфӣ ба суммаи интизорияти математикии ҳар яки онҳо баробар аст:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_N).$$

5) Интизорияти математикии фарқи бузургиҳои тасодуфии X ва Y ба фарқи интизорияти математикии онҳо баробар аст:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y).$$

Дар ҳақиқат, дар асоси хосиятҳои 3 ва 4 ҳосил мекунем:

$$M(X - Y) = M[X + ((-1)Y)] = M(X) + M((-1)Y) =$$
$$= M(X) + (-1)M(Y) = M(X) - M(Y).$$

6) Интизорияти математикии ҳосили зарби бузургиҳои тасодуфии новобастаи X ва Y ба ҳосили зарби интизориятҳои математикии онҳо баробар аст:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Ин хосият барои N бузургиҳои тасодуфии новобастаи X_i, $i = \overline{1, N}$ низ ҷой дорад:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_N) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_N).$$

7) Фарқи $X - M(X)$ - ро дуршавии бузургии тасодуфии X аз интизорияти математикии он $M(X)$ меноманд. Дар навбати худ ин фарқият низ бузургии тасодуфӣ буда,

интизорияти математикии он ба сифр баробар аст. Дар ҳақиқат, мувофиқи хосиятҳои 2-5 ҳосил мекунем:

$$M[X-M(X)]=M(X)-M[M(X)]=M(X)-M(X)M(1)=M(X)-M(X)=0.$$

8) Интизорияти математикии бузургии тасодуфӣ тақрибан ба миёнаи арифметикии ҳамаи қиматҳои имконпазири он баробар аст. Бинобар ин, интизорияти математикии бузургии тасодуфиро *қимати миёнаи* он низ меноманд.

Дар ҳақиқат, фарз мекунем, ки N санҷишҳои новобаста гузаронида шудааст ва бузургии тасодуфии X қиматҳои $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ - ро мувофиқан бо зудиҳои $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ қабул менамояд. Он гоҳ, суммаи ҳамаи қиматҳои қабулкардаи ин бузургии тасодуфӣ ба $x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_nm_n$ баробар аст. Ин баробариро ба шумораи умумии қиматҳои бузургии тасодуфӣ N тақсим намуда, қимати миёнаи ҳамаи қиматҳои бузургии тасодуфии X - ро ҳосил мекунем:

$$a = x_1 \frac{m_1}{N} + x_2 \frac{m_2}{N} + ... + x_n \frac{m_n}{N}. \tag{4.3}$$

Азбаски қимати зудиҳои нисбӣ $\frac{m_k}{N} = \omega_k$, $k = \overline{1, n}$ дар мавриди кифоя зиёд будани шумораи санҷишҳо N тақрибан ба эҳтимолиятҳои p_k баробаранд, $\omega_k \approx p_k$, $k = \overline{1, n}$ (нигаред ба таърифи омории эҳтимолият), пас аз баробарии (4.3) тасдиқоти матлубро ҳосил мекунем:

$$a = x_1 \frac{m_1}{N} + x_2 \frac{m_2}{N} + ... + x_n \frac{m_n}{N} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n =$$
$$= M(X), \ M(X) \approx a.$$

Мисоли 1. Бузургии тасодуфии X тавассути ҷадвали зерин дода шудааст:

X	-2	0	3	3,5	5
P	0,2	0,15	0,1	0,3	0,25

Интизорияти математикии онро ёбед.

Ҳал. Бо формулаи (4.1) меёбем:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5=-2\cdot0{,}2+0\cdot0{,}15+3\cdot0{,}1+$$
$$+3{,}5\cdot0{,}3+5\cdot0{,}25=-0{,}4+0+0{,}3+1{,}75+1{,}25=2{,}9.$$

Мисоли 2. Қонунҳои тақсимоти бузургиҳои тасодуфии новобастаи X ва Y дода шудаанд:

X	-2	0	1
P	0,2	0,5	0,3

Y	1	2	3
p	0,3	0,4	0,3

Қонунҳои тақсимоти бузургиҳои тасодуфии $X+Y$, $X-Y$ ва $X\cdot Y$ -ро тартиб дода дурустии баробариҳои $M(X+Y)=M(X)+M(Y), M(X-Y)=M(X)-M(Y), M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$ -ро санҷед.

Ҳал.

Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии $X+Y$ -ро тартиб медиҳем. Азбаски

$$P(X+Y=x_i+y_i)=P(X=x_i,\,Y=y_i)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_i)$$

аст, пас ҷадвали тақсимоти $X+Y$ чунин намуд дорад:

$X+Y$	-1	0	1	1	2	3	2	3	4
P	0,06	0,08	0,06	0,15	0,2	0,15	0,09	0,12	0,09

Қиматҳоеро, ки такрор мешаванд як маротиба навишта, эҳтимолиятҳои онҳоро ҷамъ мекунем:

$X+Y$	-1	0	1	2	3	4
p	0,06	0,08	0,21	0,29	0,27	0,09

Интизорияти математикии бузургии тасодуфии $X+Y$-ро ҳисоб мекунем:

$$M(X+Y)=-1\cdot 0{,}06+0\cdot 0{,}08+1\cdot 0{,}21+2\cdot 0{,}29+3\cdot 0{,}27+4\cdot 0{,}09=$$
$$=-0{,}06+0{,}21+0{,}58+0{,}81+0{,}36=1{,}9.$$

Акнун қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии $X-Y$-ро тартиб медиҳем:

$X-Y$	- 3	- 4	- 5	- 1	- 2	- 3	0	- 1	- 2
P	0,06	0,08	0,06	0,15	0,2	0,15	0,09	0,12	0,09

Қиматҳоеро, ки такрор мешаванд як маротиба навишта, эҳтимолиятҳои онҳоро ҷамъ мекунем:

$X-Y$	-5	-4	-3	-2	-1	0
P	0,06	0,08	0,21	0,29	0,27	0,09

Интизорияти математикии бузургии тасодуфии $X-Y$ -ро ҳисоб мекунем:

$$M(X-Y)=-5\cdot 0{,}06-4\cdot 0{,}08-3\cdot 0{,}21-2\cdot 0{,}29-1\cdot 0{,}27+0\cdot 0{,}09=$$
$$=-0{,}3-0{,}32-0{,}63-0{,}58-0{,}27=-2{,}1.$$

Акнун қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии $X\cdot Y$-ро тартиб медиҳем:

$X\cdot Y$	- 2	- 4	- 6	0	0	0	1	2	3
P	0,06	0,08	0,06	0,15	0,2	0,15	0,09	0,12	0,09

Қиматҳоеро, ки такрор мешаванд як маротиба навишта, эҳтимолиятҳои онҳоро ҷамъ мекунем:

$X\cdot Y$	- 6	- 4	- 2	0	1	2	3
P	0,06	0,08	0,06	0,5	0,09	0,12	0,09

Интизорияти математикии бузургии тасодуфии $X\cdot Y$-ро ҳисоб мекунем:

$$M(X\cdot Y)=-6\cdot 0{,}06-4\cdot 0{,}08-2\cdot 0{,}06+0\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}09+2\cdot 0{,}12+3\cdot 0{,}09=$$
$$=-0{,}36-0{,}32-0{,}12+0+0{,}09+0{,}24+0{,}27=0{,}6-0{,}8=-0{,}2.$$

Интизорияти математикии бузургиҳои тасодуфии X ва Y -ро ҳисоб карда, иҷрошавии хосиятҳоро месанҷем:

$$M(X)=-2\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}3=-0{,}4+0{,}3=-0{,}1.$$

$$M(Y)=1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}3=0{,}3+0{,}8+0{,}9=2.$$

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=-0{,}1+2=1{,}9;$$

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y)=-0{,}1-2=-2{,}1;$$

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)=-0{,}1\cdot 2=-0{,}2.$$

§4. ФУНКСИЯИ ТАҚСИМОТИ БУЗУРГИИ ТАСОДУФӢ

Барои бузургии тасодуфии бефосила навиштани ҷадвали тақсимот имконнопазир аст. Бинобар ин барои бузургиҳои тасодуфӣ мафҳуми *функсияи тақсимот* дохил карда шудааст.

Таърифи 1. *Функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии* X гуфта, функсияи

$$F(x)=P(X<x)$$

-ро меноманд, ки дар ин ҷо $P(X<x)$ эҳтимолияти қимати аз x хурдро қабул намудани бузургии тасодуфии X аст. Аз нуқтаи назари геометрӣ $F(x)$ эҳтимолияти он аст, ки бузургии тасодуфии X қиматҳои дар тири ададӣ аз тарафи чапи нуқтаи x ҷойгиршударо қабул менамояд..

Эзоҳ. Функсияи тақсимотро *функсияи интегралии тақсимот* ё *қонуни интегралии тақсимоти* бузургии тасодуфии X низ меноманд.

Таърифи 2. *Бузургии тасодуфии X - ро бефосила меноманд, агар функсияи тақсимоти он $F(x)=P(X<x)$ бефосила дифференсиронидашаванда бошад.*

Эҳтимолияти он, ки бузургии тасодуфии X аз нимитервали $[\alpha, \beta)$ қимат қабул мекунад, ба фарқи қиматҳои функсияи тақсимоти он дар охир ва аввали ин нимитервал баробар аст:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии X дорои хосиятҳои зерин аст:

1. Ҳамаи қиматҳои функсияи тақсимот $F(x)$ ба порчаи $[0, 1]$ мансубанд, яъне $0 \le F(x) \le 1$ аст.

Ин тасдиқот бевосита аз таърифи функсияи тақсимот ва хосиятҳои эҳтимолият бармеояд.

2. Функсияи тақсимот камнашаванда аст, яъне ҳангоми $x_1 < x_2$ будан, $F(x_1) \le F(x_2)$ аст.

3. Функсияи $F(x)$ дар нуқтаи x_0 аз чап бефосила аст, яъне $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$, $F(x_0 - 0) = F(x_0)$.

4. Агар ҳамаи қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфии X ба интервали (α, β) мансуб бошанд, он гоҳ

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ хангоми } & x \le \alpha, \\ 1, \text{ хангоми } & x > \beta. \end{cases}$$

5. Агар ҳамаи қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфии X ба фосилаи беохири $(-\infty, +\infty)$ мансуб бошанд, он гоҳ

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Агар X бузургии тасодуфии бефосила бошад, он гоҳ эҳтимолияти он, ки X қимати додашудаи α - ро қабул мекунад, ба сифр баробар аст: $P(X = \alpha) = 0$. Бинобар ин, баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha < X < \beta),$$

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Мисол. Кадоме аз функсияҳои

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } x\le 0 \quad \text{бошад,}\\ 0{,}25x^2, & \text{агар } 0<x\le 2 \quad \text{бошад,}\\ 1, & \text{агар } x>2 \quad \text{бошад;}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } x\le 0 \quad \text{бошад,}\\ x^3, & \text{агар } 0<x\le 2 \quad \text{бошад,}\\ 1, & \text{агар } x>2 \quad \text{бошад;}\end{cases}$$

ва $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$ функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии X мешавад?

Ҳал. Функсияи якум ҳамаи хосиятҳои функсияи тақсимотро қаноат мекунонад ва бинобар ин функсияи тақсимоти бузургии тасодуфӣ мешавад. Функсияи дуюм барои қиматҳои $1<x\le 2$ аз 1 калон мешавад. Функсияи сеюм дар соҳаи $(0,+\infty)$ камшаванда мебошад. Бинобар ин функсияҳои дуюм ва сеюм функсияҳои тақсимоти бузургии тасодуфӣ шуда наметавонанд.

Агар ҷадвали тақсимоти бузургии тасодуфии дискретӣ дода шуда бошад, он гоҳ функсияи тақсимоти онро муайян намудан мумкин аст.

Мисол. Бузургии тасодуфии X бо ҷадвали тақсимоти зерин дода шудааст:

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Функсияи тақсимоти X-ро муайян намуда, графики онро кашед.

Ҳал. 1) Агар $x\le 3$ бошад, он гоҳ $F(x)=0$, чунки мувофиқи ҷадвали тақсимоти додашуда, X қиматҳои аз $x_1=3$ хурдро надорад ва бинобар ин $\{X<x\}$ ҳодисаи ғимконнопазир мешавад: $F(x)=P(X<x)=0$.

2) Агар $3<x\le 4$ бошад, он гоҳ $F(x)=0{,}2$ мешавад. Дар ҳақиқат, дар ин ҳолат X метавонад танҳо қимати $x_1=3$-ро бо эҳтимолияти $p_1=0{,}2$ қабул намояд.

3) Агар $4 < x \leq 7$ бошад, он гоҳ $F(x) = 0{,}3$ мешавад, чунки дар ин ҳолат X метавонад қиматҳои $x_1 = 3$ ва $x_2 = 4$-ро мувофиқан бо эҳтимолиятҳои $p_1 = 0{,}2$ ва $p_2 = 0{,}1$ қабул намояд ва ҳодисаи $\{X < x\}$ ба суммаи ҳодисаҳои $\{X = 3\}$ ва $\{X = 4\}$ баробарқувва мешавад:

$$F(x) = P(X < x) = P\{X = 3\} + P\{X = 4\} = p_1 + p_2 = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$$

4) Агар $7 < x \leq 10$ бошад, он гоҳ ҳодисаи $\{X < x\}$ ба суммаи ҳодисаҳои $\{X = 3\}$, $\{X = 4\}$ ва $\{X = 7\}$ баробарқувва мешавад:

$$F(x) = P(X < x) = P\{X = 3\} + P\{X = 4\} + P\{X = 7\} =$$
$$= p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}7.$$

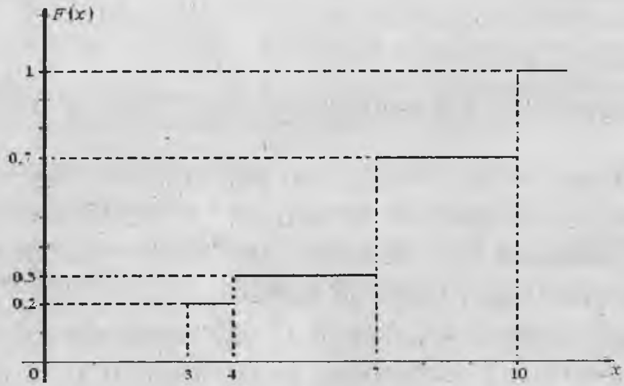
5) Агар $x > 10$ бошад, он гоҳ

$$F(x) = P(X < x) = P\{X = 3\} + P\{X = 4\} + P\{X = 7\} + P\{X = 10\} =$$
$$= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1.$$

Ҳамин тавр, функсияи тақсимоти матлуб намуди зеринро дорад:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{агар} \quad x \leq 3 \quad \text{бошад}, \\ 0{,}2 & \text{агар} \quad 3 < x \leq 4 \quad \text{бошад}, \\ 0{,}3 & \text{агар} \quad 4 < x \leq 7 \quad \text{бошад}, \\ 0{,}7 & \text{агар} \quad 7 < x \leq 10 \quad \text{бошад}, \\ 1 & \text{агар} \quad x > 10 \quad \text{бошад}. \end{cases}$$

Графики ин функсия дар расми 4.1 оварда шудааст.



Расм 4.1

Чӣ хеле, ки аз расм дида мешавад, графики функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии дискретии X дар нуқтаҳои $X = x_k$ каниши ҷинси якум дорад ва ҷаҳиши функсия дар ин нуқтаҳо ба p_k баробар аст.

§5. ЗИЧИИ ТАҚСИМОТИ ЭҲТИМОЛИЯТҲО

Бигузор, $F(x)$ функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии X бошад. Афзоиши функсияи $F(x)$ - ро дар нуқтаи x, ки ба афзоиши Δx - и аргумент мувофиқ аст, менависем:

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = P(x \le X < x + \Delta x). \qquad (4.4)$$

Ҳарду тарафи баробарии (4.4) –ро ба Δx тақсим карда, ҳудуди онро ҳангоми $\Delta x \to 0$ ҳисоб мекунем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

ё

$$f(x) = F'(x). \qquad (4.5)$$

Функсияи $f(x)$, ки тавассути баробарии (4.5) муайян карда мешавад, *зичии тақсимот* ё *функсияи дифференсиалии тақсимоти эҳтимолиятҳои бузургии тасодуфии* X ном дорад. Ҳамин тариқ, *зичии тақсимоти эҳтимолиятҳои бузургии тасодуфӣ* ба ҳосилаи функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии X баробар аст.

Графики зичии тақсимот $y = f(x)$ - ро *хати каҷи тақсимоти* эҳтимолиятҳои бузургии тасодуфии X меноманд.

Бо истифода аз мафҳуми зичии тақсимот бо осонӣ эҳтимолияти онро, ки бузургии тасодуфии X аз интервали (α, β) қимат қабул мекунад, ёфтан мумкин аст. Дар ҳақиқат, азбаски

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

аст ва функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ мебошад(нигаред ба баробарии (4.5)), пас мувофиқи формулаи Нютон–Лейбнитс баробарии охиронро ба намуди зерин менависем:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx .$$

Ҳамин тариқ, барои ҳисоб кардани эҳтимолияти $P(\alpha < X < \beta)$ баробарии зерин ҳосил шуд:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx .$$

Аз тарафи дагар $F(x) = P(-\infty < X < x)$ аст. Бинобар ин, дар асоси формулаи охирон барои функсияи тақсимот $F(x)$ ва зичии тақсимот $f(x)$ муносибати зерин ҷой дорад:

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt . \qquad (4.6)$$

Формулаҳои (4.5) ва (4.6) алоқаи байни функсияҳои тақсимот $F(x)$ ва зичии тақсимоти бузургии тасодуфӣ $f(x)$ - ро муайян менамоянд. Агар яке аз онҳо маълум бошад, пас тавассути ин формулаҳо дигараш ёфта мешавад.

Хосиятҳои зичии тақсимоти эҳтимолиятҳои бузургии тасодуфиро дида мебароем:

1. Зичии тақсимоти эҳтимолиятҳои бузургии тасодуфии X ғайриманфӣ аст, яъне $f(x) \geq 0$.

Дар ҳақиқат, азбаски $f(x) = F'(x)$ аст ва $F(x)$ функсияи камнашаванда мебошад, пас $F'(x) \geq 0$. Аз ин ҷо, $f(x) \geq 0$ мешавад.

2. Баробарии зерин ҷой дорад:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 .$$

Дар ҳақиқат, эҳтимолияти он, ки бузургии тасодуфии X аз фосилаи $(-\infty, +\infty)$ қимат қабул мекунад ҳодисаи эътиборнок аст, пас дар асоси баробарии (4.6) ҳосил мекунем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = F(+\infty) - F(-\infty) = P(-\infty < X < +\infty) = 1.$$

Агар ҳамаи қиматҳои бузургии тасодуфии X мансуб ба фосилаи (α, β) бошанд, он гоҳ ҳодиси $X \in (\alpha, \beta)$ эътиборнок аст. Бинобар ин, $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$ аст.

Мисол. Функсияи тақсимоти бузургии тасодуфӣ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{хангоми } x \le 0, \\ x^3, & \text{хангоми } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{хангоми } x > 1. \end{cases}$$

дода шуда аст. Зичии тақсимот $f(x)$ - ро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (4.5)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{хангоми } x \le 0, \\ 3x^2, & \text{хангоми } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{хангоми } x > 1. \end{cases}$$

Интизорияти математикии бузургии тасодуфии бефосилаи X, ки ҳамаи қиматҳои имконпазири он ба порчаи $[\alpha, \beta]$ мансубанд ва зичии тақсимоташ $f(x)$ аст, бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx. \qquad (4.7)$$

Бигузор, ҳамаи қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфии бефосилаи X ба фосилаи беохири $(-\infty, +\infty)$ шомил бошанд. Он гоҳ интизорияти математикии он бо формулаи

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

муайян карда мешавад, агар интеграли ғайрихоси дар тарафи рости ин баробарӣ истода мутлақ наздикшаванда бошад.

Хосиятҳои дар боло номбаршудаи интизорияти математикии бузургии тасодуфии дискретӣ барои бузургии тасодуфии бефосила низ ҷой доранд.

Мисолҳо. 1. Зичии тақсимоти бузургии тасодуфӣ ба

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{хангоми } x\le 0, \\ 2x, & \text{хангоми } 0<x<1, \\ 0, & \text{хангоми } x>1. \end{cases}$$

баробар аст. Интизорияти математикии бузургии тасодуфии X - ро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (4.7) ҳосил мекунем:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 2x dx=2\int_0^1 x^2 dx=2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}.$$

2. Функсияи тақсимоти бузургии тасодуфӣ

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{хангоми } x\le 0, \\ 0{,}25x^2, & \text{хангоми } 0<x\le 2, \\ 0, & \text{хангоми } x>2. \end{cases}$$

дода шуда аст. Интизорияти математикии бузургии тасодуфии X - ро ёбед.

Ҳал. Аввал зичии тақсимоти бузургии тасодуфиро меёбем:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & \text{хангоми } x\le 0, \\ 0{,}5x, & \text{хангоми } 0<x<2, \\ 0, & \text{хангоми } x>2. \end{cases}$$

Мувофиқи формулаи (4.7) ҳосил мекунем:

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot 0{,}5xdx=0{,}5\int_0^2 x^2dx=0{,}5\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

§6. ДИСПЕРСИЯИ БУЗУРГИИ ТАСОДУФӢ. ТАМОИЛИ МИЁНАИ КВАДРАТӢ. МОДА ВА МЕДИАНА

Таъриф. *Дисперсия ё пошхӯрии бузургии тасодуфии* X гуфта, интизорияти математикии квадрати дуршавии онро меноманд ва бо $D(X)$ ишора мекунанд. Мувофиқи таъриф

$$D(X)=M\left([X-M(X)]^2\right).$$

Дар амалия барои ҳисоб кардани дисперсияи бузургии тасодуфӣ бештар аз формулаи баробарқуввваи зерин истифода мебаранд:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2. \qquad (4.8)$$

Дар хақиқат,

$$D(X)=M\left[(X-M(X))^2\right]=M\left[X^2-2XM(X)+(M(X))^2\right]=M\left(X^2\right)-$$
$$-M(2X)\cdot M(X)+(M(X))^2=M\left(X^2\right)-2M(X)M(X)+(M(X))^2=$$
$$=M\left(X^2\right)-2(M(X))^2+(M(X))^2=M\left(X^2\right)-(M(X))^2.$$

Мисол. Дисперсияи бузургии тасодуфии X - ро, ки бо ҷадвали зерин дода шудааст ёбед:

X	-2	0	2	3
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Ҳал. Аз формулаи (4.8) истифода мекунем. Аввал $M(X)$ - ро меёбем:

$$M(X)=-2\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}3=-0{,}2+0+0{,}8+0{,}9=1{,}5.$$

Акнун интизорияти математикии квадрати ин бузургии тасодуфӣ $M\left(X^2\right)$ - ро меёбем. Барои ин қонуни тақсимоти бузургии X^2 - ро тартиб медиҳем:

X^2	4	0	4	9
P	0,1	0,2	0,4	0,3

$$M\left(X^2\right)=4\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}4+9\cdot 0{,}3=0{,}4+1{,}6+2{,}7=4{,}7.$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=4{,}7-1{,}5^2=4{,}7-2{,}25=2{,}45.$$

19. *Дисперсияи бузургии тасодуфӣ дорои хосиятҳои зерин аст:*

1. Дисперсияи бузургии тасодуфӣ ғайриманфӣ аст: $D(X)\geq 0$.

2. Дисперсияи бузургии доимӣ ба сифр баробар аст:

$$D(C)=0, \quad (C=const).$$

Дар ҳақиқат, азбаски $M(C)=C$ аст, пас мувофиқи таърифи дисперсия

$$D(C)=M\left[(C-M(C))^2\right]=M\left[(C-C)^2\right]=M(0)=0$$

мешавад.

3. Зарбшавандаи доимиро аз таҳти аломати дисперсия бо квадраташ баровардан мумкин аст:

$$D(k\cdot X)=k^2D(X), \qquad (k=const).$$

Дар ҳақиқат, мувофиқи таърифи дисперсия

$$D(kX)=M\left[(kX-M(kX))^2\right]=M\left[k^2(X-M(X))^2\right]=k^2M\left[(X-M(X))^2\right]=k^2D(X)$$

4. Дисперсияи суммаи ду бузургии тасодуфии новобаста ба суммаи дисперсияҳои онҳо баробар аст:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Дар ҳақиқат, мувофиқи таърифи дисперсия

$$\begin{aligned}D(X+Y)&=M[X+Y-M(X+Y)]^2=M\{[X-M(X)]+[Y-M(Y)]\}^2=\\&=M\{[X-M(X)]^2+[Y-M(Y)]^2+2[X-M(X)][Y-M(Y)]\}= \qquad (4.9)\\&=M[X-M(X)]^2+M[Y-M(Y)]^2+2M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\}.\end{aligned}$$

Азбаски бузургиҳои тасодуфии X ва Y новобастаанд, пас бузургиҳои $[X - M(X)]$ ва $[Y - M(Y)]$ низ новобаста мебошанд. Пас, мувофиқи хосияти 7 - уми интизорияти математикӣ

$$M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\} = M[X - M(X)]M[Y - M(Y)] = 0$$

аст ва аз баробарии (4.9) формулаи $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ ҳосил мешавад.

Ин хосият барои n ҷамъшавандаҳои новобаста низ ҷой дорад:

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n).$$

5. Дисперсияи фарқи ду бузургии тасодуфии новобаста ба суммаи дисперсияҳои онҳо баробар аст:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Дар ҳақиқат,

$$D(X-Y) = D(X+(-1)Y) = D(X) + D((-1)Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

Дисперсияи бузургии тасодуфии дискретии X, ки қонуни тақсимоташ

$$P(X = x_k) = p_k \qquad (k = 1, 2, ... n), \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

аст, бо формулаи

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^2 p_k$$

муайян карда мешавад.

Ин баробариро ба намуди дигар менависем:

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-M(X))^2p_k=\sum_{k=1}^{n}\left[x_k^{\ 2}p_k-2x_kp_kM(X)+(M(X))^2p_k\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}p_k-2M(X)\sum_{k=1}^{n}x_kp_k+(M(X))^2\sum_{k=1}^{n}p_k=M(X^2)-2(M(X))^2+$$

$$+(M(X))^2=M(X^2)-(M(X))^2.$$

(Нигаред ба формулаи (4.8)).

Қайди 1. Агар қиматҳои бузургии тасодуфии дискретӣ маҷмӯи ҳисобиро ташкил диҳанд

$$P(X=x_k)=p_k\quad(k=1,2,3,...),\quad\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1,$$

пас, дисперсияи он тавассути формулаи

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-M(X_k))^2p_k$$

ёфта мешавад, ки дар ин ҷо қатори дар тарафи рости баробарӣ истода мутлақ наздикшаванда аст.

Дисперсияи бузургии тасодуфии бефосилаи X, ки ҳамаи қиматҳои он ба порчаи $[\alpha,\beta]$ мансубанд, бо формулаи

$$D(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-M(X))^2f(x)dx \qquad (4.10)$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо $f(x)$ зичии тақсимоти эҳтимолиятҳои бузургии тасодуфии X буда, $M(X)$ интизорияти математикии он аст. Формулаи (4.10) – ро дар шакли дигар менависем:

$$D(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-M(X))^2f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left(x^2-2xM(X)+(M(X))^2\right)f(x)dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}x^2f(x)dx-2M(X)\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx+(M(X))^2\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\left|\begin{array}{c}\textit{Ба хосияти}\\ 2-\textit{уми функсияи}\\ \textit{зичӣ нигаред}\end{array}\right|=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}x^2f(x)dx-2(M(X))^2+(M(X))^2=\int_{\alpha}^{\beta}x^2f(x)dx-(M(X))^2.$$

Ҳамин тариқ, барои ҳисоб кардани дисперсияи бузургии тасодуфии бефосилаи X формулаи зеринро ҳосил намудем:

$$D(X)=\int_{\alpha}^{\beta}x^2 f(x)dx-(M(X))^2. \qquad (4.11)$$

Дисперсияи бузургии тасодуфии бефосилаи X, ки ҳамаи қиматҳои он ба фосилаи беохири $(-\infty,+\infty)$ мансубанд бо формулаи

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx \qquad (4.12)$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо $a=M(X)$ аст.

Таъриф. *Тамоили(дуршавии) миёнаи квадратии* бузургии тасодуфии X аз интизорияти математикии он гуфта, решаи квадратӣ аз дисперсияи онро меноманд ва бо $\sigma(X)$ ишора менамоянд:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Интизорияти математикӣ $M(X)$, дисперсия $D(X)$ ва **тамоили** (дуршавии) миёнаи квадратии бузургии **тасодуфии** X - *ро ададҳои тавсифкунандаи ин бузургии* ***тасодуфӣ*** меноманд.

Мисол. Зичии бузургии тасодуфии X бо формулаи

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{хангоми } x\le 0, \\ 3x^2, & \text{хангоми } 0<x<1, \\ 0, & \text{хангоми } x>1. \end{cases}$$

дода шуда аст. **Ададҳои** тавсифкунандаи ин бузургии тасодуфӣ $M(X)$, $D(X)$ ва $\sigma(X)$ - ро ёбед.

Ҳал. Аввал интизорияти математикии онро меёбем:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=3\int_0^1 x^3dx=3\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}.$$

Акнун дисперсияи онро ҳисоб мекунем:

$$D(X)=\int_0^1 x^2\, 3x^2 dx-\left(\frac{3}{4}\right)^2=3\int_0^1 x^4 dx-\frac{9}{16}=\frac{3x^5}{5}\Bigg|_0^1-\frac{9}{16}=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=$$

$$=0{,}6-0{,}5625=0{,}0375.$$

Дуршавии (тамоили) миёнаи квадратии бузургии тасодуфии X - ро бо формулаи $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ ҳисоб мекунем:

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}0375}\approx 0{,}1936\,.$$

Дар амалия барои тавсиф намудани бузургиҳои тасодуфӣ инчунин аз ададҳои доимии дигар истифода мебаранд, ки онҳо *мода* ва *медианаи* бузургии тасодуфӣ ном доранд. Мода ва медианаи бузургии тасодуфиро мувофиқан бо *Mo* ва *Me* ишора мекунем.

Модаи бузургии тасодуфии дискретӣ гуфта, он қимати имконпазири бузургии тасодуфиро меноманд, ки эҳтимолияти калонтарин дорад. Барои бузургии тасодуфии бефосила бошад, қимати имконпазиреро, ки барои он функсияи зичии тақсимот максималӣ мешавад, *мода* меноманд.

Медианаи бузургии тасодуфии бефосила гуфта, абсисаи нуқтаеро меноманд, ки масоҳати бо функсияи зичии тақсимот маҳдудшударо ба ду ҳиссаи баробар тақсим менамояд. Бинобарин, медианаи бузургии тасодуфии X аз баробарии

$$P(X<Me)=P(X>Me) \quad \text{ё} \quad F_X(Me)=0{,}5$$

муайян карда мешавад.

Мисоли 1. Бузургии тасодуфии дискретии X бо тақсимоти зерин дода шудааст:

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

Модаи ин бузургии тасодуфӣ ёфта шавад.

Ҳал. Барои ин бузургии тасодуфӣ $M_0 = 3$ мешавад, чунки қимати $P(X=3)=0{,}5$ нисбат ба $P(X=1)=0{,}2$ ва $P(X=5)=0{,}3$ калонтар аст.

Мисоли 2. Бузургии тасодуфии X бо функсияи зичии тақсимоти $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ дода шудааст. Мода ва медианаи онро ёбед.

Ҳал. Маълум, ки ин функсия қимати максималии худро дар нуқтаи $x=0$ қабул менамояд. Бинобар ин $Mo=0$ аст. Медианаро аз баробарии $F(Me)=\frac{1}{2}$ муайян мекунем:

$$F(Me)=\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Me} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{Me} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{Me} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{\Phi(+\infty)}{2}+\frac{\Phi(Me)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\Phi(Me)}{2}.$$

Аз ин ҷо $0{,}5+0{,}5\Phi(Me)=0{,}5$ ё $\Phi(Me)=0$. Аз ҷадвали қиматҳои функсияи Лаплас $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ (Ҷадвали 2) меёбем: $Me=0$.

§7. МОМЕНТҲОИ БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФӢ

Илова бар ададҳои тавсифии номбаршуда, барои тавсифи бузургиҳои тасодуфӣ *мафҳуми моментҳо* дохил карда шудааст. Мафҳуми момент дар механикаи назариявӣ, барои тавсифи тақсимоти масса (моментҳои статикӣ, моментҳои инертсия) ниҳоят васеъ истифода мешавад. Ба ҳамин монанд, дар назарияи эҳтимолият мафҳуми момент барои тавсиф намудани хосиятҳои тақсимоти бузургиҳои тасодуфӣ истифода мешавад.

Таъриф. Моменти аввалаи тартиби n-уми бузургии тасодуфӣ гуфта, қимати миёнаи тартиби n-уми ин бузургии тасодуфиро меноманд:

$$\nu_n = M(X^n).$$

Таърифи овардашуда ба таърифи моменти аввалаи тартиби n-уми механикаи назариявӣ мувофиқат мекунад, агар дар нуқтаҳои тири абссиса $x_1, x_2, ..., x_n$ массаҳои $p_1, p_2, ..., p_n$ ҷойгир кардашуда бошанд. Маълум, ки моменти тартиби якуми бузургии тасодуфӣ ба қимати миёнаи он баробар аст:

$$\nu_1 = M(X).$$

Фарқи бузургии тасодуфӣ ва қимати миёнаи онро бузургии тасодуфии марказонидашуда меноманд:

$$X^* = X - M(X).$$

Маълум, ки қимати миёнаи бузургии тасодуфии марказонидашуда ба сифр баробар аст.

Моментҳои бузургиҳои тасодуфии марказонидашударо *моментҳои марказӣ* меноманд. Онҳоро ҳамчун моментҳои маркази вазнинӣ тасаввур намудан мумкин аст, чунки марказонидани бузургии тасодуфӣ ба кӯчонидани ибтидои системаи координатӣ ба нуқтаи марказӣ (маркази массаҳо) баробарқувва мебошад. Ҳамин тавр, моменти марказии тартиби n-уми бузургии тасодуфии X гуфта, қимати миёнаи тартиби n-уми бузургии тасодуфии марказонидашударо меноманд:

$$\mu_n = M(X - MX)^n.$$

Маълум, ки моменти марказии тартиби 2 -юм ба дисперсияи бузургии тасодуфӣ баробар аст:

$$\mu_2 = M(X - MX)^2 = D(X).$$

Аз нуқтаи назари механика, дисперсия моменти инертсияи тақсимоти додашудаи массаро нисбат ба маркази вазнинӣ ифода менамояд. Моменти марказии тартиби сеюм бошад, ғайрисимметрӣ будани тақсимотро тавсиф менамояд. Агар таксимот нисбат ба кимати миёна симметрӣ бошад, он гоҳ ҳамаи моментҳои марказии тартиби тоқ ба сифр баробар мешаванд. Дар баъзе масъалаҳои амалӣ мафҳуми моменти мутлаки бузургии тасодуфӣ истифода мешавад.

Таъриф. *Моменти мутлақи* тартиби n-уми бузургии тасодуфӣ гуфта, қимати миёнаи тартиби n-уми қимати мутлақи бузургии тасодуфиро меноманд:

$$Q = M\left(|X|^n\right).$$

Маълум аст, ки моментҳои мутлақи тартиби ҷуфт бо моментҳои аввала якхела мешаванд.

Моментҳои марказиро бо ёрии моментҳои аввала ифода кардан мумкин аст. Масалан, барои моментҳои марказии то тартиби чорум ифодаҳои зеринро ҳосил намудан мумкин аст:

$$\mu_1 = 0;\ \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1 \cdot \nu_2 + 2\nu_1^3;\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1 \cdot \nu_3 + 6\nu_1^2 \cdot \nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Мисол. Бузургии тасодуфии X тақсимоти зеринро дорад:

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

Моментҳои марказии то тартиби чоруми онро ҳисоб кунед.

Ҳал. Моментҳои аввалаи то тартиби чоруми бузургии тасодуфиро ҳисоб мекунем:

$$\nu_1 = M(X) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}6 = 3{,}1;$$
$$\nu_2 = M(X^2) = 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}3 + 16\cdot 0{,}6 = 10{,}9;$$
$$\nu_3 = M(X^3) = 1\cdot 0{,}1 + 8\cdot 0{,}3 + 64\cdot 0{,}6 = 40{,}9;$$
$$\nu_4 = M(X^4) = 1\cdot 0{,}1 + 16\cdot 0{,}3 + 256\cdot 0{,}6 = 158{,}5.$$

Акнун моментҳои марказиро меёбем:

$$\mu_1 = 0;\ \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10{,}9 - (3{,}1)^2 = 1{,}29;$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\cdot\nu_2 + 2\nu_1^3 = 40{,}9 - 3\cdot 3{,}1\cdot 10{,}9 + 2\cdot(3{,}1)^3 = -0{,}888;$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\cdot\nu_3 + 6\nu_1^2\cdot\nu_2 - 3\nu_1^4 = 158{,}5 - 4\cdot 3{,}1\cdot 40{,}9 +$$
$$+ 6\cdot 10{,}9\cdot(3{,}1)^2 - 3\cdot(3{,}1)^4 = 2{,}7777.$$

§8. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Бузургии тасодуфии X бо қонуни тақсимоти

X	0,1	0,2	1	2
P	0,3	0,2	0,2	0,3

дода шудааст. Интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратии онро ёбед.

Ҷавоб: $M(X) = 0{,}69$; $D(X) = 0{,}9349$, $\sigma(X) \approx 0{,}97$.

Масъалаи 2. Интизорияти математикии бузургии тасодуфии $Z = 4X - 2Y + 7$ - ро ёбед агар, $M(X) = 3$ ва $M(Y) = 8$ бошад.

Ҷавоб: $M(Z) = 3$.

Масъалаи 3. Бузургии тасодуфии X қиматҳои $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, x_3 -ро мувофиқан бо эҳтимолиятҳои $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}2$; p_3 қабул мекунад. Қимати x_3 ва p_3 -ро ёбед, агар $M(X) = 8$ бошад.

Ҷавоб: $x_3 = 10{,}2$; $p_3 = 0{,}5$.

Масъалаи 4. Қонуни тақсимоти бузургиҳои тасодуфии новобастаи X ва Y дода шудаанд:

X	-2	0	4
P	0.2	0.3	0.5

Y	-1	0	1
P	0.5	0.4	0.1

Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии XY -ро тартиб диҳед.

Ҷавоб:

XY	2	0	-2	0	0	0	-4	0	4
P	0.1	0.08	0.02	0.15	0.12	0.03	0.25	0.2	0.05

Масъалаи 5. Қонуни тақсимоти бузургиҳои тасодуфии новобастаи X ва Y дода шудаанд:

X	-1	0	2
P	0.5	0.4	0.1

Y	-2	0	2
P	0.1	0.5	0.4

Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии $2X+Y$ -ро тартиб диҳед.

Ҷавоб:

$2X+Y$	-4	-1	0	-2	1	2	5	6
P	0.04	0.25	0.20	0.04	0.20	0.17	0.05	0.04

Масъалаи 6. Бузургии тасодуфии X бо ҷадвали тақсимоти зерин дода шудааст:

x_i	0	1	2	3	4	6
p_i	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1

Интизорияти математикӣ ва дисперсияи онро ёбед.

Ҷавоб: $M(X)=2,4;\ D(X)=4,24$.

Масъалаи 7. Функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии X дода шудааст:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Эҳтимолияти онро ёбед, ки X аз фосилаи $(0{,}2;\ 2{,}5)$ қимат қабул мекунад.

Ҷавоб: $0{,}96$.

Масъалаи 8. Функсияи зичии таксимоти X дода шуда аст: $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$. Ададҳои тавсифии ин бузургии тасодуфиро ҳисоб кунед.

Ҷавоб: $M(X)=0, D(X)=4, \ \sigma(X)=2$.

Масъалаи 9. Функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии X дода шудааст:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \lambda e^{\lambda}, & x\geq 0 \end{cases}$$

Функсияи тақсимоти онро ёбед.

Ҷавоб: $F(x)=1-e^{-\lambda x}$.

Масъалаи 10. Функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии X дода шудааст:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin \mathrm{x}, & 0<\mathrm{x}<\pi, \\ 0, & \mathrm{x}\notin(0, \pi). \end{cases}$$

Дисперсияи ин бузургии тасодуфиро ёбед.

Ҷавоб: 0,4649.

Масъалаи 11. Бузургии тасодуфӣ бо функсияи зичии

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin x, & 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}, \\ 0, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

дода шудааст. Тамоили миёнаи квадратии $\sigma(X)$-ро ёбед.

Ҷавоб: $\sigma(X)=\sqrt{\pi-3}$.

БОБИ V. БАЪЗЕ ҚОНУНҲОИ ТАҚСИМОТИ БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФӢ. ФУНКСИЯҲО АЗ БУЗУРГИИ ТАСОДУФӢ. ФУНКСИЯИ ТАВСИФИИ БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФӢ

16.

§1. ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ БИНОМИАЛӢ

Бигузор, дар шароити якхела n санҷиш гузаронида шавад, ки дар ҳар яки он ҳодисаи A бо эҳтимолияти якхелаи p рӯй диҳад (ё ҳодисаи $\bar{A}$ бо эҳтимолияти $q=1-p$ рӯй диҳад). Дар ҳар як силсилаи аз n санҷиш иборат буда, ҳодисаи A метавонад рӯй надиҳад, ё метавонад 1 маротиба, 2 маротиба, … , n маротиба рӯй диҳад. Бузургии тасодуфии X- ро, ки шумораи пайдошавии ҳодисаи A - ро дар n санҷиш ифода мекунад, дида мебароем. Қонуни тақсимоти ин бузургии тасодуфиро меёбем. Бузургии тасодуфии X қиматҳои $x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\cdots,x_n=n$ - ро қабул мекунад. Эҳтимолияти он, ки бузургии тасодуфии X қимати x_k- ро қабул мекунад бо p_k ишора карда, онро бо формулаи Бернулли ҳисоб мекунем:

$$p_k=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\quad (k=0,1,2,...,n) \tag{5.1}$$

Таъриф. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфӣ, ки бо формулаи Бернулли муайян карда мешавад, *қонуни тақсимоти биномиалӣ* ном дорад.

Доимиҳои n ва p - ро, ки ба формулаи (5.1) дохиланд, *параметрҳои тақсимоти биномиалӣ* меноманд.

Ин қонуни тақсимот барои он биномиалӣ номида шудааст, ки тарафи рости формулаи (5.1) ба формулаи умумии узвҳои биноми Нютон барои $(p+q)^n$ баробар аст:

$$(p+q)^n=p^n+C_n^1p^{n-1}q+C_n^2p^{n-2}q^2+...+C_n^kp^kq^{n-k}+...+q^n.$$

Азбаски $p+q=1$ аст, пас

$$p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + q^n = 1$$

мешавад, яъне

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Ҷамъшавандаи якум p^n нишон медиҳад, ки ҳодисаи A дар n санҷиш расо n маротиба рӯй медиҳад. Ҷамъшавандаҳои $C_n^k p^k q^{n-k}$ бошад нишон медиҳанд, ки ҳодисаи A дар n санҷиш расо k маротиба рӯй медиҳад $k=1,2,\ldots,n-1$. Ҷамъшавандаи охирон q^n эҳтимолияти онро ифода мекунад, ки дар n санҷиш ҳодисаи A рӯй намедиҳад.

Ҷадвали ин қонуни тақсимот намуди зеринро дорад:

X	0	1	2	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 q^{n-1} p$	$C_n^2 q^{n-2} p^2$	...	$C_n^k q^{n-k} p^k$	...	p^n

Интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратии қонуни тақсимоти биномиалиро ҳисоб мекунем:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} x_k p_k = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Барои қимати ин суммаро ёфтан, аз ҳарду тарафи айнияти

$$(y+q)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k y^k q^{n-k} .$$

нисбат ба y ҳосила мегирем:

$$n(y+q)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k y^{k-1} q^{n-k} . \qquad (5.2)$$

Дар баробарии охирин $y=p$ гузошта, онро ба p зарб мекунем:

$$pn(p+q)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k p^k q^{n-k} .$$

Азбаски $p+q=1$, аст пас

$$np = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Аз ин ҷо, $M(X)=np$ мешавад.

Барои ёфтани $D(X)$ бо формулаи

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2,$$

аввал $M\left(X^2\right)$ - ро ҳисоб мекунем. Мувофиқи ҷадвали қонуни тақсимот

$$M\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Барои ёфтани ин сумма, баробарии (5.2) - ро ба y зарб карда, ҳосилаи натиҷаро меёбем:

$$n(y+q)^{n-1}+n(n-1)y(y+q)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 y^{k-1} q^{n-k} .$$

Ин баробариро ба y зарб карда, пас $y=p$ мегузорем:

$$np(p+q)^{n-1}+n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 p^k q^{n-k} .$$

Азбаски $p+q=1$ аст, бинобар ин

$$M\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 p^k q^{n-k} = np+n^2p^2-np^2 =$$

$$=n^2p^2+np(1-p)=n^2p^2+npq .$$

Аз ин ҷо,

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2=n^2p^2+npq-n^2p^2=npq$$

мешавад.

Тамоили миёнаи квадратиро меёбем:

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}\,.$$

§2. ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ ПУАССОН

Ҳангоми дар шароити якхела гузаронидани n санҷиш эҳтимолияти расо k маротиба рӯй додани ҳодисаи A, ки эҳтимолияти рӯйдиҳии он дар ҳар як санҷиш ба p баробар аст, бо формулаи Бернулли ёфта мешавад.

Дар мавриди кифоя калон будани адади n бо формулаи Бернулли ёфтани эҳтимолият ҳисобкунии зиёдро талаб мекунад. Илова бар ин, формулаи Бернулли фақат барои қиматҳои охирноки n ҷой дорад.

Бигузор, миқдори санҷишҳо n кифоя калон ва эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A дар ҳар як санҷиш p кифоя хурд бошад. Ишораи $np=\lambda$ - ро дохил мекунем.

Таъриф. Агар бузургии тасодуфии дискретии X қиматҳои бутуни ғайриманфиро бо эҳтимолиятҳои

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k=0,1,2,\ldots$$

қабул намояд, он гоҳ мегӯянд, ки он бо қонуни Пуассон тақсим шудааст. Адади λ - ро параметри тақсимоти Пуассон меноманд. Қайд менамоем, ки дар ин маврид миқдори санҷишҳо n метавонад беохир ҳам бошад.

Интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратиро меёбем. Аввал ҷадвали ин тақсимотро тартиб медиҳем:

X	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\ldots$

Акнун дурустии баробарии назоратӣ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=1$$

-ро нишон медиҳем. Аз ҷудокунии функсияи e^x ба қатори Тейлор истифода мекунем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Дар ин баробарӣ $x = \lambda$ мегузорем:

$$e^\lambda = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Бо назардошти ин баробарӣ ва баробарии назоратӣ, ҳосил мекунем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Интизорияти математикиро ҳисоб мекунем:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Барои ҳисоб кардани дисперсия аввал $M(X^2)$ - ро меёбем:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} +$$

$$+ \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

Аз ин ҷо, $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ мешавад.

Ҳамин тавр, исбот шуд, ки $M(X) = \lambda; D(X) = \lambda$ ва $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$ аст, яъне параметри тақсимоти Пуассон ба қимати умумии интизорияти математикӣ ва дисперсияи бузургии тасодуфии X баробар аст.

§3. ҚОНУНҲОИ ТАҚСИМОТИ ГЕОМЕТРӢ ВА ГИПЕРГЕОМЕТРӢ

1. Қонуни тақсимоти геометрӣ. Санҷишҳои такрории новобастаро дида мебароем, ки дар ҳар яки онҳо ҳодисаи A метавонад ё бо эҳтимолияти p рӯй диҳад, ё бо эҳтимолияти $q=1-p$ рӯй надиҳад. Бо бузургии тасдуфии X миқдори санҷишҳои гузаронидашударо то рӯйдиҳии ҳодисаи A ишора карда, бо B_k ҳодисаи дар санҷиши k-ум рӯй додани ҳодисаи A - ро ишора мекунем. Он гоҳ маълум аст, ки

$$B_1=A;\ B_2=A\cdot\overline{A};\ B_3=A\cdot\overline{A}\cdot\overline{A};\ B_4=A\cdot\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\overline{A};\ldots;B_k=A\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{(k-1)-\text{маротиба}}$$

.

Аз ин ҷо, мувофиқи теоремаи эҳтимолияти ҳосили зарби ҳодисаҳои новобаста ҳосил мекунем:

$$P\{X=k\}=P(B_k)=p\cdot q^{k-1}.$$

Таъриф. Бузургии тасдуфии X ба қонуни тақсимоти геометрӣ бо параметри p итоат менамояд, агар он қиматҳои бутуни мусбати $k=1,2,\ldots$-ро мувофиқан бо эҳтимолиятҳои

$$P\{X=k\}=P(B_k)=p_k=p\cdot q^{k-1} \tag{5.3}$$

қабул намояд.

Ин қонуни тақсимот барои он геометрӣ номида мешавад, ки пайдарпаии эҳтимолиятҳои p_k прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд.

Баробарии назоратии $\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k=1$-ро месанҷем. Формулаи суммаи прогрессияи геометрии беохир камшавандаро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}p\cdot(1-p)^{k-1}=\frac{p}{1-(1-p)}=\frac{p}{p}=1.$$

Мисол. Эҳтимолияти ба нишон расидани ҳар як тири тирандоз ба 0,8 баробар аст. Тирпаронӣ то ба нишон расидани тир давом дода мешавад. Қонуни тақсимоти бузургии тасдуфии X-шумораи тирҳои паронидашударо тартиб диҳед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $p=0{,}8$; $q=1-p=0{,}2$; $k=1,2,3,4,\dots n$. Эҳтимолиятҳои $p_к$ -ро бо формулаи (5.3) ҳисоб мекунем:

$p_1=p\cdot q^{1-1}=0{,}8\cdot(0{,}2)^0=0{,}8;\qquad p_2=p\cdot q^{2-1}=0{,}8\cdot(0{,}2)^1=0{,}16;$

$p_3=p\cdot q^{3-1}=0{,}8\cdot(0{,}2)^2=0{,}032;\ \dots;\ p_n=p\cdot q^{n-1}=0{,}8\cdot(0{,}2)^{n-1};\ \dots .$

Ҳамин тавр, ҷадвали тақсимоти бузургии тасдуфии X чунин намуд дорад:

X	1	2	3	…	n	…
P	0,8	0,16	0,032	…	$0{,}8\cdot(0{,}2)^{n-1}$	…

Акнун интизорияти математикӣ ва дисперсияи қонуни тақсимоти геометриро муайян мекунем.

Бигузор, бузургии тасодуфии X ба қонуни тақсимоти геометрӣ бо параметри p итоат намояд. Он гоҳ мувофиқи таърифи интизорияти математикӣ:

$$M(X)=1\cdot p+2\cdot pq+3\cdot pq^3+\dots+kpq^{k-1}+\dots=p\left(1+2q+3q^2+\dots+kq^{k-1}+\dots\right)$$

.

Дар ин ҷо, ифодаи дохили қавс ба ҳосилаи суммаи прогрессияи геометрии

$$q+q^2+q^3+\dots+q^k+\dots=\frac{q}{1-q}$$

баробар аст. Бинобар ин

$$1+2q+3q^2+\dots+kq^{k-1}+\dots=\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p^2}.$$

Пас, $M(X)=p\cdot\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{p}$.

Барои муайян намудани дисперсияи тақсимоти геометрӣ $M(X^2)$-ро муайян мекунем. Маълум, ки

$$M(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}. \qquad (5.4)$$

Боз суммаи прогрессияи геометрии беохир камшавандаи

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

-ро дида мебароем. Аз ҳарду тарафи ин баробарӣ нисбат ба q ҳосила мегирем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}. \qquad (5.5)$$

Аз ҳарду тарафи баробарии ҳосилшудаи (5.5) боз нисбат ба q ҳосила мегирем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}. \qquad (5.6)$$

Ҳарду тарафи баробарии (5.6) -ро ба q зарб намуда, ҳосил мекунем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = \frac{2q}{(1-q)^3} \quad \text{ё} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{2q}{(1-q)^3}.$$

Аз баробарии (5.5) истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Ифодаи ҳосилшударо ба формулаи (5.4) мегузорем:

$$M(X^2) = p\cdot\frac{1+q}{(1-q)^3} = p\cdot\frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}.$$

Баробарии $M(X)=\frac{1}{p}$ - ро ба инобат гирифта, формулаи дисперсияро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

2. Қонуни тақсимоти гипергеометрӣ. Масъалаи зеринро дида мебароем. Бигузор дар гурӯҳе, ки аз N маҳсулоти якхела иборат аст, n $(n \leq N)$ маҳсулоти аълосифат бошад. Аз ин гурӯҳ тасодуфан m маҳсулот гирифта мешавад. Бигузор, бузургии тасодуфии X шумораи маҳсулоти аълосифатро дар байни m маҳсулоти гирифташуда ифода намояд. Он гоҳ маълум, ки X метавонад қиматҳои бутуни $k = 0,1,2, \ldots$ $min(m,n)$ – ро қабул намояд. Эҳтимолиятҳои қимати k- ро қабул намудани X- ро бо p_k ишора менамоем ва онҳоро меёбем. Азбаски аз N маҳсулоти якхела m - то гирифта мешавад, пас миқдори умумии оқибатҳои ноҳамҷояи санҷиш ба C_N^m баробар мешавад.

Агар X қимати k-ро қабул намояд, он гоҳ k маҳсулоти аълосифат аз байни n маҳсулоти аълосифат бо C_n^k тарзҳои гуногун гирифта мешавад. Боқимонда $m-k$ маҳсулоти пастсифат аз байни $N-n$ маҳсулотҳои пастсифат бо C_{N-n}^{m-k} тарзҳои гуногун гирифта мешавад. Ҳар як тарзи баромадани k маҳсулоти аълосифат метавонад бо яке аз тарзҳои баромадани маҳсулоти пастсифат ҳамҷоя бошад. Бинобар ин шумораи умумии оқибатҳои ноҳамҷояи санҷиш, ки ба рӯй додани ҳодисаи “дар байни m маҳсулоти гирифташуда k маҳсулоти аълосифат ҳаст” мусоидат мекунанд, ба $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$ баробар мешавад. Пас, дар асоси таърифи классикии эҳтимолият ҳосил мекунем:

$$P_k = P\{X = k\} = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}. \qquad (5.7)$$

Таъриф. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии X-ро *гипергеометрӣ* меноманд, агар эҳтимолиятҳои қимати бутуни $k = 0,1,2, \ldots, \min(m,n)$ – ро қабул намудани он бо формулаи (5.7) ҳисоб карда шаванд.

Мисол. Дар қуттӣ 5 кураи сурх ва 6 кураи кабуд мавҷуд аст. Аз ин қуттӣ тасодуфан 4 кура гирифта мешавад. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии X - *миқдори кураҳои сурх дар байни кураҳои гирифташударо* тартиб диҳед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $N=11$, $n=5$; $m=4$; $k=0,1,2,3,4$ аст. Эҳтимолиятҳои p_k - ро ҳисоб мекунем:

$$p_0=\frac{C_5^0\cdot C_6^4}{C_{11}^4}=\frac{15}{330};\quad p_1=\frac{C_5^1\cdot C_6^3}{C_{11}^4}=\frac{100}{330};\quad p_2=\frac{C_5^2\cdot C_6^2}{C_{11}^4}=\frac{150}{330};$$

$$p_3=\frac{C_5^3\cdot C_6^1}{C_{11}^4}=\frac{60}{330};\; p_4=\frac{C_5^4\cdot C_6^0}{C_{11}^4}=\frac{5}{330}.$$

Ҳамин тавр, ҷадвали тақсимоти X намуди зеринро дорад:

X	0	1	2	3	4
P	$15/330$	$100/330$	$150/330$	$60/330$	$5/330$

Баробарии назоратиро месанҷем: $\frac{15}{330}+\frac{100}{330}+\frac{150}{330}+\frac{60}{330}+\frac{5}{330}=1.$

§4. ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ МУНТАЗАМ

Таъриф. Тақсимоти эҳтимолиятҳои бузургии тасодуфии X - ро дар порчаи $[a,b]$ мунтазам меноманд, агар зичии тақсимоти эҳтимолиятҳои ин бузургӣ дар порчаи номбаршуда доимӣ буда, берун аз он ба сифр баробар бошад:

$$f(x)=\begin{cases} c, \text{ хангоми } a\le x\le b \\ 0, \text{ хангоми } x<a \text{ ё } x>b. \end{cases}$$

Қимати бузургии c - ро меёбем. Азбаски $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ аст, пас барои функсияи додашуда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_a^b cdx=c(b-a)=1\Rightarrow c=\frac{1}{b-a}$$

мешавад. Пас, зичии тақсимот намуди зеринро мегирад:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ хангоми } a \le x \le b\\ 0, \text{ хангоми } x < a \text{ ё } x > b.\end{cases} \qquad (5.8)$$

Интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратии бузургии тасодуфии қонуни тақсимоташ мунтазамро меёбем:

$$M(X)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2},$$

$$M(X^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Акнун функсияи тақсимот $F(x)$ - ро барои бузургии тасодуфии X, ки тақсимоташ мунтазам аст, меёбем. Азбаски $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ аст, пас

а) ҳангоми $x\le a$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} o\cdot dt=0$.

б) ҳангоми $a<x<b$,

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{x} f(t)dt=\int_a^x\frac{dt}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}.$$

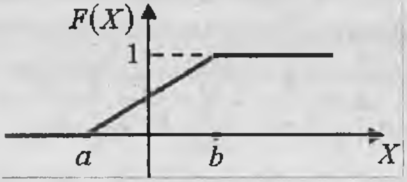
в) ҳангоми $x\ge b$,

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{b} f(t)dt+\int_{b}^{x} f(t)dt=\int_a^b\frac{dt}{b-a}=1.$$

Ҳамин тариқ, функсияи тақсимот намуди зеринро мегирад:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ хангоми } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ хангоми } x < a < b\,. \\ 1, \text{ хангоми } x \ge b. \end{cases}$$

Графики функсияи $F(X)$ - ро месозем(Расми 5.1):



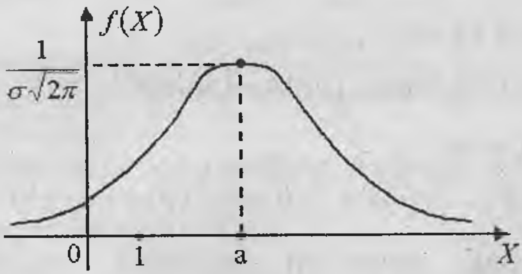
Расми 5.1

§5. ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ НОРМАЛӢ

Таъриф. Тақсимоти нормалӣ ё Гаусс гуфта, тақсимотеро меноманд, ки зичии эҳтимолиятҳои он намуди

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (5.9)$$

-ро дорад, ки дар ин ҷо a ва $\sigma(\sigma>0)$ *параметрҳои тақсимоти нормалӣ* ном доранд. Тақсимоти нормалиро, ки бо функсияи зичии тақсимоти (5.9) дода шудааст, кӯтоҳ бо $N(\alpha,\sigma)$ ишора мекунанд. Графики функсияи (5.9)-ро хати каҷи нормалӣ меноманд(Расми 5.2).



Расми 5.2

Функсияи Лаплас $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$-ро, ки дар боби III, §4 дохил карда будем, истифода мебарем. Қайд менамоем, ки ин функсия дорои хосиятҳои зерин аст:

1) $\Phi(0)=0$ аст, чунки $\int_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0$ аст.

2) $\Phi(+\infty)=1$ аст, чунки $\Phi(+\infty)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=1$ аст.

3) $\Phi(x)$ функсияи тоқ аст: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. Дар ҳақиқат,

$$\Phi(-x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\left|\begin{array}{l} t=-z;\ dt=-dz \\ z=-t; \end{array}\right|=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=-2\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\Phi(x).$$

Аз баробарии (4.6) истифода намуда, функсияи тақсимоти нормалиро муайян мекунем:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Дар интеграли охирон гузориши $\frac{t-a}{\sigma}=z$-ро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$F(x)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2}\Phi(+\infty)+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Ҳамин тавр,

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Эҳтимолияти ба интервали (α,β) мансуб будани қиматҳои бузургии тасодуфии X, ки ба қонуни нормалӣ итоат мекунад, тавассути функсияи Лаплас бо формулаи

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

ёфта мешавад.

Эҳтимолияти мутааллиқ будани қимати бузургии тасодуфии ба қонуни нормалӣ итоаткунанда ба интервали нисбат ба нуқтаи a симметрӣ, бо формулаи

$$P(|X - a| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

ёфта мешавад.

Исбот мекунем, ки функсияи (5.9) шарти $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ -ро қонеъ менамояд.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t \\ x = a + \sigma t \\ dx = \sigma dt \end{array}\right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1.$$

Дар ин ҷо аз баробарии $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$ истифода кардем.

Акнун интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратии бузургии тасодуфии X-ро, ки ба қонуни тақсимоти нормалӣ итоат мекунад, ҳисоб мекунем:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t \\ x = a + \sigma t \\ dx = \sigma dt \end{array}\right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a + \sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 = a,$$

чунки ҳудудҳои интеграли охирин нисбат ба ибтидои тири ададӣ симметрӣ буда, функсияи таҳтиинтегралӣ тоқ аст.

Ҳамин тариқ, параметрӣ a дар формулаи (5.9) ба интизорияти математикии бузургии тасодуфӣ баробар аст:

$$a = M(X).$$

Дисперсияи бузургии тасодуфиро ҳисоб мекунем:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{matrix} \frac{x-a}{\sigma} = t, \quad x-a = \sigma t \\ x = a+\sigma t,\, dx = \sigma dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\, dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left| \begin{matrix} u = t,\; du = dt \\ te^{-\frac{t^2}{2}} = dv;\; v = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[0 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \right] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sigma^2,$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma.$$

Ҳамин тариқ, параметри σ, ки ба формулаи (5.9) дохил аст, ба тамоили миёнаи квадратии бузургии тасодуфии X баробар аст.

Қонуни тақсимоти нормалӣ дар масъалаҳои амалӣ ниҳоят бисёр татбиқ карда мешавад. Дар табиат ва техника бузургиҳои тасодуфии бисёре вомехӯранд, ки онҳо бо тақсимоти нормалӣ аниқ тавсиф карда мешаванд. Илова бар ин тақсимотҳои бисёре мавҷуданд, ки ба қонуни тақсимоти нормалӣ наздик мебошанд ва ҳангоми зиёд шудани миқдори санҷишҳо ба қонуни тақсимоти нормалӣ, ҳамчун ба ҳудуди худ, майл мекунанд. Теоремаҳои ҳудудӣ, ки шартҳои ба қонуни тақсимоти нормалӣ майл намудани тақсимотҳои дигарро муайян мекунанд, дар боби оянда оварда шудаанд.

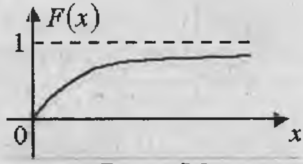
Мо ҳоло теоремаро дар бораи суммаи қонунҳои тақсимоти нормалӣ, ки дар мавзӯҳои оянда тез-тез истифода мешавад, бе исбот меорем.

Теорема. Агар бузургиҳои тасодуфии новобастаи $X_1, X_2, ..., X_n$ бо қонуни тақсимоти нормалӣ, мувофиқан бо параметрҳои $(a_1, \sigma_1), (a_2, \sigma_2), ..., (a_n, \sigma_n)$ итоат намоянд, он гоҳ суммаи онҳо $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ низ ба қонуни тақсимоти нормалӣ итоат менамояд ва параметрҳои он $a = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ва $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2}$ мешаванд.

§6. ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфиро *нишондиҳандагӣ* меноманд, агар зичии тақсимоти он намуди

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ хангоми } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ хангоми } x \geq 0 \end{cases}$$



Расми 5.3

-ро дошта бошад, ки дар ин ҷо $\lambda > 0$ параметри доимист.

Функсияи тақсимоти қонуни нишондиҳандагиро меёбем:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt =$$

$$= -\int_{0}^{x} e^{-\lambda t} d(-\lambda t) = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Ҳамин тариқ, функсияи тақсимот намуди зеринро дорад:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ хангоми } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ хангоми } x \geq 0. \end{cases}$$

Графики функсияи $F(x)$ дар расми 5.3 тасвир шудааст.

Эҳтимолияти тааллуқ доштани бузургии тасодуфии X ба интервали (α, β) ба

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \left(1 - e^{-\lambda\beta}\right) - \left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta},$$

баробар мешавад, яъне $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$ аст.

Акнун интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратиро ҳисоб мекунем:

1) $M(X)$ -ро тавассути формулаи $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ меёбем:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x f(x) dx + \int\limits_{0}^{+\infty} x f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot x dx + \int\limits_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

$$M(X) = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Интеграли ғайрихоси охиринро ҳисоб мекунем:

$$M(X) = \int\limits_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \lambda e^{-\lambda x} dx, v = -e^{-\lambda x} \end{matrix} \right| = -x e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= 0 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

2) Барои ҳисоб кардани $D(X)$ аз формулаи $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$ истифода менамоем:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 f(x) dx + \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot x^2 dx + \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Аз ин ҷо, $D(X) = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}$ аст. Ду маротиба формулаи интегронӣ бо ҳиссаҳоро татбиқ намуда, меёбем:

$$D(X)=\lambda\int_0^{+\infty}x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\left[-x^2e^{-\lambda x}-\frac{2x}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Тамоили миёнаи квадратӣ ба

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda}$$

баробар аст. Аз ин ҷо дида мешавад, ки $M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$.

§7. ФУНКСИЯҲО АЗ БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФӢ

Бигузор, ҷадвали тақсимоти бузургии тасодуфии дискретии X дода шуда бошад:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	P_1	P_2	...	P_n

Он гоҳ бузургии тасодуфии $Y=\varphi(X)$ низ дискретӣ мебошад ва қиматҳои имконпазираш ададҳои

$$y_1=\varphi(x_1),\ y_2=\varphi(x_2),...,\ y_n=\varphi(x_n)$$

буда, ҷадвали тақсимоташ намуди зерин дорад:

Y	$y_1=\varphi(x_1)$	$y_2=\varphi(x_2)$	...	$y_n=\varphi(x_n)$
P	P_1	P_2	...	P_n

Агар дар байни киматҳои имконпазири Y ададҳои якхела бошанд, он гоҳ дар сатри якуми ҷадвал яке аз онҳо навишта шуда, ба сифати эҳтимолияти мувофиқ суммаи эҳтимолиятҳои онҳо ҷой дода мешавад.

Мисоли 1. Бигузор ҷадвали тақсимоти X намуди зеринро дошта бошад:

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,25	0,3	0,25	0,1

Ҷадвали тақсимоти $Y=X^2$-ро меёбем.

Ҳал.

$P(Y=0)=P(X=0)=0{,}3$;
$P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)=0{,}25+0{,}25=0{,}5$;
$P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=0{,}1+0{,}1=0{,}2$.

Y	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Акнун фарз мекунем, ки X бузургии тасодуфии бефосила аст ва функсияи зичии тақсимоташ $f(x)$ дода шудааст. Функсияи зичии тақсимоти $Y=\varphi(X)$-ро, ки бо $g(y)$ ишора карда мешавад, меёбем.

Теоремаи 1. Бигузор, функсияи $y=\varphi(x)$ дар фосилаи (a,b), ки ҳамаи қиматҳои имконпазири X-ро дарбар мегирад монотонӣ, бефосила, дифференсиронидашаванда ва $x=\psi(y)$ функсияи баръакси он бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|. \tag{5.10}$$

Исбот. Бигузор $y=\varphi(x)$ функсияи афзоянда бошад. Дар тири Oy фосилаи $(y,\ y+\Delta y)$-ро гирифта бо ёрии функсияи $x=\psi(y)$ ба тири Ox инъикос мекунем ва дар натиҷа фосилаи $(x,\ x+\Delta x)$-ро ҳосил мекунем. Маълум, ки ҳодисаҳои $(y<Y<y+\Delta y)$ ва $(x<X<x+\Delta x)$ баробаркувва мебошанд. Бинобар ин $P(y<Y<y+\Delta y)=P(x<X<x+\Delta x)$ шуда, аз ин ҷо, мувофиқи таърифи функсияи зичии тақсимот ҳосил мекунем:

$$g(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P(y<Y<y+\Delta y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\left[\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}\right]=f(x)\cdot x'_y.$$

Агар $y=\varphi(x)$ функсияи камшаванда бошад, он гоҳ ба афзоиши $\Delta y>0$ афзоиши $\Delta x<0$ мувофиқ меояд. Бинобар ин

$$g(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P(y<Y<y+\Delta y)}{\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\left[\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{|\Delta x|}\cdot\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right|\right]=f(x)\cdot|x'_y|.$$

Акнун ҳарду ҳолатро якҷоя карда $x=\psi(y)$ -ро ба инобат гирем, барои функсияи монотонӣ ва дифференсиронидашавандаи $y=\varphi(x)$ баробарии (5.10) -ро ҳосил мекунем. *Теорема исбот шуд*.

Мисоли 2. Бузургии тасодуфии $X\in N(0,1)$ дода шудааст. Функсия зичии тақсимоти бузургии тасодуфии $Y=X^3$ -ро муайян мекунем.

Ҳал. Маълум, ки $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Азбаски функсияи $y=x^3$ дар тамоми тири ададӣ монотонӣ мебошад, пас мо метавонем формулаи (5.10) -ро татбиқ намоем. Функсияи баръакси $\varphi(x)=x^3$ функсияи $\psi(y)=\sqrt[3]{y}$ мебошад, ки ҳосилаи он $\psi'(y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ аст. Пас мувофиқи формулаи (5.10)

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt[3]{y^2}}\cdot e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}.$$

Теоремаи 2. Табдилдиҳии хаттии бузургии тасодуфӣ намуди қонуни тақсимоти онро тағйир намедиҳад.

Исбот. Бигузор, $f(x)$ функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии X маълум буда, $Y=a\cdot X+b$ (a,b-ададҳои доимӣ) бошад. Азбаски $y=ax+b$ функсияи монотонӣ аст, пас функсияи баръакси он $x=\psi(y)=\frac{y-b}{a}$ низ монотонӣ мебошад. Ҳосилаи функсияи баръакс $\psi'(y)=\frac{1}{a}$ аст. Формулаи (5.10)-ро татбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$g(y)=f\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|}. \tag{5.11}$$

Баробарии ҳосилшуда нишон медиҳад, ки табдилдиҳии хаттии бузургии тасодуфӣ намуди конуни таксимотро тағйир намедиҳад. Теорема исбот шуд.

Мисоли 3. Бузургии тасодуфии $X \in N(m_1, \sigma_1)$ дода шудааст. Функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии $Y = a \cdot X + b$ (a, b -ададҳои доимӣ) -ро меёбем.

Ҳал. Маълум, ки функсияи зичии тақсимоти x чунин намуд дорад:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

Формулаи (5.11)-ро татбиқ намуда, функсияи зичии тақсимоти $Y = a \cdot X + b$ -ро ҳосил мекунем:

$$g(y) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left[\frac{y-b}{a} - m_1\right]^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{|a|}, \text{ ё } g(y) = \frac{1}{|a|\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[y-(b+a\cdot m_1)]^2}{2a^2\cdot\sigma_1^2}}.$$

Ҳамин тавр, бузургии тасодуфии Y низ ба конуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои $m_2 = a \cdot m_1 + b$ ва $\sigma_2 = |a| \cdot \sigma_1$ итоат менамояд.

Теоремаи зерин тарзи муайян намудани функсияи $g(y)$ -ро дар ҳолати ғайримонотонӣ будани функсияи $y = \varphi(x)$ нишон медиҳад.

Теоремаи 3. Бигузор, $f(x)$ функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии X буда, ба ҳар як қимати функсияи бефосила ва дифференсиронидашавандаи $y = \varphi(x)$ якчанд қиматҳои аргумент $x_1 = \psi_1(y), x_2 = \psi_2(y), \ldots, x_n = \psi_n(y)$ (n –шумораи фосилаҳое, ки дар онҳо $y = \varphi(x)$ функсияи монотонӣ мебошад) мувофиқ оянд. Он гоҳ баробарии зерин дуруст мебошад:

$$g(y) = \sum_{k=1}^{n} f[\psi_k(y)] \cdot |\psi_k'(y)|, \tag{5.12}$$

ки дар ин ҷо $g(y)$ функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии Y мебошад.

Исбот. Маълум, ки ҳодисаи $y<Y<y+\Delta y$ дар ҳолати рӯй додани ақаллан яке аз ҳодисаҳои ноҳамҷояи $x_1<X<x_1+\Delta x_1$; $x_2<X<x_2+\Delta x_2$,..., $x_n<X<x_n+\Delta x_n$ ба амал меояд. Бинобар ин дар асоси аксиомаи ҷамъи эҳтимолиятҳо ҳосил мекунем

$$P(y<Y<y+\Delta y)=\sum_{k=1}^{n}P(x_k<X<x_k+\Delta x_k).$$

Пас,

$$g(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P(y<Y<y+\Delta y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}P(x_k<X<x_k+\Delta x_k)}{\Delta y}.$$

Теорема дар бораи ҳудуди суммаро истифода бурда, дар таҳти аломати сумма табдилдиҳӣ гузаронида, ҳосил мекунем:

$$g(y)=\sum_{k=1}^{n}\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\(\Delta x_k\to 0)}}\left[\frac{P(x_k<X<x_k+\Delta x_k)}{|\Delta x_k|}\cdot\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta y}\right|\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\left|(x_k)'_y\right|=\sum_{k=1}^{n}f[\Psi_k(y)]\cdot|\Psi'_k(y)|.$$

Теорема исбот шуд.

Мисоли 4. Бузургии тасодуфии $X\in N(0,1)$ дода шудааст. Функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии $Y=X^2$ -ро меёбем.

Ҳал. Функсияи баръакс $x=\Psi(y)$ яккимата намебошад. Ба як қимати y ду қимати аргумент $x_1=\psi_1(y)=+\sqrt{y}$ ва $x_2=\psi_2(y)=-\sqrt{y}$ мувофиқ меояд. Азбаски $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, пас формулаи (5.12)-ро татбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$g(y)=f[\psi_1(y)]\cdot|\psi_1^{\prime}(y)|+f[\psi_2(y)]\cdot|\psi_2^{\prime}(y)|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}.$$

Ҳамин тавр,

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}},\ (y>0).$$

§8. ФУНКСИЯИ ТАВСИФИИ КОМПЛЕКСИИ БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФӢ

Бояд қайд кард, ки монанди бузургиҳои тасодуфии ҳақиқӣ мо метавонем бузургиҳои тасодуфии комплексиро низ дида бароем ва дар зери ин мафҳум функсияи X_1+iX_2-ро фаҳмем, ки дар ин ҷо X_1, X_2- бузургиҳои тасодуфии ҳақиқӣ буда, i воҳиди мавҳум аст($i^2=-1$). Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки

$$M(X_1+iX_2)=M(X_1)+i\cdot M(X_2).$$

Бузургиҳои тасодуфии комплексии $X=X_1+i\cdot X_2$ ва $Y=Y_1+i\cdot Y_2$ новобаста номида мешаванд, агар σ -алгебраҳои $\sigma(X_1,X_2)$ ва $\sigma(Y_1,Y_2)$, ки бо бузургиҳои тасодуфии X_1,X_2 ва Y_1,Y_2 ба вуҷуд оварда шудаанд, новобаста бошанд. Барои чунин бузургиҳои тасодуфӣ хосияти дигари қимати миёна низ ҷой дорад:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

Таъриф. Функсияи тавсифии бузургии тасодуфии ҳақиқии X гуфта, функсияи комплексии

$$\varphi_X(t)=M\left(e^{itX}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x) \qquad (5.13)$$

-ро меноманд, ки дар ин ҷо t-тағйирёбандаи ҳақиқӣ буда, $F(x)$ функсияи тақсимоти X мебошад. Агар бузургии тасодуфии X функсияи зичии тақсимоти $f(x)$-ро дошта бошад, он гоҳ функсияи тавсифии онро ба намуди

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\cdot f(x)dx \qquad (5.14)$$

навиштан мумкин аст, ки тарафи рости ин баробарӣ айнан табдилдиҳии Фурйи функсияи $f(x)$ мебошад.

Бинобар ин дохил намудани мафҳуми функсияи тавсифӣ имконият медиҳад, ки яке аз дастовардҳои пуриқтидор ва хуб таҳлилшудаи математика - табдилдиҳиҳои Фурйе дар тадқиқи бузургиҳои тасодуфӣ мавриди истифода гардад. Махсусан, функсияҳои тавсифӣ воситаи бисёр хуби математикӣ барои тадқиқи хосиятҳои суммаҳои бузургиҳои тасодуфии новобаста мебошанд.

Функсияҳои тавсифӣ хосиятҳои зерин доранд:

1. Барои ҳар гуна бузургии тасодуфии X функсияи тавсифии $\varphi_X(t)$ вуҷуд дорад. Дурустии ин хосият аз нобаробарии зерин ҳосил мешавад:

$$|\varphi_X(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| dF(x) \le \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = 1.$$

2. $\varphi_{a\cdot X+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$, a, b - доимиҳо. Дар ҳақиқат, хосияти қимати миёнаро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\varphi_{a\cdot X+b}(t) = M\left(e^{it(aX+b)}\right) = e^{itb} \cdot M\left(e^{i(at)X}\right) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at).$$

3. Агар $X_1, X_2, ..., X_n$ бузургиҳои тасодуфии новобаста бошанд, он гоҳ функсияи тавсифии суммаи онҳо $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ ба ҳосили зарби функсияҳои тавсифии ҳар яки онҳо баробар аст:

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

Дар ҳақиқат, аз хосияти қимати миёнаи ҳосили зарби бузургиҳои тасодуфии новобаста истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\varphi_{S_n}(t) = M\left(e^{it(X_1+X_2+...+X_n)}\right) = M\left(e^{itX_1} \cdot e^{itX_2} \cdot ... \cdot e^{itX_n}\right) =$$

$$= M\left(e^{itX_1}\right) \cdot M\left(e^{itX_2}\right) \cdot ... \cdot M\left(e^{itX_n}\right) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

4. Функсияи тавсифӣ $\varphi_X(t)$ функсияи мунтазам бефосила мебошад. Дар ҳақиқат,

$$|\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty}|e^{ihx}-1|dF(x) = \int_{|x|<N}|e^{ihx}-1|dF(x) + \int_{|x|\ge N}|e^{ihx}-1|dF(x) = I_1 + I_2.$$

Дар ин ҷо барои $\varepsilon > 0$-и додашуда N-ро чунон калон интихоб намудан мумкин аст, ки $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ шавад ва пас, h-ро чунон хурд интихоб намудан мумкин аст, ки $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ шавад. Дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$|\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)| \le \varepsilon.$$

5. Агар моменти мутлаки тартиби k-уми бузургии тасодуфии X вуҷуд дошта бошад $\left(M\left(|X|^k\right) < \infty,\ k \ge 1\right)$, он гоҳ ҳосилаи бефосилаи тартиби k-уми функсияи тавсифии он $\varphi_X^{(k)}(t)$ вуҷуд дорад ва $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \cdot M\left(X^k\right)$ мешавад. Дар ҳақиқат, азбаски $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx}dF(x)\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}|x|dF(x) = M(|X|) < \infty$, пас $\int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx}dF(x)$ нисбат ба t мунтазам наздикшаванда аст. Бинобар ин ифодаи дар таҳти интеграл бударо дифференсиронидан мумкин аст:

$$\varphi_X'(t) = i\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{itx}dF(x),\ \ \varphi_X'(0) = i\cdot M(X).$$

Муҳокимарониҳои ояндаро дар асоси усули индуксияи математикӣ гузаронидан мумкин аст. Агар барои $l < k$, $\varphi_X^{(l)}(t) = i^l\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x^l\cdot e^{itx}dF(x)$ бошад, он гоҳ

$$\varphi_X^{(l+1)}(t) = i^{l+1}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x^{l+1}\cdot e^{itx}dF(x)$$

мешавад, чунки интеграли ғайрихоси мазкур мунтазам наздикшаванда мебошад. Аз баробарии охирон ҳосил мекунем: $\varphi^{(l+1)}(0) = i^{l+1}\cdot M\left(X^{l+1}\right)$. Аз ин хосият чунин хулоса мебарояд, ки агар $M\left(|X|^k\right) < \infty$ бошад, он гоҳ дар атрофи нуқтаи $t=0$ функсияи тавсифиро ба қатори зерин паҳн намудан мумкин аст:

$$\varphi_X(t)=1+\sum_{j=1}^{k}\frac{(it)^j}{j!}M\left(X^j\right)+o\left(\left|t^k\right|\right).$$

6. Агар $X\geq 0$ бошад, он гоҳ $\varphi_X(\lambda)$ дар ҳамвории комплексии λ, ҳангоми $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ муайян мебошад. Дар ин ҳолат $\left|\varphi_X(\lambda)\right|\leq 1, \varphi_X(\lambda)$ дар соҳаи $\operatorname{Im}\lambda>0$ функсияи аналитикӣ ва дар соҳаи $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ функсияи бефосила мебошад. Дар ҳақиқат, аналитикӣ будани функсияи тавсифӣ аз имконпазирии дифференсиронӣ дар таҳти интеграли

$$\varphi_X(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{i\lambda x}dF(x),$$

дар мавриди $\operatorname{Im}\lambda>0$ ҳосил мешавад. Бефосилагии функсияи тавсифӣ монанди хосияти 4-ум исбот карда мешавад.

7. $\overline{\varphi_X(t)}=\varphi_X(-t)=\varphi_{-X}(t)$

ки дар ин ҷо рамзи « $\overline{\quad}$ » функсияи комплексии ҳамроҳшударо ифода мекунад.

Исботи ин хосият аз баробарии зерин ҳосил мешавад: $\overline{\varphi_X(t)}=\overline{M\left(e^{itX}\right)}=M\left(\overline{e^{itX}}\right)=M\left(e^{-itX}\right)$. Аз ин хосият чунин хулоса мебарояд, ки агар бузургии тасодуфии X симметрӣ бошад (яъне қонуни тақсимоташ монанди қонуни тақсимоти $-X$ бошад), он гоҳ функсияи тавсифии он функсияи ҳақиқӣ аст. Баръакси ин тасдиқот низ ҷой дорад.

Қимати миёна ва дисперсияи бузургии тасодуфиро бо ёрии ҳосила аз логарифмаи функсияи тавсифӣ бо осонӣ муайян намудан мумкин аст. Бигузор, $\psi(t)=\ln\varphi_X(t)$ бошад. Он гоҳ

$$\psi'(t)=\frac{\varphi_X'}{\varphi_X(t)}\text{ ва }\psi''(t)=\frac{\varphi_X''(t)\cdot\varphi_X(t)-[\varphi_X'(t)]^2}{\varphi_X^2(t)}.$$

Акнун баробариҳои $\varphi_x(0)=1$ ва $\varphi^{(k)}(0)=i^k\cdot M(X^k)$ -ро ба инобат гирифта ҳосил мекунем:

$$M(X)=\frac{1}{i}\psi'(0) \text{ ва } D(X)=-\psi''(0). \qquad (5.15)$$

Таъриф. Ҳосилаи тартиби k-ум аз логарифмаи функсияи тавсифӣ дар нуқтаи $t=0$ $\left(\psi^{(k)}(0)\right)$, ки ба i^k зарб карда шудааст *семиинвариантаи тартиби k-уми бузургии тасодуфӣ* номида мешавад.

Аз хосияти 3-юми функсияҳои тавсифӣ маълум мегардад, ки ҳангоми ҷамъ намудани бузургиҳои тасодуфии новобаста семиинвариантҳои онҳо низ ҷамъ карда мешаванд. Аз баробариҳои (5.15) дидан мумкин аст, ки семиинвариантҳои тартиби 1-ум ва 2-юми бузургии тасодуфӣ мувофиқан ба қимати миёна ва дисперсияи он баробар мебошанд.

Мисоли 1. Бузургии тасодуфии X ба қонуни тақсимоти биномиалӣ бо параметрҳои (n,p) итоат менамояд. Функсияи тавсифии он муайян карда шавад.

Ҳал. Маълум, ки X шумораи пайдошавии ҳодиса дар n санҷишҳои новобаста мебошад. Бинобар ин X-ро ҳамчун суммаи n бузургиҳои новобастаи $X_1,X_2,...,X_n$ навиштан мумкин аст, ки ҳар яки онҳо танҳо ду қимати 1 ё 0 - ро мувофиқан бо эҳтимолиятҳои p ва $q=1-p$ қабул менамоянд: $X=X_1+X_2+...+X_n$.

Функсияи тавсифии X_k-ро $(k=1,2,...,n)$ муайян мекунем: $\varphi_{X_k}(t)=M\left(e^{itX_k}\right)=e^{it\cdot0}\cdot q+e^{it\cdot1}\cdot p=q+p\cdot e^{it}$. Пас, мувофиқи хосияти 3-юми функсияҳои тавсифӣ:

$$\varphi_X(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)=\left(q+p\cdot e^{it}\right)^n.$$

Мисоли 2. Бузургии тасодуфии X ба конуни таксимоти Пуассон бо параметри $\lambda > 0$ итоат мекунад. Функсияи тавсифии он муайян карда шавад.

Ҳал. Маълум, ки X қиматҳои бутуни k-ро мувофикан бо эҳтимолиятҳои

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

$(k = 0,1,2,...;\ \lambda > 0$-доимӣ$)$ қабул менамояд. Дар асоси баробарии (5.13) ҳосил мекунем:

$$\varphi_X(t) = M\left(e^{itX}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \cdot P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \cdot e^{it}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda + \lambda e^{it}} = e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)}.$$

Ҳамин тавр,

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)}.$$

Мисоли 3. Бузургии тасодуфии X дар фосилаи $(-a, a)$ ба конуни тақсимоти мунтазам итоат мекунад. Функсияи тавсифии он муайян карда шавад.

Ҳал. Маълум, ки функсияи зичии таксимоти X чунин намуд дорад: $f(x) = \dfrac{1}{2a}$, агар $x \in (-a, a)$ бошад ва $f(x) = 0$, агар $x \notin (-a, a)$ бошад. Пас, мувофиқи формулаи (5.14) ҳосил мекунем:

$$\varphi_X(t) = \int_{-a}^{a} e^{itx} \cdot \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} e^{itx} dx = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{it} \int_{-a}^{a} e^{itx} d(itx) = \frac{1}{at} \cdot \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2i} = \frac{\sin(at)}{at}.$$

Ҳамин тавр,

$$\varphi_X(t) = \frac{\sin(at)}{at}.$$

Мисоли 4. Бузургии тасодуфии X ба конуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (a, σ) итоат менамоянд. Функсияи тавсифии он муайян карда шавад.

Ҳал. Маълум, ки функсияи зичии тақсимоти X чунин намуд дорад:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Формулаи (5.14)-ро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\varphi_X(t)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Барои ҳисоб намудани ин интеграл гузориши

$$z=\frac{x-a}{\sigma}-it\sigma$$

-ро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\varphi_X(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty-it\sigma}^{\infty-it\sigma}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Маълум аст, ки барои ҳаргуна α - и ҳақиқӣ $(\alpha=t\sigma)$ $\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$. Пас, $\varphi_X(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$.

§ 9. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Ҳангоми бозии баскетбол ба тӯрхалта ду маротиба тӯб ҳаво дода мешавад. Ҳар дафъа эҳтимолияти ба тӯрхалта дохил шудани тӯб ба 0,4 баробар аст. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дискретии X - шумораи ба тӯрхалта дохил шудани тӯб тартиб дода шавад.

Ҷавоб:

X	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

Масъалаи 2. Дар гурӯҳи асбобҳои мавҷудбуда 10%-ашон нуқсондор мебошанд. Аз ин гурӯҳ тасодуфан 4 асбоб гирифта мешавад. Қонуни тақсимоти биномиалии бузургии тасодуфии X -шумораи асбобҳои нуқсондорро дар байни 4 асбоби гирифташуда тартиб диҳед.

Ҷавоб:

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0.0486	0,0036	0,0001

Масъалаи 3. Аз қуттие, ки m кураи сафед ва n кураи сиёҳ дорад, то пайдо шудани кураи сафед яктогӣ кура гирифта мешавад. Интизорияти математикӣ ва дисперсияи шумораи кураҳои гирифташударо ёбед, агар маълум бошад, ки ҳар як кураи гирифташуда боз ба қуттӣ баргардонида мешавад.

Ҷавоб:

$$M(X)=\frac{n}{m};\ D(X)=\frac{n(m+n)}{m^2}.$$

Масъалаи 4. Муаллими имтиҳонгиранда ба донишҷӯ саволҳои иловагӣ медиҳад. Эҳтимолияти он ки донишҷӯ ба ҳар гуна саволи додашуда ҷавоб дода метавонад, ба 0,9 баробар аст. Он вақте, ки донишҷӯ ба ягон саволи навбатӣ ҷавоб дода наметавонад, муаллим имтиҳонгириро ба охир мерасонад. Талаб карда мешавад: а) қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии x -шумораи саволҳои иловагӣ тартиб дода шавад; б) адади эҳтимолноктарини шумораи саволҳои иловагӣ муайян карда шавад.

Ҷавоб: а)

X	1	2	3	....	n	....
P	0,1	0,09	0,081	....	$0.9^{n-1}\cdot 0{,}1$	....

б) $R_0=1$.

Масъалаи 5. Қонунҳои тақсимоти бузургиҳои тасодуфии новобастаи X ва $У$ дода шудаанд:

X	-4	0	4
P	0,25	0,5	0,25

$У$	2	4
P	0,5	0,5

Қонуни тақсимоти миёнаи арифметикии онҳоро тартиб дода, инизорияти математикӣ ва дисперсияи онро ҳисоб кунед.

Ҷавоб: $M\left(\frac{X+У}{2}\right)=1{,}5;\quad D\left(\frac{X+У}{2}\right)=2{,}25.$

$\frac{X+У}{2}$	-1	0	1	2	3	4
P	0,125	0,125	0,25	0,25	0,125	0,125

Масъалаи 6. Тангаи симметрӣ 400 маротиба партофта мешавад. Бузургии тасодуфии X шумораи

пайдошавии рӯяи рақамдор мебошад. Интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратии ин бузургии тасодуфӣ ёфта шавад.

Масъалаи 7. Эҳтимолияти ба шаст афтодани моҳӣ барои ҳар як маротиба партофтани шаст ба 0,25 баробар аст. 40 маротиба шаст партофтанд. Шумораи тахминии моҳиҳои дошташӯдаро ёбед.

Масъалаи 8. Интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратии бузургии тасодуфии бо қонуни биномиалӣ тақсимшударо ёбед, агар

1) $n = 600,\ p = 0{,}4$; 2) $n = 50,\ q = 0{,}2$ бошад.

БОБИ VI. ТЕОРЕМАҲОИ ҲУДУДИИ НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

Яке аз масъалаҳои асосии назарияи эҳтимолият аз муайян намудани қонуниятҳое иборат мебошад, ки дар ҳолати иҷро шудани онҳо эҳтимолияти рӯй додани ҳодисаи муайян ба 1 наздик мешавад. Алалхусус, қонуниятҳое, ки дар натиҷаи ҷамъ шудани миқдори зиёди бузургиҳои тасодуфӣ пайдо мешаванд, аҳамияти калони амалӣ доранд. Гурӯҳи теоремаҳои назарияи эҳтимолият, ки қонуниятҳои характери устуворӣ гирифтани суммаи миқдори зиёди бузургиҳои тасодуфиро (ба ягон адади доимӣ наздик шудани ин суммаро) муайян мекунанд, *қонуни ададҳои калон* ном дорад.

Масъалаи дигари назарияи эҳтимолият, ки низ аҳамияти калони амалӣ дорад, аз муайян намудани қонуни тақсимоти суммаи миқдори зиёди бузургиҳои тасодуфӣ иборат мебошад. Теоремаҳое, ки шартҳои наздикшавии қонуни тақсимоти суммаи миқдори зиёди бузургиҳои тасодуфиро ба қонуни тақсимоти нормалӣ муайян мекунанд, *теоремаҳои марказии назарияи эҳтимолият* номида мешаванд. Пеш аз шинос шудан бо баъзе аз теоремаҳои марказии назарияи эҳтимолият ва теоремаҳо дар бораи қонуни ададҳои калон, якчанд нобаробариҳоро, ки барои исботи ин теоремаҳо заруранд, дида мебароем.

§1. НОБАРОБАРИҲОИ МАРКОВ ВА ЧЕБИШЕВ

Теорема. Барои ҳаргуна бузургии тасодуфии X, ки барои он $M(X)$ вуҷуд дорад ва барои ҳаргуна адади $\varepsilon > 0$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{M(|X|)}{\varepsilon}. \qquad (6.1)$$

Исбот. Бигузор, барои бузургии тасодуфии дискретии X, $P\{X=x_i\}=p_i$, $i=1,2,...$, $\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$ бошад. Он гоҳ, эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи $\{|X|\geq\varepsilon\}$ ба суммаи эҳтимолиятҳои p_i, ки барои онҳо $x_i\notin(-\varepsilon,\varepsilon)$ аст, баробар мебошад. Маълум, ки барои ҳаргуна $x_i\notin(-\varepsilon,\varepsilon)$ нобаробарии $|x_i|/\varepsilon\geq1$ ҷой дорад. Ин нобаробариро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем:

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}=\sum_{i:|x_i|\geq\varepsilon}p_i\leq\sum_{i:|x_i|\geq\varepsilon}\frac{|x_i|}{\varepsilon}\cdot p_i\leq\sum_{i:|x_i|\geq\varepsilon}\frac{|x_i|}{\varepsilon}\cdot p_i+$$

$$+\sum_{i:|x_i|<\varepsilon}\frac{|x_i|}{\varepsilon}\cdot p_i=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\cdot p_i=\frac{M(|X|)}{\varepsilon}.$$

Нобаробарии (6.1) барои бузургии тасодуфии дискретии X исбот шуд. Ба ҳамин монанд, ин нобаробариро барои бузургии тасодуфии бефосила низ исбот намудан мумкин аст. Нобаробарии (6.1) -ро *нобаробарии Марков* меноманд. Аз хосияти ҳодисаҳои ба ҳам муқобил ва нобаробарии (6.1) истифода бурда, намуди дигари нобаробарии Марковро ҳосил мекунем:

$$P\{|X|<\varepsilon\}=1-P\{|X|\geq\varepsilon\}\geq1-\frac{M(|X|)}{\varepsilon} \text{ ё } P\{|X|<\varepsilon\}\geq1-\frac{M(|X|)}{\varepsilon} \qquad (6.1')$$

Мисоли 1. Ба ҳисоби миёна шумораи солонаи рӯзҳои боронӣ дар як минтақа ба 60 баробар аст. Ба эҳтимолияти он, ки дар ин минтақа рӯзҳои боронӣ дар як сол аз 100 рӯз кам намешавад, баҳо дода шавад.

Ҳал. Бо X шумораи рӯзҳои борониро ишора мекунем. Мувофиқи шарти мисол $M(X)=60$ ва $\varepsilon=100$ аст. Дар асоси нобаробарии (6.1):

$$P(X \geq 100) \leq \frac{60}{100} = 0{,}6.$$

Мисоли 2. Вазни миёнаи 1 дона афлесун ба 150г. баробар аст. Ба эҳтимолияти он, ки вазни афлесуни ба таври ихтиёрӣ гирифташуда аз 200г. кам мешавад, баҳо дода шавад.

Ҳал. Бузургии тасодуфӣ – вазни афлесунро бо x ишора мекунем. Мувофиқи шарти мисол $M(X) = 150$, $\varepsilon = 200$ аст. Дар асоси нобаробарии (6.1′):

$$P(X < 200) \geq 1 - \frac{1}{200} \cdot 150 = 1 - \frac{3}{4} = 0{,}25.$$

Нобаробариҳои Чебишев. Маълум, ки ҳодисаи $\{|X| \geq \varepsilon\}$ ба ҳодисаи $\{X^2 \geq \varepsilon^2\}$ баробаркувва мебошад. Нобаробарии (6.1) барои ҳодисаи $\{X^2 \geq \varepsilon^2\}$ чунин намуд дорад:

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} = P\{X^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{M(X^2)}{\varepsilon^2}. \qquad (6.2)$$

Нобаробарии (6.2)-ро барои бузургии тасодуфии $X - M(X)$ истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M(X - M(X))^2 = \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{ё}$$

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (6.3)$$

Нобаробарии ҳосилшударо *нобаробарии Чебишев* меноманд.

Мисол. Бузургии тасодуфии X дорои қимати миёнаи $M(X)$ ва тамоили миёнаи квадратии σ мебошад. Нобаробарии Чебишевро истифода намуда, ба эҳтимолияти он, ки қимати мутлақи фарқи бузургии тасодуфӣ аз қимати миёнааш на кам аз сечандаи тамоили миёнаи квадратиаш мешавад, баҳо диҳед.

Ҳал. Аз нобаробарии (6.3) истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$P\{|X-M(X)|\geq 3\sigma\}\leq\frac{1}{9\sigma^2}\cdot D(X)=\frac{1}{9}.$$

Ҳамин тавр, эҳтимолияти он, ки қимати мутлақи фарқи ҳар гуна бузургии тасодуфӣ аз қимати миёнааш аз сечандаи тамоили миёнаи квадратиаш кам намешавад, ба $\frac{1}{9}$ баробар аст.

Ин қоидаро *қоидаи* 3σ меноманд. Хосияти ҳодисаҳои ба ҳам муқобил ва нобаробарии (6.3)-ро истифода намуда, нобаробарии Чебишевро бо тарзи дигар навиштан мумкин аст:

$$P\{|X-M(X)|<\varepsilon\}=1-P\{|X-M(X)|\geq\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

ё

$$P\{|X-M(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Мисоли 3. n- санҷиши новобаста гузаронида мешавад ва эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A дар ҳар як санҷиш ба $p=0{,}7$ баробар аст. Шумораи камтарини санҷишҳоро ёбед, ки барои онҳо бо эҳтимолияти 0,95 нобаробарии $\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}01$ иҷро шавад.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $p=0{,}7$; $q=1-p=1-0{,}7=0{,}3$; $\varepsilon=0{,}01$ аст. Бояд хурдтарин адади n -ро ёбем, ки барои он нобаробарии

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}01\right\}\geq 0{,}95$$

иҷро шавад. Мувофиқи нобаробарии Чебишев

$$1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\geq 0{,}95\Rightarrow 1-\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{n\cdot 0{,}01^2}\geq 0{,}95\Rightarrow\frac{0{,}21}{0{,}0001\cdot n}\leq 0{,}05,$$

$$0{,}0001n\geq\frac{0{,}21}{0{,}05}=\frac{21}{5},\ n\geq\frac{21}{5\cdot 0{,}0001}=\frac{210000}{5}=42000.$$

Ҷавоб: бояд на камтар аз 42000 санҷиш гузаронида шавад.

§ 2. ҚОНУНИ АДАДҲОИ КАЛОН

Таъриф. Пайдарпаии бузургиҳои $\{X_n\}$ аз рӯи эҳтимолият ба адади a наздик мешаванд, агар барои адади ихтиёрии мусбати кифоя хурди ε эҳтимолияти нобаробарии $|X_n - a| < \varepsilon$ $\left(ё\ |X_n - a| \leq \varepsilon\right)$ бо зиёдшавии n ба 1 майл кунад, яъне

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - a| \leq \varepsilon\right) = 1.$$

Теоремаи Чебишев. Агар бузургиҳои тасодуфии новобастаи X_i, $i = \overline{1,n}$ дорои интизориятҳои математикии $a_i = M(X_i)$, $i = \overline{1,n}$ ва дисперсияҳои $D(X_i)$, $i = \overline{1,n}$ бошанд ва дисперсияҳои онҳо бо як адади C маҳдуд бошанд, он гоҳ барои адади мусбати ихтиёрии ε нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (6.4)$$

Ин теоремаро *қонуни ададҳои калон дар шакли Чебишев* меноманд.

Дар нобаробарии (6.4) ҳангоми $n \to \infty$ ба ҳудуд мегузарем:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1.$$

Вале, эҳтимолият аз 1 калон намешавад. Бинобар ин,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \varepsilon\right) = 1. \qquad (6.5)$$

Аз теоремаи Чебишев дида мешавад, ки новобаста аз он, ки ҳар як бузургии тасодуфии новобастаи X_i қиматҳои аз интизорияти математикиаш $M(X_i)$ хеле дурро қабул мекунад, миёнаи арифметикии миқдори кифоя калони бузургиҳои тасодуфии X_i, бо эҳтимолияти ба 1 баробар, ба миёнаи арифметикии интизориятҳои математикии онҳо наздик мешавад. Бинобар ин, теоремаи Чебишев аҳамияти калони амалӣ дорад.

Агар бузургиҳои тасодуфии $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ қонуни тақсимоти якхела дошта бошанд, он гоҳ қонуни ададҳои калон намуди зеринро мегирад.

Теорема. Агар бузургиҳои тасодуфии $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ ҷуфт-ҷуфт новобаста бошанд ва қонуни тақсимоти якхела дошта бошанд $(M(X_i) = a,\ D(X_i) = \sigma^2,\ i = \overline{1,n})$, он гоҳ барои ҳаргуна адади $\varepsilon > 0$ муносибати ҳудудии зерин ҷой дорад:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \le \varepsilon\right) = 1. \qquad (6.6)$$

Аз ин баробарӣ бармеояд, ки ҳангоми кифоя калон будани шумораи бузургиҳои тасодуфӣ n, қимати миёнаи арифметикии онҳо, бо эҳтимолияти ба 1 баробар аз бузургии доимии a ба бузургии кифоя хурд фарқ мекунад.

Қайд бояд кард, ки баъзе аз бузургиҳои тасодуфии X_i, $i = \overline{1,n}$ метавонанд ба бузургии кифоя калон аз a фарқ намоянд, вале қимати миёнаи арифметикии онҳо, ки худ бузургии тасодуфӣ аст, дорои хосияти сифатан нав мешавад. Ин дуршавиҳо аз ҳисоби байни ҳам ихтисоршавии қиматҳои манфӣ ва мусбат аз байн рафта, ҳангоми кифоя калон будани n қимати миёнаи бузургиҳои тасодуфӣ амалан доимӣ мешавад, ки ин *устувории қимати миёнаи бузургиҳои тасодуфиро* ифода менамояд.

Ин теорема дар *усули интихобии омори математикӣ* васеъ татбиқ карда мешавад. Маҳз дар асоси ҳамин теорема, дар бисёр масъалаҳои амалӣ, ба сифати қимати матлуби бузургии тасодуфии ченшаванда, қимати миёнаи арифметикии натиҷаҳои якчанд ченкуниро қабул менамоянд.

Теоремаи Бернулли (1654-1705, математики швейтсарӣ). Агар дар ҳамаи n санҷишҳо ҳодисаи A бо эҳтимолияти доимии p рӯй диҳад, он гоҳ эҳтимолияти он ки дуршавии зудӣ аз эҳтимолияти p бо бузургии мутлақаш аз адади мусбати ε зиёд намешавад, аз фарқи $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ зиёд аст:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Ин теоремаро *қонуни ададҳои калон дар шакли Бернулли* меноманд. Агар дар ин нобаробарӣ ҳангоми $n\to\infty$ ба ҳудуд гузарем, пас $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=1$ мешавад.

Аз ин теорема дида мешавад, ки агар эҳтимолияти ҳодисаи тасодуфии A дар ҳамаи санҷишҳо доимӣ бошад, он гоҳ ҳангоми номаҳдуд зиёд шудани шумораи санҷишҳо бо эҳтимолияти ба як баробар тасдиқ кардан мумкин аст, ки фарқи зудии нисбии бузургии тасодуфӣ аз эҳтимолияти он бениҳоят хурд аст.

Теоремаи Пуассон. Агар n санҷишҳои новобаста гузаронида шаванд ва эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A дар санҷиши k - ум ба p_k баробар бошад, он гоҳ ҳангоми зиёд шудани n зудии нисбии рӯйдиҳии ҳодиса $\frac{m}{n}$ аз рӯи эҳтимолияташ ба миёнаи арифметикии эҳтимолиятҳои p_k, $k=\overline{1,n}$ майл мекунад, яъне

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right|\le\varepsilon\right\}=1.$$

Теоремаи Пуассон ҳолати хусусии теоремаи Чебишев мебошад. Дар ҳақиқат, агар бузургии $X_к (к = \overline{1,n})$ - ро, ки ба миқдори рӯйдиҳии ҳодисаи A дар санҷиши $к$-ум баробар аст, дохил намоем, пас маълум мебошад, ки $M(X_к) = p_к;\ D(X_k) = p_k \cdot q_k \le 1$.

Теоремаи оянда теоремаи Чебишевро барои бузургиҳои тасодуфии вобаста васеъ менамояд.

Теоремаи Марков. Агар бузургиҳои тасодуфии $X_1, X_2, ..., X_n$ вобаста бошанд ва ҳангоми $n \to \infty$ $\dfrac{D\left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right]}{n^2} \to 0$, он гоҳ миёнаи арифметикии ин бузургиҳои тасодуфӣ, аз рӯи эҳтимолияташ, ба миёнаи арифметикии қиматҳои миёнаи онҳо майл мекунад, яъне

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| \le \varepsilon\right\} = 1.$$

§3. ТЕОРЕМАИ ҲУДУДИИ МАРКАЗӢ

Аз теоремаҳои қонуни ададҳои калон дида мешавад, ки қонуниятҳои эҳтимолӣ дар натиҷаи гузаронидани миқдори зиёди санҷишҳои такрорӣ ошкор мегарданд. Аз тарафи дигар, бисёр масъалаҳои назарияи эҳтимолият ва омори риёзӣ бо омӯзиши суммаи бузургиҳои тасодуфӣ вобастаанд. Бинобар ин, яке аз масъалаҳои асоситарини назарияи эҳтимолият аз ёфтан ва омӯхтани қонуни тақсимоти суммаи миқдори зиёди бузургиҳои тасодуфӣ иборат аст. Ин масъала ҳалли худро *дар теоремаҳои ҳудудии марказӣ* ёфтааст. Дар ин ҷо як ҳолати хусусии онро беисбот меорем, ки он ҳам барои бузургиҳои тасодуфии дискретӣ ва ҳам барои бузургиҳои тасодуфии бефосила ҷой дорад. Дар амалия аз ин теорема ҳангоми $n \ge 10$ истифода кардан мумкин аст.

Теоремаи ҳудудии марказӣ. Агар пайдарпаии бузургиҳои тасодуфии новобастаи $X_i, i=\overline{1,n}$ дорои қонуни тақсимоти якхела бо интизорияти математикии $a=M(X_i), i=\overline{1,n}$ ва дисперсияи $\sigma^2=D(X_i), i=\overline{1,n}$ бошанд, он гоҳ ҳангоми беҳад афзудани шумораи санҷишҳо n қонуни тақсимоти суммаи нормиронидашудаи $Y_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)$ бемайлон ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (0,1) наздик мешавад, яъне

$$P\{Y_n\in(\alpha,\beta)\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ .$$

Теоремаи интегралии Муавр-Лаплас ҳолати хусусии теоремаи овардашуда мебошад. Дар ҳақиқат теоремаи интегралии Муавр-Лапласро дар намуди зерин ҳам пешниҳод намудан мумкин аст.

Теоремаи Муавр-Лаплас. Агар n санҷишҳои новобаста гузаронида шаванд, ки дар ҳар яки онҳо ҳодисаи A бо эҳтимолияти доимии аз 0 ва 1 фарққунандаи p рӯй диҳад ва X миқдори рӯйдиҳии ҳодисаи A дар n санҷишҳо бошад, он гоҳ ҳангоми кифоя калон будани n баробарии тақрибии зерин ҷой дорад:

$$P\left\{\alpha<\frac{X-np}{\sqrt{npq}}<\beta\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{\frac{-x^2}{2}}dx,\quad q=1-p$$

Исбот. Бузургиҳои тасодуфии $X_\kappa(\kappa=1,2,...,n)$-ро, ки ба миқдори рӯйдиҳии ҳодисаи A дар санҷиши κ-ум баробар аст, дохил менамоем. Он гоҳ

$$X=\sum_{\kappa=1}^{n}X_\kappa.$$

Дар асоси теоремаи овардашуда, қонуни тақсимоти суммаи нормиронидашуда

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{X_\kappa - M(X_\kappa)}{\sqrt{D(X_k)}} = \frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

ҳангоми зиёд шудани n ба қонуни тақсимоти нормалӣ ба параметрҳои $a=0$ ва $\sigma^2=1$ наздик мешавад. Маълум, ки бузургии тасодуфии X ба конуни тақсимоти биномиалӣ бо параметрҳои n ва p итоат менамояд. Бинобарин, $M(X)=n\cdot p$, $D(X)=npq$, ки дар ин ҷо $q=1-p$. Ҳамин тавр, $Y_n = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$. Пас, $P\left\{\alpha < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \beta\right\} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{\frac{-x^2}{2}}dx.$

Теорема исбот шуд.

Акнун фарз мекунем, ки бузургиҳои тасодуфии новобастаи $X_1, X_2, ..., X_n$ қонунҳои тақсимоти гуногун доранд. Теоремаи зерин шартҳои наздикшавии қонуни тақсимоти суммаи ин бузургиҳои тасодуфиро ба конуни тақсимоти нормалӣ муайян мекунад.

Теоремаи Ляпунов. Агар $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ бузургиҳои тасодуфии новобаста бошанд, моментҳои мутлақи марказии тартиби сеюми онҳо $\mu_\kappa = M|X_\kappa - M(X_\kappa)|^3$ вуҷуд дошта бошанд ва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}D(X_k)\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$ шавад, он гоҳ ҳангоми беҳад зиёд шудани n қонуни тақсимоти суммаи нормиронидашудаи $Y_n = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}D(X_k)}}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - M(X_k))$ бемайлон ба қонуни тақсимоти нормалӣ наздик мешавад.

§4. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. n- санҷиши новобаста гузаронида мешавад ва эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A дар ҳар як санҷиш ба 0,8 баробар аст. Шумораи камтарини санҷишҳоро ёбед, ки барои онҳо бо эҳтимолияти 0,95 нобаробарии $\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}01$ иҷро шавад.

Ҷавоб: бояд на камтар аз 42000 санҷиш гузаронида шавад.

Масъалаи 2. Эҳтимолияти ба амал омадани ҳодисаи A дар ҳар яке аз n санҷишҳои новобаста ба $p=1/3$ баробар аст. Нобаробарии Чебишевро истифода намуда, ба эҳтимолияти он, ки қимати мутлақи фарқи зудии нисбии ҳодиса аз эҳтимолияти рӯйдиҳиаш аз 0,01 хурд мешавад баҳо диҳед, агар шумораи санҷишҳо: а) $n=9000$; б) $n=75000$ бошад. Баҳоҳои ҳосилшударо бо натиҷаҳои истифодабарии теоремаи интегралии Муавр-Лаплас санҷед.

Ҷавоб:

а) $P\left(\left|\frac{R}{9000}-\frac{1}{3}\right|<0{,}01\right)\geq 0{,}75$; $P\left(\left|\frac{R}{9000}-\frac{1}{3}\right|<0.01\right)\approx 0{,}956$;

б) $P\left(\left|\frac{R}{75000}-\frac{1}{3}\right|<0{,}01\right)\geq 0{,}97$; $P\left(\left|\frac{R}{75000}-\frac{1}{3}\right|<0{,}01\right)\approx 1$.

Масъалаи 3. Эҳтимолияти ба нишон расидани тири тӯп дар ҳар як тирпарронӣ ба $P=\frac{1}{3}$ баробар аст. Бигузор, n шумораи тирҳои паронидашуда бошад. Қимати хурдтарини n- ро муайян намоед, ки бо эҳтимолияти на камтар аз 0,99 қимати мутлақи фарқи зуддии ба нишонрасии тири тӯп аз эҳтимолияти он на зиёда аз 0,01 шавад. Масъаларо бо истифодабарии: а) нобаробарии Чебишев; б) формулаи интегралии Муавр – Лаплас ҳал кунед.

Ҷавоб: а) $n\geq 222223$; б) $n\geq 14730$.

Масъалаи 4. Дарозии маҳсулоти истеҳсолшаванда бузургии тасодуфӣ буда, қимати миёнааш ба 90 см баробар аст. Дисперсияи ин бузургии тасодуфӣ ба 0,0225 баробар аст. Ба эҳтимолиятҳои он, ки: а) қимати мутлақи фарқи дарозии маҳсулоти истеҳсолшаванда аз қимати миёнааш аз 0,4 см зиёд намешавад; б) дарозии маҳсулоти истеҳсолшаванда аз 89,7 см то 90,3 см мешавад, баҳо диҳед.

Ҷавоб: а) $P(|X-90|<0{,}4)\geq 0{,}856$; б) $P(89{,}6<X<90{,}3)\geq 0{,}75$.

Масъалаи 5. Миқдори обе, ки дар давоми як шабонарӯз барои корҳои техникии корхона зарур аст бузургии тасодуфӣ буда, интизорияти математикиаш ба $125м^3$ баробар аст. Ба эҳтимолияти он, ки дар шабонарӯзи навбатӣ хароҷоти оби корхона аз $500м^3$ зиёд мешавад, баҳо диҳед.

Ҷавоб: $P\leq 0{,}25$.

Дар масъалаҳои 6-7 оё ба пайдарпаи бузургиҳои тасодуфии новобастаи $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ қонуни ададҳои калонро татбиқ намудан мумкин аст:

Масъалаи 6.

X_n	α	$-\alpha$
P	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Ҷавоб: ҳа (α -бузургии доимӣ).

Масъалаи 7.

X_n	$n+1$	$-n$
P	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Ҷавоб: не.

Масъалаи 8.

X_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
P	$1/2$	$1/2$

Ҷавоб: ҳа.

БОБИ VII. МУҚАДДИМАИ НАЗАРИЯИ РАВАНДҲОИ ТАСОДУФӢ

§1. МАФҲУМИ РАВАНДИ ТАСОДУФӢ

Инкишофи соҳаҳои гуногуни илму техника дар назди назарияи эҳтимолият масъалаҳои наверо гузошт, ки ҳалли онҳо тавассути усулҳои классикии назарияи эҳтимолият имконнопазиранд. Дар он вакте, ки физика ва техника бо омӯзиши равандҳо(ҳодисаҳое, ки бо тағйирёбии вақт тағйир меёбанд) машғул буданд, назарияи эҳтимолият воситаҳои ҳали чунин масъалаҳоро надошт. Бинобар ин зарурияти кор карда баромадани назарияи умумии равандҳои тасодуфӣ, яъне назарияе, ки бояд бузургиҳои тасодуфии аз як ё якчанд параметр вобастаро омӯзад, ба миён омад.

Якчанд мисолҳоеро, ки зарурияти чунин назарияро собит месозанд, меоварем.

Фарз мекунем, ки мо ҳаракати ягон молекулаи газ ё моеъро мушоҳида карда истодаем. Ин молекула дар лаҳзаҳои тасодуфии вақт бо дигар молекулаҳо бармехӯрад ва дар натиҷа суръат ва ҳолати худро тағйир медиҳад. Ҳамин тавр, ҳолати молекула дар ҳар як лаҳзаи вақт ба таври тасодуфӣ тағйир меёбад. Барои омӯхтани ҳодисаҳои бисёри физикӣ ҳисоб намудани эҳтимолияти он, ки миқдори муайяни молекулаҳо дар ягон муддати муайяни вақт, ба масофаи муайян ҷой иваз мекунад, талаб карда мешавад.

Гурӯҳи дигари ниҳоят зарури ҳодисаҳо, ки дар назарияи равандҳои тасодуфӣ омӯхта мешаванд, аз рӯи принсипи тақсимшавии атоми элементи радиоактивӣ сурат мегиранд. Ин ҳодиса аз он иборат аст, ки атоми элементи радиоактивӣ тақсим мешавад ва дар натиҷа ба атоми элементи дигар мубаддал мегардад. Тақсимшавии ҳар як атом дар лаҳзаи ниҳоят кӯтоҳи вақт, ҳамчун таркиш ба амал меояд ва дар натиҷа як миқдор энергия ҷудо мешавад. Мушоҳидаҳои зиёд нишон медиҳанд, ки тақсимшавии атомҳои гуногун дар лаҳзаҳои тасодуфии вақт ба амал меоянд. Ҷойгиршавии ин лаҳзаҳои вақт ба маънои эҳтимолиаш аз якдигар новобаста мебошанд. Барои омӯхтани раванди тақсимшавии атоми элементи радиоактивӣ муайян намудани эҳтимолияти он, ки дар муддати муайяни вақт ин ё он миқдори атомҳо тақсим мешаванд, аҳамияти калон дорад.

Агар ба мисоли овардашуда ба таври формалӣ, аз нуқтаи назари математикӣ назар андозем, он гоҳ маълум мешавад, ки равандҳои тасодуфии бисёре дар табиат ва техника мавҷуданд, ки аз рӯи ҳамин принсип ҷорӣ мешаванд. Масалан, шумораи дархостҳо, ки дар муддати муайяни вақт ба стансияи телефонӣ дохил мешаванд, шумораи риштаи кандашуда дар дастгоҳи бофандагӣ, дар муддати муайяни вақт, тағйирёбии миқдори заррачаҳо, ки дар ягон лаҳзаи вақт, дар ягон соҳаи фазо ҷойгир шудаанд ва ғайраҳо.

Табиист, ки барои ҳамаи мисолҳои овардашуда донистани ҳолати система дар лаҳзаи вақт t_0 имконият намедиҳад, ки ҳолати система дар лаҳзаи ояндаи вақт яккимата муайян карда шавад. Он танҳо имконият медиҳад, ки эҳтимолияти ба ягон ҳолати имконпазир гузаштани система муайян карда шавад.

Таърифи умумии раванди тасодуфиро, ки бо аксиомаҳои назарияи эҳтимолият асоснок шудааст, чунин овардан мумкин аст.

Бигузор, Ω - маҷмӯи ҳодисаҳои элементарӣ ва t-тағйирёбандаи ҳақиқӣ бошад, он *гоҳ раванди тасодуфӣ гуфта* функсияи ду аргументдори $X(t)=\varphi(e, t)$, $(e \in \Omega)$ -ро меноманд.

Барои ҳар як қимати t функсияи $\varphi(e, t)$, танҳо функсия аз e буда, бузургии тасодуфӣ мешавад. Барои ҳар як қимати қайдшудаи e (барои ҳар як ҳодисаи элементарӣ) бошад $\varphi(e, t)$ танҳо аз t вобаста аст, яъне функсияи оддии аз як аргументи ҳақиқӣ вобаста аст. Ҳар яки чунин функсияҳо як иҷрошавии раванди тасодуфии $X(t)$ номида мешавад.

Ҳамин тавр, раванди тасодуфиро ё ҳамчун гурӯҳи бузургиҳои тасодуфӣ, ки аз параметри t вобастаанд $X(t)$, ё ҳамчун гурӯҳи иҷрошавиҳои раванди тасодуфӣ $X(t)$ тасаввур кардан мумкин аст. Табиист, ки барои муайян будани раванди тасодуфӣ зарур аст, ки дар фазои функсионалии иҷрошавиҳои он ченаки эҳтимолият дода шавад.

Дар бисёр масъалаҳои амалӣ тағйирёбандаи t -ро вақт ҳисобида, тағйирёбии раванди тасодуфиро бо гузаштани вақт ифода менамоянд. Агар тағйирёбандаи t қиматҳои дискретӣ қабул намояд, он гоҳ $X(t)$-ро раванди тасодуфӣ бо вақти дискретӣ меноманд. Агар t ҳамаи қиматҳои ягон фосиларо қабул намояд, он гоҳ $X(t)$-ро раванди тасодуфӣ бо вақти бефосила меноманд. Дар навбати худ, агар бузургиҳои тасодуфие, ки раванди тасодуфиро ташкил медиҳанд, қиматҳои дискретӣ қабул намоянд, он гоҳ раванди тасодуфиро дискретӣ меноманд. Дар ҳолати баръакс раванди тасодуфиро бефосила меноманд.

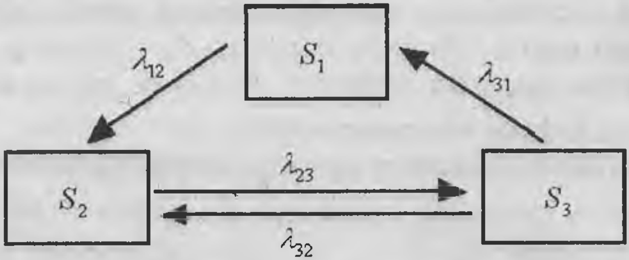
§ 2. РАВАНДИ ТАСОДУФИИ МАРКОВӢ. МУОДИЛАҲОИ КОЛМОГӨРӨВ

Агар маълумотҳои иловагӣ дар бораи ҳолатҳои система дар лаҳзаҳои пештараи вақт эҳтимолияти гузариши системаро аз як ҳолат ба дигар ҳолат тағйир надиҳанд, он гоҳ чунин равандҳои тасодуфиро, аз сабаби монандиашон ба занҷири Марков, равандҳои марковӣ меноманд. Раванди тасодуфии оддитарин ин занҷири

Марков мебошад, ки он ба гурӯҳи равандҳои тасодуфии дискретӣ мансуб мебошад. Ҳоло раванди марковиро бо вақти бефосила дида мебароем. Дар ин ҳолат низ, барои эҳтимолиятҳои ҳолатҳои система $P_i(t)$ шарти $\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$ ҷой дорад, чунки дар лаҳзаи вақти t система ҳатман дар яке аз ҳолатҳои имконпазири худ ҷойгир мешавад. Дар равандҳои тасодуфӣ бо вақти бефосила эҳтимолияти гузариши система аз як ҳолат ба ҳолати дигар дар лаҳзаи додашудаи вақти t ба сифр баробар аст. Бинобар ин бар ивази эҳтимолиятҳои гузариш P_{ij} зичии эҳтимолиятҳои гузариш истифода бурда мешавад.

Зичии эҳтимолияти гузариш λ_{ij} гуфта, ҳудуди нисбати эҳтимолияти гузариши системаро аз ҳолати S_i ба ҳолати S_j, дар муддати вақти Δt, ба дарозии порчаи вақт Δt, ҳангоми $\Delta t \to 0$ меноманд. Ҳамин тавр, $\lambda_{ij} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$, ки дар ин ҷо $P_{ij}(\Delta t)$- эҳтимолияти гузариши система аз ҳолати S_i, дар лаҳзаи вақти t, ба ҳолати S_j пас аз гузаштани вақти Δt мебошад. Зичии эҳтимолияти гузариш танҳо барои $i \neq j$ муайян шудааст. Барои равандҳои марковии якҷинса (эҳтимолиятҳои гузариш аз рақами санҷиш вобаста намебошанд) зичиҳои эҳтимолиятҳои гузариш λ_{ij} аз параметри t вобаста намебошанд. Одатан, барои тадқиқ намудани равандҳои марковӣ схемаи ҳолатҳои имконпазири системаро тасвир менамоянд, ки дар он ҳолатҳои система бо хатҳои самтдор пайваст карда мешаванд. Самти ин хатҳо гузариши системаро аз як ҳолат ба ҳолати дигар муайян мекунанд. Дар болои ин хатҳо зичии эҳтимолияти гузариши мувофиқ навишта мешавад. Чунин схемаро *схемаи қайдкардашудаи система* меноманд.

Агар схемаи қайдкардашудаи система маълум бошад, он ғоҳ эҳтимолиятҳои ҳолатҳои системаро: $P_1(t), P_2(t), ..., P_n(t)$ ҳамчун функсияи тағйирёбандаи вақт муайян намудан мумкин аст. Ин эҳтимолиятҳо муодилаҳои дифференсиалии муайянро қаноат мекунонанд, ки онҳоро *муодилаҳои Колмогоров* меноманд. Ин муодилаҳоро ҳал карда, эҳтимолиятҳои ҳолатҳои системаро муайян намудан мумкин аст.



Расми 5.1

Ҳосил намудани муодилаҳои Колмогоровро дар мисоли мушахас дида мебароем.

Бигузор, система се ҳолатҳои имконпазири S_1, S_2 ва S_3-ро дошта бошад ва гузаришҳо аз S_1 ба S_2, аз S_2 ба S_3, аз S_3 ба S_1 ё аз S_3 ба S_2 имконпазир бошанд. Схемаи қайдкардашудаи ин системаро тасвир менамоем (ниг. ба расми 5.1).

Саравал эҳтимолияти $P_1(t)$ -ро, яъне эҳтимолияти онро, ки система дар лаҳзаи вақти t дар ҳолати S_1 ҷойгир аст, муайян мекунем. Барои ин ба тағйирёбандаи t афзоиши Δt-ро ҳамроҳ намуда, эҳтимолияти онро, ки дар лаҳзаи вақти $t + \Delta t$ система дар ҳолати S_1 мемонад, муайян мекунем. Ин ҳодиса метавонад бо ду тарз рўй диҳад:

1) дар лаҳзаи вақти t система дар ҳолати S_1 ҷойгир буд ва дар муддати вақти Δt аз ин ҳолат набаромад;

2) дар лаҳзаи вақти t система дар ҳолати S_3 ҷойгир буд ва дар муддати вақти Δt ба ҳолати S_1 гузашт.

Эҳтимолияти тарзи якуми рӯйдиҳии ҳодисаро ҳамчун ҳосили зарби $P_1(t)$ ба эҳтимолияти шартии он, ки система дар ҳолати S_1 ҷойгир шудааст ва дар муддати вақти Δt ба ҳолати S_2 намегузарад, муайян мекунем. Маълум, ки ин эҳтимолияти шартӣ ба $1-\lambda_{12}\cdot\Delta t$ баробар аст.

Ба ҳамин монанд, эҳтимолияти тарзи дуюми рӯйдиҳии ҳодиса ба ҳосили зарби $P_3(t)$ ва эҳтимолияти шартии он, ки дар муддати вақти Δt система ба ҳолати S_1 мегузарад, яъне $P_3(t)\cdot\lambda_{31}\cdot\Delta t$ баробар аст. Аз ин ҷо, теоремаи ҷами эҳтимолиятҳоро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)(1-\lambda_{12}\cdot\Delta t)+P_3(t)\lambda_{31}\cdot\Delta t,$$

ё

$$P_1(t+\Delta t)-P_1(t)=-\lambda_{12}\cdot P_1(t)\cdot\Delta t+P_3(t)\cdot\lambda_{31}\cdot\Delta t.$$

Ҳарду тарафи баробарии ҳосилшударо ба Δt тақсим мекунем:

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=-\lambda_{12}\cdot P_1(t)+\lambda_{31}\cdot P_3(t).$$

Дар ин баробарӣ ҳангоми $\Delta t\to 0$ ба ҳудуд гузашта, ҳосил мекунем:

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda_{12}\cdot P_1(t)+\lambda_{31}\cdot P_3(t).$$

Ҳамин тавр, барои $P_1(t)$ муодилаи дифференсиалӣ ҳосил намудем. Ба ҳамин монанд, барои $P_2(t)$ ва $P_3(t)$ муодилаҳои дифференсиалии зеринро ҳосил намудан мумкин аст:

$$\frac{dP_2(t)}{dt}=-\lambda_{23}\cdot P_2(t)+\lambda_{12}\cdot P_1(t)+\lambda_{32}\cdot P_3(t);$$
$$\frac{dP_3(t)}{dt}=-\lambda_{32}\cdot P_3(t)-\lambda_{31}P_3(t)+\lambda_{23}P_2(t).$$

Ба хотири кўтоҳ навиштан, аргументи t-ро нанавишта, системаро дар намуди зерин менависем:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = -\lambda_{12}P_1 + \lambda_{31}P_3, \\ \frac{dP_2}{dt} = -\lambda_{23}P_2 + \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3, \\ \frac{dP_3}{dt} = -\lambda_{32}P_3 - \lambda_{31}P_3 + \lambda_{23}P_2. \end{cases}$$

Муодилаҳои ҳосилшударо *муодилаҳои Колмогоров* меноманд. Ҳалли ин муодилаҳо эҳтимолиятҳои ҳолатҳои система чун функсия аз тағйирёбандаи вақт мебошанд. Шартҳои аввала барои ин муодилаҳо ҳолати аввалаи система мебошанд. Масалан, агар дар вақти $t = 0$ система дар ҳолати S_1 бошад, он гоҳ $P_1(0) = 1$; $P_2(0)$; $P_3(0) = 0$.

§ 3. СЕЛИ ҲОДИСАҲО. РАВАНДҲОИ ПУАССОНӢ

Мафҳуми сели ҳодисаҳоро дохил мекунем.

Таъриф. Сели ҳодисаҳо гуфта, чунин пайдарпаии ҳодисаҳоро меноманд, ки онҳо дар лаҳзаҳои тасодуфии вақт яке аз паси дигаре рўй медиҳанд. Масалан, аз кор бароmадани ягон қисми система, талабнома ба стансияи автоматии телефонӣ, муроҷиат ба ёрии таъҷилӣ, муроҷиат ба устохонаи таъмири телевизор, пойафзол ва ҳоказо.

Сели *ҳодисаҳоро оддитарин* ё пуассонӣ меноманд, агар шартҳои зерин иҷро шаванд:

1) Эҳтимолияти рўйдиҳии ҳодиса аз дарозии фосилаи вақт t вобаста бошад;

2) Эҳтимолияти шумораи рўйдиҳии ҳодисаҳо дар фосилаи ихтиёрии вақт, аз он ки кадом миқдор ҳодисаҳо то саршавии ин фосила рўй додаанд, вобаста набошад;

3) Эҳтимолияти рӯйдиҳии ду ё миқдори зиёди ҳодисаҳо дар фосилаи кӯтоҳи вақт Δt кам буда, чӣ қадаре, ки Δt хурд бошад, ҳамон қадар эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодиса низ хурд шавад.

Фосилаи вақт t -ро ба n ҳисса тақсим мекунем: $\frac{t}{n} = \Delta t$. Бо λ шумораи миёнаи ҳодисаҳоеро, ки дар як воҳиди вақт рӯй медиҳанд, ишора мекунем. Он гоҳ, эҳтимолияти он, ки ҳодиса дар фосилаи Δt як маротиба рӯй медиҳад, тақрибан ба $\frac{\lambda t}{n}$ баробар буда, эҳтимолияти ҳодисаи муқобил тақрибан ба $1 - \frac{\lambda t}{n}$ баробар мешавад. Ҳамин тавр, ҳодисаи A мувофиқан бо эҳтимолияти тақрибии $p = \frac{\lambda t}{n}$ ва $q = 1 - \frac{\lambda t}{n}$ дар ҳар як аз n фосилаи дарозиаш ба $\frac{t}{n} = \Delta t$ баробар буда, ё рӯй медиҳад, ё рӯй намедиҳад.

Эҳтимолияти онро, ки дар m фосилаи вақт ҳодисаи A рӯй медиҳад ва дар $n-m$ фосилаҳои боқимонда рӯй намедиҳад, бо формулаи Бернуллӣ ҳисоб мекунем. Ҳамин тариқ, эҳтимолияти тақрибии онро меёбем, ки ҳодисаи тасодуфии A дар мӯҳлати t расо m маротиба рӯй медиҳад:

$$P_t(m) \approx C_n^m \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m}.$$

Ба сифати қимати ҳақиқии эҳтимолияти $P_t(m)$ ҳудуди зеринро қабул мекунем:

$$P_t(m) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta t \to 0)}} C_n^m \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m}$$

Барои қимати қайдкардашудаи t, $\lambda t = a$ гузошта, ҳудуди ин ифодаро меёбем:

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{a}{n}\right)^m\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} =$$

$$= e^{-a}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^m = e^{-a}\cdot a^m\cdot\frac{1}{m!}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{n^{m-1}}$$

$$= \frac{e^{-a}a^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) = \frac{e^{-a}a^m}{m!}\cdot 1\cdot 1\dots 1 = \frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Ҳамин тавр, барои ёфтани эҳтимолияти матлуб формулаи Пуассонро ҳосил намудем:

$$P_t(m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a} \quad \text{ё} \quad P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

Дар сели ҳодисаҳои оддитарин бо $X(t)$ миқдори ҳодисаҳои дар муддати вақти t рӯйдодаро ишора мекунем. Дар ин ҳолат $X(t)$ раванди тасодуфии марковӣ мебошад. Агар дар ин раванди тасодуфӣ эҳтимолиятҳои ҳолатҳои система бо формулаи Пуассон

$$P_k(t) = P\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

муайян карда шаванд, он гоҳ онро *раванди пуассонӣ* меноманд.

Дар раванди пуассонӣ зичии эҳтимолияти гузариш чунин муайян карда мешавад:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{хангоми } j = i+1, \\ 0, & \text{хангоми } j \neq i+1,\ i = 0,1,2,\dots, \end{cases}$$

яъне аз ҳолати i танҳо ба ҳолати $j = i+1\ (i = 0,1,2,\dots)$ гузаштани система имконпазир аст.

Схемаи қайдкардашудаи раванди пуассонӣ чунин намуд дорад:

$$\boxed{S_0} \xrightarrow{\lambda} \boxed{S_1} \xrightarrow{\lambda} \boxed{S_2} \xrightarrow{\lambda} \boxed{S_3} \xrightarrow{\lambda} \cdots$$

Дар ин ҳолат муодилаҳои дифференсиалии Колмогоров, барои функсияҳои $P_i(t)$ чунин намуд доранд:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda \cdot P_0(t), \\ P_k'(t) = \lambda \cdot P_{k-1}(t) - \lambda \cdot P_k(t),\ k = 1;2,... \end{cases} \tag{7.1}$$

шартҳои аввала:

$$P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 1,2,... \tag{7.2}$$

Системаи муодилаҳои (7.1) бо шартҳои аввалаи (7.2) ҳалли ягонаи

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t};\ k = 0,1,2,... \tag{7.3}$$

-ро дорад.

Мисол. Қимати миёнаи дархостҳо, ки дар як дақиқа ба стансияи телефонӣ дохил мешаванд, ба 3 баробар аст. Эҳтимолияти онро меёбем, ки дар ду дақиқа ба стансияи телефонӣ: а) чор дархост; б) камтар аз чор дархост; в) на камтар аз чор дархост дохил мешавад.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $\lambda = 3, t = 2, k = 4$. Аз формулаи Пуассон истифода мебарем:

а) $P_4(2) = \dfrac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} = \dfrac{1296 \cdot 0{,}0025}{24} = 0{,}135.$

б) Ҳодисаи “камтар аз чор дархост дохил шуд” дар ҳолати рӯй додани яке аз ҳодисаҳои ноҳамҷояи зерин рӯй медиҳад: 1) 3 дархост дохил шуд; 2) 2 дархост дохил шуд; 3) як дархост дохил шуд; 4) ягон дархост дохил нашуд.

Бинобар ин, теоремаи ҷами ҳодисаҳои ноҳамҷояро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$P_{k<4}(2)=P_3(2)+P_2(2)+P_1(2)+P_0(2)=\frac{6^3\cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6^1\cdot e^{-6}}{1!}+$$

$$+\frac{6^0\cdot e^{-6}}{0!}=e^{-6}(36+18+6+1)=0{,}0025\cdot 61=0{,}1525.$$

в) Ҳодисаҳои "камтар аз чор дархост дохил шуд" ва "на камтар аз чор дархост дохил шуд" ба ҳам муқобил мебошанд. Хосияти ҳодисаҳои ба ҳам муқобилро истифода намуда, меёбем:

$$P_{k\geq 4}(2)=1-P_{k<4}(2)=1-0{,}1525=0{,}8475.$$

§ 4. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Қимати миёнаи дархостҳо, ки дар як дақиқа ба стансияи телефонӣ дохил мешавад, ба 2 баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки дар 4 дақиқа ба стансияи телефонӣ: а) 3 дархост; б) камтар аз 3 дархост; в) на камтар аз 3 дархост дохил мешавад.

Ҷавоб: а) $p=0{,}256$; б) $p=0{,}123$; в) $p=0{,}9877$.

Масъалаи 2. Қимати миёнаи дархостҳо ба таксӣ, ки ба нуқтаи танзимот дар давоми як дақиқа дохил мешаванд расо ба се баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки дар давоми 3 дақиқа: а) 5 дархост; б) камтар аз 5 дархост; в) на камтар аз 5 дархост дохил мешаванд.

Масъалаи 3. Таҷҳизот аз 1000 элемент иборат аст, ки ҳар яки онҳо дар муддати вақти t ба эҳтимолияти $p=5\cdot 10^{-3}$ аз кор мебарояд. Эҳтимолияти онро ёбед, ки дар муддати вақти $t=2$:

а) 3 элемент;
б) ақаллан як элемент;
в) на зиёда аз 3 элемент аз кор мебарояд.

БОБИ VIII. БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФИИ БИСЁРЧЕНАКА

§1. МАФҲУМИ БУЗУРГИИ ТАСОДУФИИ БИСЁРЧЕНАКА

Дар бисёр ҳолатҳо натиҷаҳои озмоиш бо якчанд бузургиҳои тасодуфии $X, Y, ..., Z$ тавсиф мешаванд. Дар ин маврид мегӯянд, ки ин бузургиҳои тасодуфӣ системаи $(X, Y, ..., Z)$ - ро ташкил медиҳанд. Барои тавсифи системаи бузургиҳои тасодуфӣ инчунин мафҳумҳои бузургии тасодуфии бисёрченака ё вектори тасодуфӣ низ истифода бурда мешаванд. Ҳар се мафҳум як маъноро, яъне гурӯҳи ба тартиб овардашудаи бузургиҳои тасодуфиро дар ҳамбастагӣ ифода менамоянд.

Масалан, хароҷоти оилаи тасодуфан интихобшуда аз хароҷот ба хӯрокворӣ, сарулибос, пойафзол, нақлиёт ва таъмини маишати оила иборат мебошад. Ба ҳамин монанд ҳосилнокии растанӣ аз обу ҳаво, микдори поруҳои минералӣ, таркиби хок, сифати тухмӣ вобаста мебошад.

Ҳамин тавр, *бузургии тасодуфии* n*-ченака ё вектори тасодуфии* n *-ченака гуфта, гурӯҳи ба тартиб овардашудаи* n *бузургиҳои тасодуфии* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$*-ро* меноманд.

Вектори тасодуфӣ дискретӣ номида мешавад, агар компонентҳои он бузургиҳои тасодуфии дискретӣ бошанд.

Вектори тасодуфӣ бефосила номида мешавад, агар компонентҳои он бузургиҳои тасодуфии бефосила бошанд (таърифи қатъии вектори тасодуфии бефосила, дар оянда бо мафҳуми функсияи зичии тақсимоти вектори тасодуфӣ оварда мешавад).

Қайд менамоем, ки таърифҳои асосии бузургии тасодуфии якченака қариб бе тағйирот ба бузургиҳои тасодуфии n-ченака кӯчонида мешаванд. Дар баробари ин ҳангоми омӯхтани вобастагиҳои компонентҳои вектори тасодуфӣ масъалаҳои нав, ки то ҳоло мо бо онҳо шинос нашудаем, пайдо мешаванд.

Маълум, ки вектори тасодуфии оддитарин вектори тасодуфии 2-ченака мебошад. Бинобар ин хосиятҳои таксимоти вектори тасодуфии 2-ченакаро муфассал дида мебароем, ки онҳо барои ҳаргуна вектори тасодуфии n ченака дуруст мебошанд.

§2. ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ БУЗУРГИИ ТАСОДУФИИ ДУЧЕНАКА. ФУНКСИЯИ ТАҚСИМОТИ ДУЧЕНАКА

Ба монанди қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии якченака, қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дученака гуфта, маълум будани ҳамаи қиматҳои имконпазири ин бузургии тасодуфӣ ва эҳтимолиятҳои ба онҳо мувофиқро дар назар доранд.

Бигузор, бузургиҳои тасодуфии дискретии X ва Y мувофиқан бо қиматҳои имконпазири $x_1, x_2, ..., x_m$ ва $y_1, y_2, ..., y_n$ дода шуда бошанд. Он гоҳ қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y) аз ҷуфти ададҳои (x_i, y_j), $i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,n$ иборат мешаванд. Эҳтимолияти якбора рӯй додани ҳодисаҳои $\{X = x_i\}$ ва $\{Y = y_j\}$ -ро бо $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ ишора мекунем. Он гоҳ конуни таксимоти бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y) -ро бо ҷадвали тасвир намудан мумкин аст: Ҷадвали овардашударо *ҷадвали тақсимоти бузургии тасодуфии дискретии* дученакаи (X,Y) меноманд.

Ин ҷадвал хосиятҳои зерин дорад:

Ҷадвали 1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

1. Азбаски ҳодисаҳои $(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 1,2,...,m;$ $j = 1,2,...,n$ гурӯҳи пурраро ташкил медиҳанд, пас

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = 1.$$

2. Азбаски ҳодисаи $\{X = x_i\}$ ҳатман бо яке аз ҳодисаҳои $\{Y = y_j\}$, $j = 1,2,...,n;$ якҷоя рӯй медиҳад, пас

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i);$$

3. Азбаски ҳодисаи $\{Y = y_j\}$ ҳатман бо яке аз ҳодисаҳои $\{X = x_i\}$, $i = 1,2,...,m;$ якҷоя рӯй медиҳад, пас

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = P(Y = y_j).$$

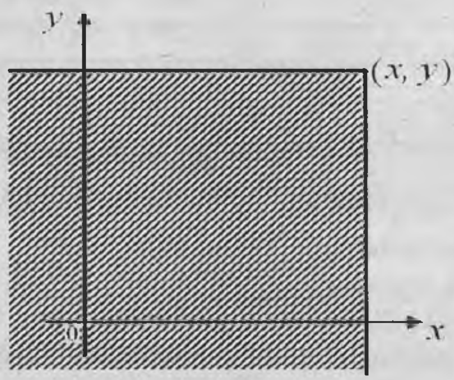
Тарзи дигари тасвири қонуни тақсимот бо ёрии функсияи тақсимот пешниҳод карда мешавад.

Таъриф. Функсияи тақсимоти эҳтимолиятҳои бузургии тасодуфии дученакаи (X, Y) гуфта, функсияи дутағйирёбандаи $F(x, y)$ -ро меноманд, ки ба эҳтимолияти якбора иҷро шудани нобаробариҳои $X < x$ ва $Y < y$ баробар мебошад, яъне

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \qquad (8.1)$$

Функсияи тақсимоти дученака ҳам барои бузургиҳои тасодуфии дискретӣ ва ҳам барои бузургиҳои тасодуфии бефосила вуҷуд дорад.

Аз нуктаи назари геометрӣ функсияи тақсимоти дученака ба эҳтимолияти афтодани нуқтаи (X,Y) ба ҳамвории дар расми 8.1 овардашуда баробар мебошад.



Расми 8.1

Акнун хосиятҳои функсияи тақсимоти дученакаро меоварем, ки аксари онҳо ба хосиятҳои функсияи тақсимоти якченака монанд мебошанд:

1. Агар яке аз аргументҳои $F(x,y)$ ба $+\infty$ майл кунад, он гоҳ функсияи тақсимоти дученака ба функсияи тақсимоти якченакаи компоненти дигари вектори тасодуфӣ табдил меёбад, яъне

$$F(x,+\infty)=F_1(x);\ F(+\infty,y)=F_2(y),$$

ки дар ин ҷо $F_1(x)$ ва $F_2(y)$ мувофиқан функсияҳои тақсимоти якченакаи X ва Y мебошанд.

Исбот. $F(x,+\infty)=P(X<x,Y<+\infty)=P(X<x)=F_1(x)$, чунки ҳодисаи $\{Y<+\infty\}$ эътиборнок мебошад ва бинобар ин ҳодисаҳои $\{X<x,Y<+\infty\}$ ва $\{X<x\}$ баробарқувва мешаванд. Ба ҳамин монанд,

$$F(+\infty,y)=P(X<+\infty,Y<y)=P(Y<y)=F_2(y).$$

2. Агар ҳарду аргументи функсияи $F(x,y)$ ба $+\infty$ майл кунанд, он гоҳ қимати ин функсия ба 1 майл мекунад, яъне $F(+\infty,+\infty)=1$.

Исбот. Исботи ин баробарӣ аз эътиборнок будани ҳодисаи $\{X<+\infty,Y<+\infty\}$ ҳосил мешавад.

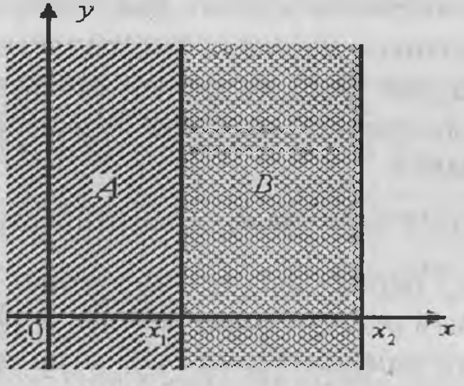
3. Дар ҳолати ба $-\infty$ майл кардани ақаллан яке аз аргументҳои $F(x,y)$, қимати ин функсия ба сифр майл мекунад, яъне $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$.

Исбот. Исботи ин хосият аз имконнопазир будани ҳодисаҳои $\{X<-\infty, Y<y\}$, $\{X<x, Y<-\infty\}$ ва $\{X<-\infty, Y<-\infty\}$ бармеояд.

4. Функсияи тақсимоти дученака нисбат ба ҳар як аргументаш функсияи камнашаванда мебошад, яъне $F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$, агар $x_2>x_1$ бошад, $F(x,y_2)\geq F(x,y_1)$, агар $y_2>y_1$ бошад.

Исбот. Барои исботи ин хосият ҳодисаҳои зеринро дида мебароем:

$$A=\{X<x_1, Y<y\},\ B=\{x_1\leq X<x_2, Y<y\},\ C=\{X<x_2, Y<y\}.$$



Расми 8.2

Чи хеле, ки аз расми 8.2 дида мешавад, нимҳамвориҳои A ва B якдигарро намебуранд ва $A\cup B=C$ мебошад. Бинобар ин, ҳодисаҳои A ва B ноҳамҷоя буда, суммаи онҳо ба ҳодисаи C баробар аст: $C=A+B$

Аз теоремаи ҷами эҳтимолиятҳои ҳодисаҳои ноҳамҷоя истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$P(C)=P(A)+P(B).$$

Аз тарафи дигар

$$P(C) = P(X < x_2, Y < y) = F(x_2, y);$$
$$P(A) = P(X < x_1, Y < y) = F(x_1, y);$$
$$P(B) = P(x_1 \le X < x_2, Y < y).$$

Бинобар ин
$$F(x_2, y) = F(x_1, y) + P(x_1 \le X < x_2, Y < y)$$
ё
$$F(x_2, y) - F(x_1, y) = P(x_1 \le X < x_2, Y < y).$$

Азбаски эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳаргуна ҳодиса адади ғайриманфӣ мебошад, пас
$$F(x_2, y) - F(x_1, y) \ge 0 \text{ ё } F(x_2, y) \ge F(x_1, y).$$

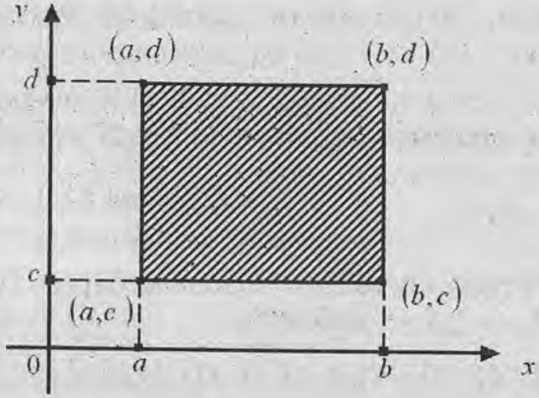
Камнашаванда будани $F(x, y)$ нисбат ба x исбот карда шуд. Ба ҳамин монанд камнашаванда будани ин функсияро нисбат ба y исбот намудан мумкин аст.

5. Эҳтимолияти афтодани нуқтаи тасдуфан ба ҳамворӣ партофташудаи (X, Y) ба дохили росткунҷаи тарафҳояш ба тирҳои координатӣ параллел бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$P(a \le X < b, c \le Y < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c). \qquad (8.2)$$

Исбот. Барои исботи ин хосият дар ҳамвории координатӣ росткунҷаи қуллаҳояш (a, c), (a, d), (b, d), (b, c) - ро тасвир намуда (Расми 8.3), ҳодисаҳои зеринро дида мебароем:

$$A = (a \le X < b, c \le Y < d);$$
$$B = (a \le X < b, Y < c);$$
$$C = (X < a, c \le Y < d);$$
$$D = (X < a, Y < c);$$
$$E = (X < b, Y < d).$$



Расми 8.3

Аз расм дида мешавад, ки ҳодисаи E ба суммаи ҳодисаҳои ноҳамҷояи A, B, C, D баробарқувва аст, яъне

$$E = A + B + C + D.$$

Теоремаи ҷами эҳтимолиятҳои ҳодисаҳои ноҳамҷояро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$P(E) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D).$$

Аз ин ҷо

$$P(A) = P(E) - P(B) - P(C) - P(D). \qquad (8.3)$$

Аз тарафи дигар, мувофиқи таърифи функсияи тақсимоти дученака

$$P(E) = P(X < b, Y < d) = F(b,d),$$

$$P(B) = P(a \le X < b, Y < d) = F(b,c) - F(a,c),$$

$$P(C) = P(X < a, c \le Y < d) = F(a,d) - F(a,c),$$

$$P(D) = P(X < a, Y < c) = F(a,c).$$

Қиматҳои эҳтимолиятҳои ҳосилшударо ба баробарии (8.3) гузошта, баробарии (8.2)-ро ҳосил мекунем.

6. Функсияи $F(x, y)$ нисбат ба ҳар як аргументаш аз тарафи чап бефосила мебошад, яъне

$$\lim_{\substack{x \to a-0 \\ y \to b-0}} F(x, y) = F(a, b).$$

Исботи ин хосият монанди исботи аз чап бефосила будани функсияи тақсимоти якченака гузаронида мешавад.

Мисол. Эҳтимолияти афтодани нуқтаи тасодуфан партофташудаи (X,Y)-ро ба дохили росткунҷаи бо хатҳои $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$ маҳдуд ёбед, агар маълум бошад, ки функсияи тақсимоти дученака намуди зерин дорад:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} \text{ агар } x\geq 0, y\geq 0 \text{ бошад},\\ 0 \text{ агар } x<0 \text{ ё } y<0 \text{ бошад}.\end{cases}$$

Ҳал. Аз формулаи (8.2) истифода мебарем. Дар мисоли мо $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=5$ мебошад.

$$F(1\leq X<2, 3\leq Y<5)=F(2,5)-F(1,5)-F(2,3)+F(1,3)=\left(1-2^{-2}-2^{-5}+2^{-2-5}\right)-$$
$$-\left(1-2^{-1}-2^{-5}+2^{-1-5}\right)-\left(1-2^{-2}-2^{-3}+2^{-2-3}\right)+\left(1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-1-3}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}-1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=$$
$$=\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}=\frac{1-2-4+8}{2^7}=\frac{3}{2^7}=\frac{3}{128}.$$

§3. ЗИЧИИ ТАҚСИМОТИ БУЗУРГИИ ТАСОДУФИИ ДУЧЕНАКА

Таъриф. Функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии дученакаи $(X,У)$ гуфта, ҳудуди нисбати эҳтимолияти афтодани нуқтаи (x,y) ба дохили росткунҷаи тарафҳояш ба Δx ва Δy баробарро ба масоҳати ин росткунҷа, дар вақти ба сифр майл кардани тарафҳои ин росткунҷа меноманд.

Функсияи зичии тақсимоти дученакаро бо $f(x,y)$ ишора мекунем. Он гоҳ мувофиқи таърифи овардашуда

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x<X<x+\Delta x,\ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x\cdot\Delta y}.$$

Хосияти 5-уми функсияи тақсимоти дученакаро ба инобат гирифта, ин ифодаро чунин навиштан мумкин аст:

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)}{\Delta x\cdot\Delta y}.$$

Аз ин ҷо чунин хулоса мебарояд, ки агар ҳосилаҳои тартиби дуюми функсияи тақсимот вуҷуд дошта бошанд, он гоҳ функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии дученака ба ҳосилаи омехтаи тартиби дуюми функсияи тақсимоти ин бузургии тасодуфӣ баробар аст:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \qquad (8.4)$$

Акнун мо метавонем таърифи қатъии вектори тасодуфии бефосилаи (X,Y)-ро оварем.

Таъриф. Ҳар гуна вектори тасодуфии (X,Y) бефосила номида мешавад, агар барои он функсияи зичии тақсимоти $f(x,y)$ вуҷуд дошта бошад.

Функсияи зичии тақсимотро истифода намуда, эҳтимолияти онро, ки нуқтаи тасодуфан партофташудаи (X,Y) ба дохили росткунҷаи дар расми 8.3 овардашуда меафтад, бо формулаи зерин ҳисоб намудан мумкин аст:

$$P(a\le X<b,c\le Y<d)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy. \qquad (8.5)$$

Формулаи (8.5)-ро истифода намуда, функсияи тақсимоти дученакаро бо ёрии функсияи зичии тақсимот ифода намудан мумкин аст. Дар ҳақиқат, мувофиқи таърифаш, функсияи тақсимот ба эҳтимолияти афтодани нуқтаи (X,Y) ба росткунҷае, ки бо абсисаҳои $-\infty,x$ ва ординатаҳои $-\infty,y$ маҳдуд аст, баробар мебошад. Бинобар ин,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(t,z)dtdz. \qquad (8.6)$$

Функсияи зичии тақсимоти дученака дорои хосиятҳои зерин мебошад:

1. Функсияи $f(x,y)$ ғайриманфӣ мебошад, яъне $f(x,y)\geq 0$.

Исботи ин хосият аз таърифи функсияи зичии тақсимот ва камнашаванда будани функсияи тақсимот ҳосил мешавад.

2. Интеграли дукаратии ғайрихос бо ҳудудҳои беохир, аз функсияи зичии тақсимоти дученака ба 1 баробар аст:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Исбот. Дар асоси формулаи (8.6) ва хосияти функсияи тақсимот $F(+\infty,+\infty)=1$ ҳосил мекунем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = F(+\infty,+\infty)=1.$$

Натиҷа. Агар маълум бошад, ки ҳамаи қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y) ба росткунҷаи дар расми 8.3 овардашуда мансубанд, он гоҳ

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dxdy = 1.$$

Яке аз қонунҳои васеъ татбиқшавандаи вектори тасодуфии дученака қонуни тақсимоти мунтазам мебошад. Мегӯянд, ки вектори тасодуфии дученакаи (X,Y) дар соҳаи D-и ҳамвории xOy ба қонуни тақсимоти мунтазам итоат менамояд, агар зичии тақсимоти ин вектор дар нуқтаҳои дохилии ин соҳа доимӣ буда, берун аз ин соҳа ба сифр баробар бошад, яъне

$$f(x,y)=\begin{cases} c, \text{ дар дохили } D, \\ o, \text{ берун аз } D. \end{cases}$$

Дар асоси хосияти дуюми функсияи зичии таксимот $c=\dfrac{1}{S_D}$, ки дар ин ҷо S_D масоҳати соҳаи D мебошад.

Яке аз хосиятҳои муҳими қонуни тақсимоти мунтазам аз он иборат аст, ки агар соҳаҳои D_1 ва D_2 ба соҳаи D

тааллук дошта бошанд ва масоҳатҳои онҳо S_{D_1} ва S_{D_2} бо ҳам баробар бошанд, он гоҳ эҳтимолиятҳои аз ин соҳаҳо қимат қабул намудани вектори тасодуфии (X,Y) баробаранд, яъне $P((X,Y)\in D_1)=P((X,Y)\in D_2)$.

§4. ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ ШАРТИИ КОМПОНЕНТҲОИ БУЗУРГИИ ТАСОДУФИИ ДУЧЕНАКАИ ДИСКРЕТӢ

Мафҳуми қонуни тақсимоти шартиро дохил менамоем.

Таъриф. Тақсимоти яке аз компонентҳои вектори тасодуфии дученака ба шарте, ки компоненти дигар қимати муайянро қабул намудааст, қонуни тақсимоти шартии ин компонент номида мешавад.

Бигузор, бузургии тасодуфии дученакаи дискретии (X,Y) бо ҷадвали тақсимоти 1 дода шуда бошад. Қонунҳои тақсимоти шартии компонентҳои онро муайян мекунем.

Қонуни тақсимоти шартии компоненти X ба шарте, ки компоненти Y қимати муайяни y_j -ро қабул намудааст, аз маҷмӯи эҳтимолиятҳои шартии $P(x_1/y_j)$, $P(x_2/y_j)$, ..., $P(x_m/y_j)$ иборат мебошад.

Ба ҳамин монанд, қонуни таксимоти шартии Y ба шарте, ки X қимати муайяни x_i-ро қабул намудааст, аз маҷмӯи эҳтимолиятҳои шартиии $P(y_1/x_i), P(y_2/x_i),...,$ $P(y_n/x_i)$ иборат мебошад.

Мувофиқи таърифи эҳтимолияти шартӣ:

$$P(x_i/y_j)=\frac{P(x_i,y_j)}{P(y_j)},\ i=1,2,...,m; \qquad (8.7)$$

$$P(y_j/x_i)=\frac{P(x_i,y_j)}{P(x_i)},\ j=1,2,...,n. \qquad (8.8)$$

Мисол. Бузургии тасодуфии дученакаи дискретии (X,Y) бо ҷадвали таксимоти зерин дода шудааст:

$X \setminus Y$	10	14	18
3	0,25	0,15	0,32
6	0,10	0,05	0,13

Ёфта шавад: а) қонунҳои тақсимоти бешарти компонентҳои он; б) қонуни тақсимоти шартии X ба шарте, ки Y қимати $y_1 = 10$-ро қабул намудааст; в) қонуни тақсимоти шартии Y ба шарте, ки X қимати $x_2 = 6$-ро қабул намудааст

Ҳал. а) Эҳтимолиятҳои ҳар як сатри ҷадвали тақсимотро ҷамъ намуда, қонуни тақсимоти бешарти X-ро ҳосил мекунем:

X	3	6
P	0,72	0,28

Эҳтимолиятҳои ҳар як сутуни ҷадвали тақсимотро ҷамъ намуда, қонуни тақсимоти бешарти Y- ро ҳосил мекунем:

$У$	10	14	18
P	0,35	0,20	0,45

б) Эҳтимолиятҳои шартии қимат қабул намудани X-ро ба шарте, ки Y кимати $y_1 = 10$-ро қабул намудааст, меёбем:

$$P(x_1 / y_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0,25}{0,35} = \frac{5}{7};\ P(x_2 / y_1) = \frac{P(x_2, y_1)}{P(y_1)} = \frac{0,10}{0,35} = \frac{2}{7};$$

Дар натиҷа, қонуни тақсимоти шартии X:

X	3	6
$P(X / y_1)$	5/7	2/7

в) Ба ҳамин монанд, эҳтимолиятҳои шартии қимат қабул намудани Y-ро ба шарте, ки X қимати $x_2 = 6$-ро қабул намудааст, меёбем:

$$P(y_1/x_2)=\frac{P(x_2,y_1)}{P(x_2)}=\frac{0{,}10}{0{,}28}=\frac{5}{14};$$

$$P(y_2/x_2)=\frac{P(x_2,y_2)}{P(x_2)}=\frac{0{,}05}{0{,}28}=\frac{5}{28};$$

$$P(y_3/x_2)=\frac{P(x_2,y_3)}{P(x_2)}=\frac{0{,}13}{0{,}28}=\frac{13}{28}.$$

Ҳамин тавр, қонуни тақсимоти шартии Y:

Y	10	14	18
$P(Y/x_2)$	5/14	5/28	13/28

§5. ЗИЧИИ ТАҚСИМОТИ КОМПОНЕНТҲОИ ВЕКТОРИ ТАСОДУФИИ ДУЧЕНАКА. ҚОНУНҲОИ ТАҚСИМОТИ ШАРТӢ

Бигузор, функсияи зичии тақсимоти вектори тасодуфии дученака $f(x,y)$ дода шуда бошад. Функсияҳои зичии таксимоти ҳар як компоненти онро муайян мекунем. Дар асоси хосияти функсияи таксимоти дученака ҳосил мекунем: $F_1(x)=F(x,\infty)$; $F_2(y)=F(\infty,y)$, ки дар ин ҷо $F_1(x)$ -функсияи таксимоти X, $F_2(y)$-функсияи тақсимоти Y ва $F(x,y)$ - функсияи таксимоти (X,Y) мебошад.

Аз ин ҷо мувофиқи формулаи (8.6) ҳосил мекунем:

$$F_1(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy,\quad F_2(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy.$$

Баробарии якумро нисбат ба x ва баробарии дуюмро нисбат ба y дифференсиронида ҳосил мекунем:

$$f_1(x)=F_1'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy, \tag{8.9}$$

$$f_2(y)=F_2'(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx, \tag{8.10}$$

ки дар ин ҷо $f_1(x)$ ва $f_2(y)$ мувофиқан функсияҳои зичии тақсимоти X ва Y мебошанд.

Акнун *масъалаи баръаксро* дида мебароем. Фарз мекунем, ки функсияҳои зичии тақсимоти компонентҳои вектори тасодуфӣ $f_1(x)$ ва $f_2(y)$ дода шудаанд. Функсияи зичии тақсимоти вектори тасодуфӣ $f(x,y)$-ро муайян мекунем.

Бо $F_1(x/y)$ ва $f_1(x/y)$ мувофиқан функсияҳои тақсимоти шартӣ ва зичии тақсимоти шартии бузургии тасодуфии X-ро ба шарте, ки бузургии тасодуфии Y қимати муайяни y-ро қабул намудааст, ишора мекунем.

Ба ҳамин монанд, $F_2(y/x)$ ва $f_2(y/x)$ мувофиқан функсияҳои тақсимоти шартӣ ва зичии тақсимоти шартии Y ба шарте, ки X қимати муайяни x-ро қабул намудааст.

Барои функсияҳои зичии тақсимоти шартӣ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$f_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \tag{8.11}$$

$$f_2(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \tag{8.12}$$

Аз баробарии (8.11) ва (8.12) меёбем:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y/x) = f_2(y) \cdot f_1(x/y). \tag{8.13}$$

Аз баробарии (8.13) чунин хулоса мебарояд, ки барои донистани функсияи зичии тақсимоти вектори тасодуфии (X,Y), донистани функсияи зичии тақсимоти яке аз компонентҳо ва функсияи зичии таксимоти шартии компоненти дигар зарур аст.

Баробарии (8.13)-ро инчунин *теоремаи зарби қонунҳои тақсимот* меноманд, ки он ба коидаи эҳтимолияти ҳосили зарби ҳодисаҳои тасодуфӣ монанд мебошад.

Формулаҳои (8.9) ва (8.10) -ро ба инобат гирифта, формулаҳои (8.11) ва (8.12)-ро ба намуди зерин пешниҳод намудан мумкин аст:

$$f_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}, \tag{8.14}$$

$$f_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}. \tag{8.15}$$

Қайд мекунем, ки функсияи зичии тақсимоти шартӣ ҳамаи хосиятҳои функсияи зичии тақсимотро доро мебошад. Дар ҳолати хусусӣ аз баробариҳои (8.14) ва (8.15) ҳосил намудан мумкин аст, ки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x/y)dx=1, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(y/x)dy=1.$$

Яке аз характеристикаи хело муҳими ададии конуни тақсимоти шартӣ, кимати миёнаи шартӣ мебошад.

Таъриф. Қимати миёнаи шартии бузургии тасодуфии дискретии X, ҳангоми қимати муайяни y -ро қабул намудани бузургии тасодуфии дискретии Y, ба суммаи ҳосили зарби қиматҳои имконпазири X ба эҳтимолиятҳои шартии онҳо баробар мебошад:

$$M(X/Y=y)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i/y).$$

Барои бузургиҳои тасодуфии бефосила бошад, ин баробарӣ намуди зеринро мегирад:

$$M(X/Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_1(x/y)dx.$$

Ба ҳамин монанд,

$$M(Y/X=x)=\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot P(y_j/x),$$

барои бузургиҳои тасодуфии дискретии Y ва X ва

$$M(Y/X=x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_2(y/x)dy,$$

барои бузургиҳи тасодуфии бефосилаи Y ва X.

Мисол. Вектори тасодуфии бефосилаи (X,Y) дар дохили доираи радиусаш ба 1 баробар мунтазам тақсим шудааст. Функсияҳои зичии тақсимоти шартии компонентҳои он ёфта шавад.

Ҳал. Аз таърифи қонуни тақсимоти мунтазам маълум аст, ки функсияи зичии тақсимоти (X,Y) намуди зерин дорад:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, \text{ агар } x^2+y^2\le 1\\ 0, \quad \text{агар } x^2+y^2>1\end{cases}$$

Аз формулаҳои (8.14) ва (8.15) истифода мебарем. Аввал интегралҳои дар махраҷ истодаро ҳисоб мекунем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y_0)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y_0^2}}^{\sqrt{1-y_0^2}}dx, \quad \text{агар } |y_0|\le 1,\\ 0, \qquad\qquad \text{агар } |y_0|>1;\end{cases}$$

ё

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y_0)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y_0^2}, \quad \text{агар } |y_0|\le 1;\\ 0, \quad \text{агар } |y_0|>1.\end{cases}$$

Ба ҳамин монанд,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0,y)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x_0^2}, \quad \text{агар } |x_0|\le 1;\\ 0, \qquad\qquad \text{агар } |x_0|>1.\end{cases}$$

Ҳамин тавр,

$$f_1(x/y_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y_0^2}}, \text{ агар } x^2+y_0^2\le 1;\\ 0, \qquad \text{агар } x^2+y_0^2>1.\end{cases}, \quad f_2(y/x_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x_0^2}}, \text{ агар } x_0^2+y^2\le 1;\\ 0, \qquad \text{агар } x_0^2+y^2>1.\end{cases}$$

§6. АДАДҲОИ ТАВСИФИИ БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФИИ ДУЧЕНАКА. ВОБАСТАГӢ ВА НОВОБАСТАГИИ БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФӢ

Бигузор бузургии тасодуфии дискретии дученакаи (X,Y) бо ҷадвали тақсимоти 1 дода шуда бошад. Он гоҳ интизорияти математикии бузургиҳои тасодуфии дискретии X ва Y тавассути формулаҳои

$$M(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i p_{ij},\ \ M(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j p_{ij}$$

муайян карда мешаванд.

Интизорияти математикии бузургиҳои тасодуфии бефосилаи X ва Y бошад, бо ёрии формулаҳои

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy,\ \ M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

ёфта мешаванд. Нуқтаи $(M(X),M(Y))$ -ро маркази пошхӯрии системаи бузургиҳои тасодуфии (X,Y) меноманд.

Дисперсияи бузургиҳои тасодуфии дискретии X ва Y бо формулаҳои

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}[x_i-M(X)]^2,\ D(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}[y_j-M(Y)]^2$$

муайян карда мешаванд.

Дисперсияи бузургиҳои тасодуфии бефосилаи X ва Y бошад, бо формулаҳои

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 f(x,y)dxdy,\quad D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[y-M(Y)]^2 f(x,y)dxdy$$

ёфта мешаванд.

Дар бисёр ҳолатҳо барои ҳисоби дисперсия аз формулаҳои

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2,\ D(Y)=M\left(Y^2\right)-[M(Y)]^2$$

истифода кардан қулайтар аст.

Тамоили миёнаи квадратии бузургиҳои тасодуфии X ва Y мувофиқан бо формулаҳои

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} \quad \text{ва} \quad \sigma_Y = \sqrt{D(Y)}$$

ёфта мешаванд.

Дар назарияи системаҳои бузургиҳои тасодуфӣ нақши муҳимро мафҳуми *моменти коррелятсионӣ ё ковариатсия* мебозад, ки бо ёрии формулаи

$$C_{XY} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))]$$

ҳисоб карда мешавад.

Моменти коррелятсионӣ барои бузургиҳои тасодуфии дискретӣ ва бефосила мувофиқан бо формулаҳои зерин ёфта мешавад:

$$C_{XY} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - M(X))(y_j - M(Y))p_{ij},$$

$$C_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x,y)dxdy.$$

Моменти коррелятсиониро бо формулаи

$$C_{XY} = M(XY) - M(X)M(Y),$$

низ ҳисоб кардан мумкин аст, ки дар ин ҷо

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j p_{ij}$$

барои бузургии тасодуфии дискретӣ ва

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$$

барои бузургии тасодуфии бефосила мебошад.

Таъриф. Бузургиҳои тасодуфии X ва Y -ро *новобаста* меноманд, агар эҳтимолияти қимат қабул кардани яке аз онҳо аз он, ки бузургии тасодуфии дигар кадом қиматро қабул кардааст, вобаста набошад. Дар ин маврид аён аст, ки $M(XY)=M(X)M(Y)$ ва $C_{XY}=0$ мешавад.

Таърифи овардашударо ба тарзи дигар чунин баён намудан мумкин аст: *бузургиҳои тасодуфии X ва Y новобаста номида мешаванд, агар ҳодисаҳои $\{X=x\}$ ва $\{Y=y\}$ барои ҳаргуна x ва y новобаста бошанд.*

Маълум, ки дар ин ҳолат $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$ ва барои бузургиҳои тасодуфии бефосила $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ мешавад.

Баробарии охиронро бо формулаи (8.13) муқоиса намуда, боз як таърифи новобастагии бузургиҳои тасодуфиро ҳосил мекунем: *бузургиҳои тасодуфии X ва Y новобаста номида мешаванд*, агар $f_1(x)=f_1(x/y)$ бошад. Дар ҳақиқат,

$$f_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f_1(x)\cdot f_2(y)}{f_2(y)}=f_1(x).$$

Ба ҳамин монанд, дар ҳолати новобаста будани X ва Y,

$$f_2(y)=f_2(y/x).$$

Барои тавсифи вобастагии бузургиҳои тасодуфии X ва Y *мафҳуми коэффитсиенти корреляtсия* дохил карда шудааст, ки он бузургии беченак буда, тавассути формулаи

$$r_{XY}=\frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

муайян карда мешавад.

Агар бузургиҳои тасодуфии X ва Y новобаста бошанд, он гоҳ $r_{XY}=0$ аст. Агар бузургиҳои тасодуфии X ва Y хаттӣ вобаста бошанд ($Y=aX+b$), он гоҳ

$$r_{XY}=signa=\begin{cases} 1, \text{ агар } a>0, \text{ бошад.} \\ -1, \text{ агар } a<0, \text{ бошад} \end{cases}$$

аст. Дар ҳолати умумӣ, коэффитсиенти коррелятсия шарти $|r_{XY}| \leq 1$-ро қонеъ менамояд.

Вобастагӣ ва новобастагии бузургиҳои тасодуфиро дар мисоли қонуни тақсимоти нормалии дученака дида мебароем. Агар бузургиҳои тасодуфии X ва Y мувофиқан бо параметрҳои (m_1, σ_1) ва (m_2, σ_2) ба қонуни тақсимоти нормалӣ итоат намоянд, он гоҳ функсияи зичии тақсимоти нормалии вектори тасодуфии (X, Y) чунин намудро мегирад:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1 \cdot \sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Чи хеле, ки дида мешавад ин тақсимот аз панҷ параметр вобаста аст: m_1 ва m_2- мувофиқан интизориятҳои математикии X ва Y; σ_1 ва σ_2 -мувофиқан тамоили миёнаи квадратии X ва Y; r-коэффитсиенти коррелятсияи байни X ва Y.

Фарз мекунем, ки X ва Y новобаста мебошанд, яъне $r = 0$ аст. Он гоҳ ҳосил мекунем:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Ҳамин тавр, функсияи зичии тақсимоти вектори тасодуфии (X, Y) ба ҳосили зарби функсияҳои зичии тақсимоти бешарти компонентҳояш баробар шуд. Ин нишон медиҳад, ки бузургиҳои тасодуфии X ва Y новобаста мебошанд.

Агар $r \neq 0$ бошад он гоҳ бузургиҳои тасодуфии X ва Y вобаста мешаванд. Дар ин ҳолат функсияҳои зичии тақсимоти шартии онҳо чунин намуд доранд:

$$f(y/x)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}-r\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2\right\},$$

$$f(x/y)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}-r\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}.$$

Дар баробарии якум каме табдилдиҳӣ гузаронида, ҳосил мекунем:

$$f(y/x)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left[y-m_2-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)\right]^2\right\}.$$

Маълум, ки ин функсия функсияи зичии тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои $m=m_2+r\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)$ ва $\sigma=\sigma_2\sqrt{1-r^2}$ мебошад, ки m интизорияти математикии шартии Y ба шарте, ки $X=x$ буда, σ -тамоили миёнаи квадратии қонуни тақсимоти шартӣ мебошад.

Аз ин ҷо дида мешавад, ки қимати x-ро кабул намудани бузургии тасодуфии X танҳо ба интизорияти математикии Y таъсир намуда, ба дисперсияи он таъсир намерасонад.

Дар охир яке аз формулаҳои қонуни тақсимоти нормалиро меоварем, ки он эҳтимолияти афтодани нуқтаи тасодуфан партофташудаи (X,Y) -ро ба дохили росткунҷаи дар расми 8.3 овардашуда, дар ҳолати новобаста будани X ва Y, муайян мекунад:

$$P(a\le X<b,\, c\le Y<d)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\int_a^b\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}dx\cdot$$

$$\cdot\int_c^d\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dy=\frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{b-m_1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_1}{\sigma_1}\right)\right]\cdot\left[\Phi\left(\frac{d-m_2}{\sigma_2}\right)-\Phi\left(\frac{c-m_2}{\sigma_2}\right)\right].$$

Мисол. Функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y) дода шудааст:

$$f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}, & агар\ x>0,\ y>0\ бошад,\\ 0, & агар\ x<0\ ё\ y<0\ бошад.\end{cases}$$

Интизорияти математикӣ ва дисперсияҳои X ва Y -ро ёбед.

Ҳал. Сараввал функсияҳои зичии тақсимоти X ва Y-ро муайян мекунем:

$$f_1(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_0^\infty 4xye^{-(x^2+y^2)}dy=4xe^{-x^2}\cdot\int_0^\infty ye^{-y^2}dy=2x\cdot e^{-x^2},\ (x>0);$$

$$f_2(y)=\int_0^\infty f(x,y)dx=\int_0^\infty 4xye^{-(x^2+y^2)}dx=4ye^{-y^2}\cdot\int_0^\infty xe^{-x^2}dx=2y\cdot e^{-y^2},(y>0).$$

Акнун интизориятҳои математикии X ва Y -ро ҳисоб мекунем:

$$M(X)=\int_0^\infty x\cdot f_1(x)dx=\int_0^\infty x\cdot\left(2xe^{-x^2}\right)dx.$$

Формулаи қисм ба қисм интегрирониро ба интеграли охирон татбиқ намуда ва қимати интеграли Пуассон $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2$ -ро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем:

$$M(X)=\sqrt{\pi}/2.$$

Айнан ҳамин тавр ҳосил мекунем:

$$M(Y)=\int_0^\infty y\cdot f_2(y)dy=\int_0^\infty y\cdot\left(2ye^{-y^2}\right)dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Акнун дисперсияҳои X ва Y-ро ҳисоб мекунем:

$$D(X)=\int_0^\infty x^2\cdot f_1(x)dx-[M(x)]^2=\int_0^\infty x^2\left(2x\cdot e^{-x^2}\right)dx-\left(\sqrt{\pi}/2\right)^2=(4-\pi)/4.$$

Ба ҳамин монанд,

$$D(Y)=\int_0^\infty y^2\cdot f_2(y)dy-[M(y)]^2=\int_0^\infty y^2\left(2y\cdot e^{-y^2}\right)dy-\left(\sqrt{\pi}/2\right)^2=(4-\pi)/4.$$

§7. БУЗУРГИҲОИ ТАСОДУФИИ n - ЧЕНАКА

Тавсифи пурраи бузургиҳои тасодуфии n -ченакаро бо функсияи тақсимоти n -ченака ё функсияи зичии тақсимоти n -ченака додан мумкин аст.

Мафҳуми функсияи тақсимоти n -ченака ба монанди функсияи тақсимоти 2-ченака дохил карда мешавад.

Ҳамин тавр, функсияи тақсимоти n -ченакаи вектори тасодуфии $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ гуфта, функсияи n тағйирёбандаи $F(x_1,x_2,...,x_n)$ -ро меноманд, ки ба эҳтимолияти якҷоя рӯйдодани ҳодисаҳои

$$\{X_1<x_1\}, \{X_2<x_2\},..., \{X_n<x_n\}$$

баробар мебошад, яъне

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=P(X_1<x_1,X_2<x_2,...,X_n<x_n). \qquad (8.16)$$

Ин функсия ҳамаи хосиятҳои функсияи тақсимоти 2-ченакаро доро мебошад. Масалан, ин функсия нисбат ба ҳар як аргументаш, дар ҳолати қайд карда шудани дигар аргументҳояш, камнашаванда мебошад. Агар ақаллан яке аз тағйирёбандаҳои $x_1,x_2,...,x_n$ ба $-\infty$ майл кунад, он гоҳ функсияи $F(x_1,x_2,...,x_n)$ ба сифр майл мекунад.

Аз системаи бузургиҳои тасодуфӣ $(X_1,X_2,...,X_n)$ системаи хусусии $(X_1,X_2,...,X_m),(m<n)$ -ро ҷудо мекунем. Он гоҳ функсияи тақсимоти ин системаи хусусӣ бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$F_{1,2,...,m}(x_1,x_2,...,x_m)=F(x_1,x_2,...,x_m,+\infty,...,+\infty).$$

Дар ҳолати хусусӣ, функсияи тақсимоти ҳар як компоненти вектори тасодуфиро ҳосил намудан мумкин аст. Барои ин дар функсияи тақсимоти n -ченака аргументҳои боқимондаро ба $+\infty$ иваз намудан лозим аст. Масалан, функсияи тақсимоти якченакаи X_1

$$F_1(x_1)=F(x_1,+\infty,...,+\infty).$$

Агар ҳамаи тағйирёбандаҳои $x_1, x_2, ..., x_n$ ба $+\infty$ майл кунанд, он гоҳ функсияи $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ба 1 майл мекунад:

$$F(+\infty, ..., +\infty) = 1.$$

Инчунин, ба монанди функсияи тақсимоти 2 - ченака, агар функсияи $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ дода шуда бошад, он гоҳ эҳтимолияти афтодани нуқтаи тасодуфан партофташудаи $(X_1, X_2, ..., X_n)$ -ро ба дохили параллелопипеди росткунҷаи теғаҳояш ба тирҳои координати параллел муайян намудан мумкин аст.

Барои тавсифи қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии n-ченакаи бефосила функсияи зичии тақсимоти n-ченака истифода бурда мешавад, ки он ҳамчун ҳудуди нисбати эҳтимолияти афтодани нуқтаи тасодуфан партофташудаи $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ба атрофи хурди нуқтаи муайяни $(x_1, x_2, ..., x_n)$ бар ченаки ин атроф, дар ҳолати ба сифр майл намудани ченаки ин атроф, муайян карда мешавад:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \to 0}} \frac{P(x_1 < X_1 < x_1 + \Delta x_1, ..., x_n < X_n < x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot ... \cdot \Delta x_n}.$$

Функсияи зичии тақсимоти n -ченака низ ҳамаи хосиятҳои функсияи зичии тақсимоти дученакаро доро мебошад.

Масалан, функсияи зичии тақсимоти n - ченака функсияи ғайриманфӣ мебошад: $f(x_1, x_2, x_n) \geq 0$.

Эҳтимолияти афтодани нуқтаи тасодуфан партофташудаи $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ба соҳаи n -ченакаи D бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$P((X_1, X_2, ..., X_n) \in D) = \int\int_D ... \int f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n. \quad (8.17)$$

Агар формулаи (8.17) -ро ба соҳаи $X_i < x_i$ $(i = 1,2,...,n)$ татбиқ намоем, он гоҳ формулаи вобастагии функсияи тақсимоти n -ченака ва функсияи зичии тақсимоти n-ченакаро ҳосил мекунем:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}...\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2...dx_n. \quad (8.18)$$

Ҳар ду тарафи баробарии (8.18)-ро нисбат ба ҳар як аргументҳо дифференсиронида, функсияи зичии тақсимотро бо функсияи тақсимот ифода намудан мумкин аст:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}. \quad (8.19)$$

Инчунин, дар баробарии (8.18) қимати тағйирёбандаҳои $x_1, x_2, ..., x_n$ -ро $+\infty$ қабул намуда ва хосияти функсияи тақсимот $F(+\infty, ..., +\infty) = 1$-ро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2...dx_n = 1$$

Агар функсияи зичии тақсимоти n -ченакаи $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дода шуда бошад, он гоҳ функсияи зичии тақсимоти $m(m < n)$-ченакаи $f_{1,2,...,m}(x_1, x_2, ..., x_m)$-и системаи хусусии $(X_1, X_2, ..., X_m)$, ки аз системаи $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ҷудо карда шудааст, бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$f_{1,2,...,m}(x_1, x_2, ..., x_m) = \int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_{m+1}dx_{m+2}...dx_n.$$

Дар ҳолати хусусӣ, зичии тақсимоти ҳар як компоненти системаро муайян намудан мумкин аст. Барои ин қиматҳои аргументҳои боқимондаро $+\infty$ қабул намудан кифоя аст.

Масалан, зичии тақсимоти бузургии тасодуфии якченакаи X_1

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_2,\ldots,dx_n.$$

Барои пурра тавсиф намудани қонуни тақсимоти системаи бузургиҳои тасодуфӣ $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ инчунин, вобастагии компонентҳои ин системаро муайян намудан лозим аст. Вобастагии байни компонентҳои система бошад, бо ёрии қонунҳои тақсимоти шартӣ тавсиф карда мешаванд.

Бигузор, системаи додашудаи бузургиҳои тасодуфӣ $(X_1,X_2,\ldots,X_m)$, $(m<n)$ ҷудо карда шуда бошад.

Қонуни тақсимоти шартии системаи хусусии $(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ гуфта, қонуни тақсимоти онро ба шарте, ки бузургиҳои тасодуфии боқимонда $X_{m+1},X_{m+2},\ldots,X_n$ қиматҳои муайяни $x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n$ -ро қабул намудаанд, меноманд.

Дар ин ҳолат, функсияи зичии тақсимоти шартӣ бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m/x_{m+1},\ldots,x_n)=\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f_{m+1,\ldots,n}(x_{m+1},\ldots,x_n)}.$$

Бузургиҳои тасодуфии $X_1,X_2,\ldots,X_n$ новобаста номида мешаванд, агар конуни тақсимоти ҳаргуна системаи хусусии аз ин система ҷудокардашуда аз он, ки бузургиҳои тасодуфии боқимонда кадом қиматҳоро қабул менамоянд, вобаста набошад.

Барои системаи бузургиҳои тасодуфии новобаста баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_1(x_1)\cdot F_2(x_2)\cdot\ldots\cdot F_n(x_n),$$
$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdot\ldots\cdot f_n(x_n),$$

ки дар ин ҷо бо $F_k(x_k)$ ва $f_k(x_k)$, $(k=1,2,\ldots,n)$ мувофиқан функсияҳои тақсимот ва зичии тақсимоти бузургии тасодуфии якченакаи X_k ишора шудаанд.

§8. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Эҳтимолияти афтодани нуқтаи тасодуфан партофташудаи (X,Y) - ро ба дохили росткунҷаи бо хатҳои $x=0$, $x=\pi/4$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$ маҳдуд ёбед, агар маълум бошад, ки функсияи тақсимоти дученака намуди зеринро дорад:

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y \quad \text{агар} \;\; 0\le x\le \pi/2,\, 0\le y\le \pi/2, \\ \qquad\qquad 0 \quad \text{агар} \;\; x<0 \;\text{ё}\; y<0 \;\text{бошад}.\end{cases}$$

Ҷавоб: 0,26.

Масъалаи 2. Бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y) бо ҷадвали тақсимоти зерин дода шуда аст:

X \ Y	8	16
12	0,25	0,10
19	0,15	0,05
28	0,32	0,13

Ёфта шавад: а) қонунҳои тақсимоти бешарти компонентаҳои он; б) қонуни тақсимоти шартии X ба шарте ки Y қимати $y_1=8$-ро қабул намудааст, в) қонуни тақсимоти шартии Y ба шарте, ки X қимати $x_2=19$-ро қабул намудааст.

Ҷавоб: а)

X	12	19	28
P	0,35	0,20	0,45

Y	8	16
P	0,72	0,28

б)

X	12	19	28
$P(X/y_1)$	25/72	15/72	32/72

в)

Y	8	16
$P(Y/x_2)$	15/20	5/20

Масъалаи 3. Бузургии тасодуфии бефосилаи (X,Y) дар дохили трапетсияи росткунҷаи қуллаҳояш $O(0;0)$, $A(0;4)$,

$B(3;4)$, $C(6;0)$ мунтазам тақсим шудааст. Функсияҳои зичии тақсимоти компонентаҳои он ёфта шавад.

Ҷавоб:

$$f_1(x)=\begin{cases} 0, & агар \;\; x<0, \\ 2/9, & агар \;\; 0<x<3, \\ -\frac{2}{27}x+\frac{4}{9}, & агар \;\; 3<x<6, \\ 0, & агар \;\; x>6. \end{cases} \qquad f_2(y)=\begin{cases} 0, & агар \;\; y<0, \\ -\frac{2}{24}x+\frac{1}{3}, & агар \;\; 0<y<4, \\ 0, & агар \;\; y>4. \end{cases}$$

Масъалаи 4. Функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y) дода шудааст:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{4}\sin x\cdot\sin y+\frac{1}{3}, & агар \;\; 0\le x\le\pi, \; 0\le y\le\pi, \\ 0, & дар \; дигар \;\; холатхо. \end{cases}$$

Интизорияти математикӣ ва дисперсияҳои X ва Y-ро ёбед.

Ҷавоб: $M(X)=M(Y)=\frac{\pi}{2}$, $D(X)=D(Y)=\pi^2-4$.

БОБИ IX. ЭЛЕМЕНТҲОИ ОМОРИ РИЁЗӢ

§1. МАФҲУМҲОИ АСОСӢ. УСУЛИ ИНТИХОБӢ

Омори риёзӣ гуфта илмеро меноманд, ки бо сохтани усулҳои риёзии ҷамъоварӣ, тасвир ва коркарди натиҷаҳои таҷрибаҳо (ё мушоҳидаҳо), бо мақсади омӯхтани қонуниятҳои ҳодисаҳои тасодуфии оммавӣ, машғул мебошад.

Бигузор, омӯзиши маҷмӯи ашёҳои (объектҳои) якҷинса нисбат ба ягон нишонаи миқдорӣ ё сифатии тавсифкунандаи ин объектҳо талаб карда шавад. Ин маҷмӯъро *маҷмӯи оморӣ* меноманд. Масалан, агар як миқдор қисмҳои эҳтиётии мошин мавҷуд бошанд, пас нишонаи сифатӣ - ин хушсифат будани он ва нишонаи миқдорӣ - андозаҳои назоратии ин қисмҳо мебошанд.

Албатта тадқиқи сар то сар, яъне омӯзиши алоҳида – алоҳидаи ҳар як ашё хуб аст. Вале, бо баъзе сабабҳои объективӣ иҷрои ин кор имконнопазир аст. Ба тадқиқи сар то сар бисёрии миқдори объектҳои муойинашаванда ё дастнорасии онҳо монеъ шуда метавонанд. Масалан, барои чен кардани чуқурии миёнаи чоҳе, ки дар натиҷаи таркиши снаряд ба вуҷуд меояд, ҳангоми санҷиши сар то сар, мо бояд тамоми снарядҳоро тарконем, ки ин ба мақсад мувофиқ нест. Агар муойинаи (тадқиқи) сар то сар имконнопазир бошад, он гоҳ аз маҷмӯи додашуда барои омӯзиш як қисми онро ҷудо мекунанд.

Маҷмӯи оморие, ки ягон нишонаи ададии ҳамаи объектҳои омӯхташавандаро дар бар мегирад, *маҷмӯи генералӣ* номида мешавад. Маҷмӯи элементҳоеро, ки аз маҷмӯи генералӣ тасодуфан интихоб шудаанд, *маҷмӯи интихобӣ* меноманд. Миқдори объектҳои маҷмӯи генералӣ ва интихобиро, мувофиқан ҳаҷми маҷмӯи генералӣ ва ҳаҷми маҷмӯи интихобӣ меноманд.

Мисол. Меваи як дарахт (200 дона) ба мавҷудияти таъми махсуси фақат ба ҳамин навъ хос тадқиқ карда мешавад. Барои ин мақсад 10 дона мева интихоб карда шудааст. Дар ин ҷо 200- ҳаҷми маҷмӯи генералӣ ва 10 ҳаҷми маҷмӯи интихобӣ аст.

Одатан, ҳаҷми маҷмӯи генералӣ N аз ҳаҷми маҷмӯи интихобӣ n ниҳоят калон мебошад ($N >> n$).

Таърифҳои маҷмӯҳои генералӣ ва интихобиро бо мафҳумҳои назарияи эҳтимолият чунин овардан мумкин аст.

Бигузор, фазои эҳтимолиятҳо $\{\Omega, F, P\}$ (Ω - фазои ҳодисаҳои элементарӣ, ки дар он майдони ҳодисаҳои F ва эҳтимолияти P муайян мебошанд) дода шуда бошад. Он гоҳ *маҷмӯи генералӣ гуфта,* фазои эҳтимолиятҳо $\{\Omega, F, P\}$ -ро, ки дар он бузургии тасодуфии X муайян шудааст, меноманд.

Дар ин ҳолат, маҷмӯи интихобии ҳаҷмаш n (ё кӯтоҳ интихоби ҳаҷмаш n) гуфта, n бузургиҳои тасодуфии новобастаи $X_1, X_2, ..., X_n$ -ро меноманд, ки қонуни тақсимоташон бо қонуни тақсимоти X якхела мебошад. Яъне интихоби ҳаҷмаш n ин натиҷаи n мушоҳидаҳои новобаста бо бузургии тасодуфии X мебошад.

Таърифҳои овардашуда нишон медиҳанд, ки илмҳои омори риёзӣ ва назарияи эҳтимолият бо ҳам зич алоқаманд мебошанд.

Омори риёзӣ ба назарияи эҳтимолият такя менамояд ва мақсади он тавсиф намудани маҷмӯи генералӣ дар асоси омӯхтани маҷмӯи интихобӣ мебошад.

Бинобар ин яке аз *усулҳои пуриқтидори омори риёзӣ, ки усули интихобӣ* ном дорад, барои ба ин мақсад ноил гаштан сохта шудааст.

Усули интихобӣ - усули омории тадқиқот буда, дар он аз маҷмӯи генералӣ ба тарзи тасодуфӣ элементҳои маҷмӯи интихобиро ҷудо мекунанд ва характеристикаҳои маҷмӯи интихобиро омӯхта, онҳоро тақрибан ба сифати характеристикаҳои мувофиқи маҷмӯи генералӣ қабул мекунанд.

Албатта, дар ин усул тарзи интихоби элементҳои маҷмӯи интихобӣ роли муҳимро мебозад.

Агар ҳар як обеъкти маҷмӯи интихобӣ пас аз муойина боз ба маҷмӯи генералӣ баргардонида шавад, он гоҳ ин тарзи интихобро (ҷудокуниро) *такрорӣ* меноманд. Агар объектҳои интихобӣ пас аз муойина ба маҷмӯи генералӣ баргардонида нашаванд, он гоҳ интихобро (ҷудокуниро) *нотакрор (бебозгашт)* меноманд. Дар амалия бештар интихоби (ҷудокунии) *бебозгашт* истифода мешавад. Агар ҳаҷми маҷмӯи интихобӣ ҳиссаи ками маҷмӯи генералиро ташкил диҳад, пас фарқ миёни ҷудокунии такрорӣ ва бебозгашт ночиз мешавад. Хосиятҳои объектҳои маҷмӯи интихобӣ бояд хосиятҳои объектҳои маҷмӯи генералиро дуруст инъикос намоянд, яъне ҷудокунӣ бояд *бонуфуз* бошад. Ҷудокунӣ *бонуфуз* ҳисобида мешавад, агар ҳамаи элементҳои маҷмӯи генералӣ эҳтимолияти якхелаи ба маҷмӯи интихобӣ дохилшавиро доро бошанд, яъне интихоб бояд тасодуфӣ амалӣ шавад. Масалан, барои баҳои ҳосили ояндаи боғ, аз меваҳои хом ҷудо карда, бузургиҳои тавсифии онҳоро (масалан вазн, сифат ва ғайраҳоро) тадқиқ кардан мумкин аст. Агар тамоми ҷудокунӣ фақат аз меваҳои як дарахт иҷро карда шавад, он гоҳ ин *интихоб бонуфуз* нест. Пас, маҷмӯи интихобӣ бояд аз меваҳои дарахтҳои тасодуфан интихобшуда иборат бошад.

Бояд қайд кард, ки дар интихоби такрорӣ санҷишҳо (ҷудокунии элементҳо) новобаста буда, дар интихоби нотакрор вобаста мебошанд.

Дар мавзӯъҳои оянда фарз мекунем, ки ҷудокунии элементҳои маҷмӯи интихобӣ шарти бонуфузиро каноат мекунонанд ва новобаста мебошанд.

§2. ТАҚСИМОТИ ОМОРИИ МАҶМӮИ ИНТИХОБӢ. ПОЛИГОН ВА ГИСТОГРАММА

Бигузор, аз маҷмӯи асосӣ (генералӣ) маҷмӯи интихобӣ ҷудо карда шуда, дар он қимати x_1 расо n_1 маротиба, x_2 расо n_2 маротиба ва ҳоказо, x_k расо n_k маротиба ба назар расида бошад. Маълум, ки $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ -ҳаҷми маҷмӯи интихобӣ аст.

Қиматҳои мушоҳидашудаи $x_1, x_2, \cdots, x_k$ -ро вариантаҳо ва пайдарпаии вариантаҳоро, ки ба тартиби зиёдшавӣ навишта шудаанд, *қатори вариатсионӣ* меноманд.

Шумораи мушоҳидаҳо $n_1, n_2, \cdots, n_k$ -ро мувофиқан зудӣ ва нисбати онҳоро ба ҳаҷми маҷмӯи интихобӣ $\frac{n_1}{n}=p_1^*, \frac{n_2}{n}=p_2^*, \cdots, \frac{n_k}{n}=p_k^*$ зудии нисбии вариантаҳо меноманд. Қайд менамоем, ки суммаи зудиҳои нисбӣ ба 1 баробаранд: $p_1^*+p_2^*+\cdots+p_k^*=1$.

Тақсимоти омории маҷмӯи интихобӣ гуфта, номгӯи вариантаҳо ва зудӣ ё зудии нисбии мувофиқи онҳоро меноманд. Тақсимоти омориро инчунин дар намуди пайдарпаии фосилаҳо (интервалҳо) ва зудиҳои ба онҳо мувофиқ низ нишон додан мумкин аст (дар мавриди тақсимоти бефосила). Ба сифати зудии ба интервал мувофиқ, суммаи зудиҳои вариантаҳои ба ин интервал мансубро қабул мекунанд.

Барои тасвири геометрии тақсимоти омории маҷмӯи интихобӣ полигон(майдон) ё гистограммаро истифода мебаранд.

Полигони(майдони) зудиҳо(зудиҳои нисбӣ) гуфта, хати шикастаеро меноманд, ки он аз порчаҳои хатҳои рости нуктаҳои (x_i, n_i) $((x_i, p_i^*))$-ро пайвасткунанда иборат аст.

Барои сохтани полигон дар тири OX қимати вариантаҳои x_i -ро ва дар тири OY қимати зудии мувофиқ n_i (зудии нисбии мувофиқ p_i^*) -ро тасвир менамоянд.

Мисол. Тақсимоти омории маҷмӯи интихобӣ дода шудааст:

Варианта x_i	1	2	3	5
Зудии нисбӣ p_i^*	0,4	0,2	0,3	0,1

Полигони зудиҳои нисбиро созед.

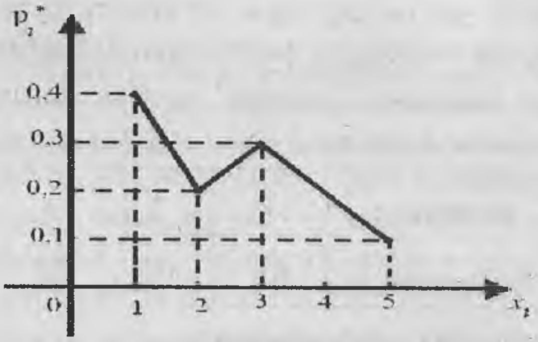
Ҳал. Дар системаи росткунҷаи координатӣ нуқтаҳои $(1; 0,4)$, $(2; 0,2)$, $(3; 0,3)$ ва $(5; 0,1)$ -ро муайян намуда, онҳоро бо хатҳои рост пайваст мекунем. Хати шикастаи ҳосилшуда полигони зудиҳои нисбӣ мебошад(Ниг. ба расми 9.1).

Полигонро асосан дар мавриди миқдори ками вариантаҳо истифода мебаранд. Дар ҳолати бисёр будани миқдори вариантаҳо ва дар ҳолати тақсимоти бефосилаи нишона бештар аз гистограммаҳо истифода мебаранд. Барои ин интервале, ки ба он ҳамаи қиматҳои мушоҳидашудаи нишона мансубанд, ба якчанд ниминтервалҳои хусусии дарозиаш h:

$$[\alpha_0, \alpha_1), [\alpha_1, \alpha_2), ..., [\alpha_{k-1}, \alpha_k),$$

ки дар ин ҷо $\alpha_0 = x_1$ ва $\alpha_k = x_n$ мебошанд, тақсим карда, барои ҳар як ниминтервали хусусӣ суммаи зудиҳои вариантҳо n_i -ро меёбанд. Баъд ин ниминтервалҳоро ҳамчун асоси росткунҷа интихоб карда, росткунҷаҳои баландиаш $\frac{n_i}{h}$ (ё $\frac{n_i}{nh}$, n -

ҳаҷми маҷмӯи интихобӣ)-ро месозанд. Масоҳати росткунҷаи хусусии i-юм ба $\frac{n_i}{h} \cdot h = n_i$ (ё $\frac{n_i}{nh} \cdot h = \frac{n_i}{n} = p_i^*$) баробар аст.



Расми 9.1

Ҳамин тавр, масоҳати гистограмма ба суммаи ҳамаи зудиҳо (ё зудиҳои нисбӣ) баробар аст, яъне ба масоҳати маҷмӯи интихобӣ (ё ба 1) баробар аст.

Мисол. Тақсимоти бефосилаи ҳаҷмаш $n = 100$ бо ҷадвали зерин дода шудааст:

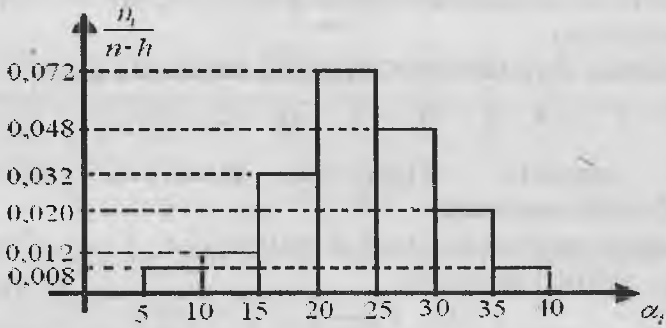
Интервали хусусӣ	Суммаи зудии вариантҳои интервали хусусӣ, n_i	$\frac{n_i}{h}$	$\frac{n_i}{n \cdot h}$
5-10	4	0,8	0,008
10-15	6	1,2	0,012
15-20	16	3,2	0,032
20-25	36	7,2	0,072
25-30	24	4,8	0,048
30-35	10	2,0	0,020
35-40	4	0,8	0,008

Гистограммаи зудиҳои нисбиро созед.

Ҳал. Дар тири OX охирҳои интервалҳои хусусӣ ва дар тири OY зудиҳои нисбии $\frac{n_i}{n \cdot h}$-ро гузошта, росткунҷаҳои асосашон $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ ва баландиашон $\frac{n_i}{n \cdot h}$-ро сохта, гистограммаи матлубро ҳосил мекунем(Ниг. ба расми 9.2).

Полигони зудиҳо (ё зудиҳои нисбӣ) баҳои тақсимоти эҳтимолиятҳои бузургии тасодуфии омӯхташавандаи X, яъне баҳои тақсимоти маҷмӯи генералӣ мебошад.

Гистограммаи зудиҳо (ё зудиҳои нисбӣ) бошад, баҳои функсияи назариявии зичии тақсимот аст. Нуқтаҳои мобайнҳои тарафҳои болоии росткунҷаҳои гистограмммаро бо хати каҷи суфта пайваст намуда, шакли умумии функсияи зичии тақсимоти назариявиро ҳосил намудан мумкин аст. Одатан, дар амалия барои муайян намудани функсияи номаълуми зичии тақсимоти бузургии тасодуфии X гистограмма месозанд.



Расми 9.2

§3. ФУНКСИЯИ ЭМПИРИКИИ ТАҚСИМОТ

Бигузор, маҷмӯи M дорои N элемент бошад ва мо ягон андозаи ин элементҳоро чен намоем. Ҳар як ченкунӣ дар навбати худ санҷиш аст. Масалан, диаметри наварди оҳанин X чен карда мешавад. Фарз мекунем, ки аз маҷмӯи M, n - то элемент тасодуфан интихоб карда шуд ва пас аз муойина натиҷаҳои зеринро ҳосил кардем:

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \qquad (9.1)$$

Бигузор, x адади ихтиёрӣ бошад. Бо $n(x)$ шумораи он қиматҳои x_k - и қатори (9.1) –ро ишора мекунем, ки нобаробарии $x_k < x$ - ро қонеъ менамоянд. Ҳамин тавр, дар тамоми тири ададӣ функсияи $n(x)$ -ро муайян намудем. Ишораи зеринро дохил мекунем:

$$F^*(x) = \frac{n(x)}{n}. \tag{9.2}$$

Функсияи $F^*(x)$-ро *функсияи эмпирикии(таҷрибавии) тақсимоти бузургии тасодуфии* X меноманд.

Функсияи (9.2) тақрибан ба функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии X баробар аст $\left(F(x) \approx F^*(x)\right)$. Барои аз ҳамдигар фарқ кардани ин ду функсияи тақсимот, $F(x)$ - ро *функсияи назариявии тақсимоти бузургии тасодуфии* X низ меноманд.

Мисол. Дар натиҷаи интихоб ададҳои

$$-4, \quad 3, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 2, \quad 3, \quad 1$$

ҳосил шуданд. Графики функсияи тақсимоти таҷрибавиро месозем.

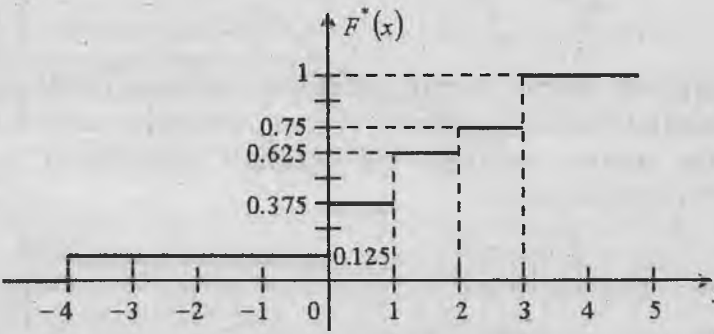
Барои мисоли мо ҳаҷми интихоб $n = 8$ аст. Функсияи $n(x)$ -ро тартиб медиҳем:

$$n(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4, \\ 1, & -4 < x \le 0, \\ 3, & 0 < x \le 1, \\ 5, & 1 < x \le 2, \\ 6, & 2 < x \le 3, \\ 8, & 3 < x. \end{cases}$$

Акнун, мувофиқи формулаи (9.2) функсияи эмпирикии тақсимот $F^*(x)$- ро месозем:

$$F^*(x)=\frac{n(x)}{n}=\begin{cases} 0, & x\le -4; \\ 0{,}125, & -4<x\le 0; \\ 0{,}375, & 0<x\le 1; \\ 0{,}625, & 1<x\le 2; \\ 0{,}750, & 2<x\le 3; \\ 1, & 3<x. \end{cases}$$

Графики функсияи $F^*(x)$- ро месозем(Расми 9.3).



Расми 9.3

Аз таърифи функсияи тақсимоти эмпирикӣ дида мешавад, ки 1) $0\le F^*(x)\le 1$; 2) $F^*(x)$ функсияи камнашаванда аст. Графики ин функсия ҳамеша зинашакл буда, дар нуқтаҳои x_i каниши ҷинси якум дорад (нигаред ба расми 9.3). Функсияи таҷрибавии тақсимот аз тартиби қиматҳо дар пайдарпайии (9.1) вобаста нест. Бинобар ин, барои ҳамаи интихобҳои аз ҳамдигар фақат бо тартиби қиматҳо фарқкунанда, функсияи $F^*(x)$ якхела аст.

§4. АДАДҲОИ ТАВСИФИИ ТАҚСИМОТИ ОМОРӢ

Маълум аст, ки қонуни тақсимоти бузургии тасодуфӣ бо функсияи тақсимот ё функсияи зичии тақсимот пурра тавсиф карда мешавад. Аммо дар баъзе ҳолатҳо ё ин функсияҳо номаълум мебошанд, ё зарурияти пурра тавсиф намудани қонуни тақсимот мавҷуд набуда, фақат муайян намудани ададҳои тавсифии он талаб карда мешавад. Ададҳои тавсифии асосии бузургии тасодуфӣ интизорияти математикӣ ва дисперсияи он мебошанд.

Чунин ададҳои тавсифӣ барои тақсимоти оморӣ низ муайян карда шудаанд. Ба монанди интизорияти математикии бузургии тасодуфӣ кимати миёнаи вариантаҳои тақсимоти оморӣ дохил карда шудааст:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

ки дар ин ҷо n ҳаҷми интихоб мебошад. Ин адади тавсифиро *миёнаи омории* бузургии тасодуфӣ меноманд.

Ба ҳамин монанд, дисперсияи тақсимоти оморӣ дохил карда шудааст:

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}.$$

Бузургии D^*-ро *дисперсияи оморӣ* меноманд. Моментҳои омории аввала ва марказии тартиби k -уми бузургии тасодуфӣ бошанд бо формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}, \quad D_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^k}{n}.$$

Нишон дода шудааст, ки дар ҳолати зиёд шудани шумораи мушоҳидаҳо (микдори вариантаҳо) ададҳои тавсифии тақсимоти оморӣ аз рӯи эҳтимолият ба ададҳои тавсифии мувофики тақсимоти назариявӣ майл мекунанд.

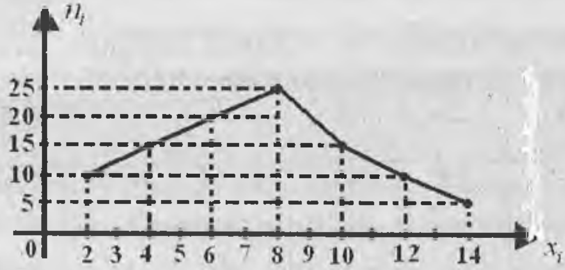
§5. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

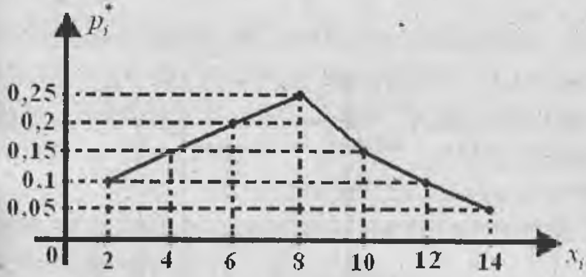
1. Тақсимоти интихоб дода шудааст(n =100):

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	10	15	20	25	15	10	5

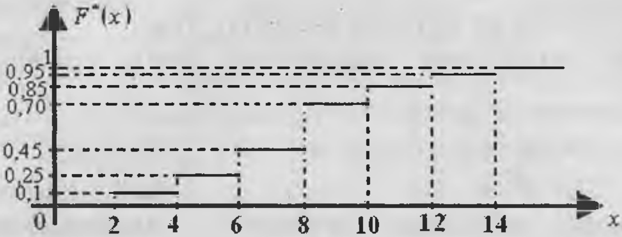
а) полигони зудиҳо ва зудиҳои нисбиро ёбед;
б) функсияи эмпирикии тақсимотро сохта, графики онро кашед.

Ҷавобҳо:
а)





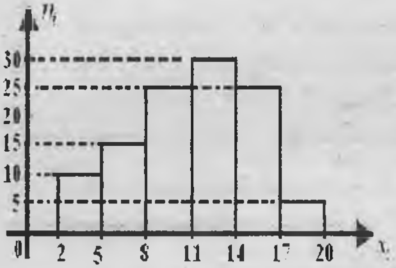
б) $$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{агар } x \le 2; \\ 0{,}10 & \text{агар } 2 < x \le 4; \\ 0{,}25 & \text{агар } 4 < x \le 6; \\ 0{,}45 & \text{агар } 6 < x \le 8; \\ 0{,}70 & \text{агар } 8 < x \le 10; \\ 0{,}85 & \text{агар } 10 < x \le 12; \\ 0{,}95 & \text{агар } 12 < x \le 14; \\ 1{,}00 & \text{агар } x > 14. \end{cases}$$

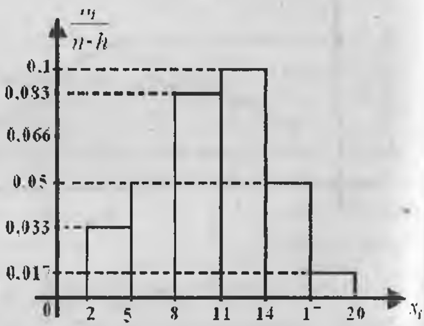


2. Гистограммаҳои зудиҳо ва зудиҳои нисбиро барои тақсимоти интихоби додашуда созед(n =100):

Рақами фосила	1	2	3	4	5	6
Фосилаҳои хусусӣ	2-5	5-8	8-11	11-14	14-17	17-20
Суммаи зудиҳои вариантаҳо	10	15	25	30	15	5

Ҷавобҳо:





БОБИ X. БАҲОИ ПАРАМЕТРҲОИ МАҶМӮИ ГЕНЕРАЛӢ АЗ РӮИ МАҶМӮИ ИНТИХОБИИ ОН

§1. БАҲОҲОИ НУҚТАГӢ

Фарз мекунем, ки $F(x,\theta)$ - функсияи тақсимоти аломати омӯхташавандаи бузургии тасодуфии X маълум буда, параметри θ номаълум бошад. Қайд менамоем, ки дар ҳолати умумӣ параметрҳои номаълум метавонанд якчандто бошанд. Мақсади мо муайян намудани баҳои параметри (ё параметрҳои) номаълуми θ, дар асоси элементҳои маҷмӯи интихобӣ мебошад. Барои ноил гаштан ба ин мақсад, мо функсияи $\theta_1(x_1,x_2,...,x_n)$-ро, ки аз элементҳои интихоб вобаста мебошад, дохил менамоем. Маълум, ки то ҷудокунии элементҳои маҷмӯи интихобӣ баҳои θ_1 бузургии тасодуфӣ буда, қонуни тақсимоташ аз қонуни тақсимоти x ва аз ҳаҷми интихоб n вобаста мебошад. Пас аз гузаронида шудани санҷишҳо (ҷудо карда шудани элементҳои маҷмӯи интихобӣ) θ_1 бузургии доимӣ мешавад.

Бузургии θ_1 -ро *бузургии оморӣ* меноманд. Барои он ки θ_1 баҳои амалан зарурии θ шавад, он бояд хосиятҳои *таҳрифнаёфта, асоснок* ва *самаранокро* доро бошад.

Баҳои θ_1 баҳои *таҳрифнаёфтаи* параметри θ номида мешавад, агар интизорияти математикии он ба параметри θ баробар бошад:

$$M\theta_1(x_1,x_2,...,x_n)=\theta.$$

Баҳои θ_1 барои параметри номаълуми θ *асоснок* номида мешавад, агар ҳангоми беҳад афзудани ҳаҷми интихоб n, он аз рӯи эҳтимолият ба θ майл намояд:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta_1(x_1,x_2,...,x_n)-\theta|<\varepsilon)=1.$$

Барои параметри номаълуми θ метавонанд якчандто баҳоҳои таҳрифнаёфта ва асоснок мавҷуд бошанд. Аз байни онҳо баҳое, ки дисперсияи хурдтарин дорад, баҳои *самаранок* номида мешавад.

Агар баҳои θ_1 бо як адад ифода ёбад, он гоҳ онро *баҳои нуқтагӣ* меноманд.

Дар бисёр ҳолатҳо ба сифати баҳои нуқтагии θ_1 моментҳои омории бузургии тасодуфии X -ро ё функсияҳо аз ин моментҳоро истифода мебаранд.

Ҳамин тавр, усули моментҳо, усули муайян намудани θ_1 мебошад, ки дар он ба сифати θ_1 моментҳои омории бузургии тасодуфии X ё функсияҳо аз ин моментҳо истифода мешаванд.

Бигузор, нисбат ба бузургии тасодуфии X n - мушоҳидаҳои новобаста гузаронида шуда, натиҷаҳои зерин ба даст омада бошанд:

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \qquad (10.1)$$

Инчунин интизорияти математикии ин бузургии тасодуфӣ $M(X)=a$ ва дисперсияи он $D(X)=\sigma^2$ номаълум бошанд. Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки миёнаи оморӣ $\bar{x}$ ва дисперсияи оморӣ D^* мувофиқан барои параметрҳои номаълуми тақсимот a ва σ^2 баҳоҳои таҳрифнаёфта мешаванд.

Бояд қайд кард, ки бузургиҳои қатори (10.1) то гузаронидани санҷишҳо бузургиҳои тасодуфӣ буда, қонуни тақсимоташон бо қонуни тақсимоти X якхела мебошад $\left(M(x_i)=a,\ D(x_i)=\sigma^2,\ i=1,2,\ldots,n\right)$. Маълум, ки $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ мебошад.

Бинобар ин

$$M(\bar{x})=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i)=\frac{a\cdot n}{n}=a.$$

Аз ин баробарӣ маълум мегардад, ки $\bar{x}$ барои a баҳои таҳрифнаёфта аст.

Акнун нишон медиҳем, ки дисперсияи оморӣ

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} \qquad (10.2)$$

барои σ^2 баҳои таҳрифёфта мешавад.

Барои ин дар тарафи рости баробарии (10.2) табдилдиҳӣ гузаронида ҳосил мекунем:

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a + a - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 +$$

$$+\frac{2\left(a-\bar{x}\right)}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) + \left(a - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \left(\bar{x} - a\right)^2. \qquad (10.3)$$

Аз ин ҷо

$$M\left(D^*\right) = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \left(\bar{x} - a\right)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i - a)^2 - M\left(\bar{x} - a\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(x_i) - D\left(\bar{x}\right) = \frac{n\cdot\sigma^2}{n} - D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) =$$

$$= \sigma^2 - \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}D(x_i) = \sigma^2 - \frac{n\cdot\sigma^2}{n^2} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2.$$

Ҳамин тавр,

$$M\left(D^*\right) = \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2. \qquad (10.4)$$

Баробарии ҳосилшуда нишон медиҳад, ки дисперсияи оморӣ барои параметри номаълуми σ^2 баҳои таҳрифёфта мешавад.

Агар дисперсияи омориро ба $\frac{n}{n-1}$ зарб намоем, он гоҳ баҳои таҳрифнаёфтаи σ^2 - ро ҳосил мекунем:

$$D_u^* = \frac{n}{n-1}\cdot D^* = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2, \qquad (10.5)$$

Бузургии D_u^* - ро *дисперсияи омории ислоҳшуда* меноманд. Агар ҳаҷми интихоб n калон бошад, он гоҳ фарқи байни D^* ва D_u^* кам мешавад.

Агар дисперсияҳои $D(x_i)=\sigma^2$, $i=1,2,...,n$ охирнок бошанд, он гоҳ дар асоси теоремаи Чебышев, барои ҳаргуна адади доимии $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{x}-a|<\varepsilon)=\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)-a\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Ин баробарӣ нишон медиҳад, ки ҳангоми $n\to\infty$ миёнаи омории $\bar{x}$, аз рӯи эҳтимолият, ба параметри номаълуми a майл мекунад ва бинобар ин $\bar{x}$ баҳои асосноки a мешавад.

Ба ҳамин монанд, дар асоси теоремаи Чебышев нишон додан мумкин аст, ки ҳам D^* ва ҳам D_u^* барои параметри номаълуми σ^2 баҳоҳои асоснок мешаванд.

Мисоли 1. Дар натиҷаи ченкунии бузургии физикӣ натиҷаҳои зерин ба даст оварда шудааст: 8; 9; 11; 12. Миёнаи оморӣ, дисперсияи оморӣ ва дисперсияи омории ислоҳшудаи натиҷаҳои ченкунӣ ёфта шаванд.

Ҳал.

а) Миёнаи омориро бо формулаи $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ меёбем:

$$\bar{x}=\frac{1}{4}(8+9+11+12)=\frac{40}{4}=10.$$

б)Дисперсияи омориро бо формулаи $D^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ меёбем:

$$D^*=\frac{1}{4}\left((8-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2\right)=\frac{1}{4}(4+1+1+4)=\frac{10}{4}=2{,}5.$$

в) Дисперсияи омории ислоҳшударо бо формулаи $D_u^*=\frac{n}{n-1}\cdot D^*$ меёбем: $D_u^*=\frac{n}{n-1}\cdot D^*=\frac{4}{3}\cdot\frac{10}{4}=\frac{10}{3}\approx 3{,}3.$

Мисоли 2. Бузургии тасодуфии X- шумораи маҳсулоти нуқсондор дар гурӯҳи додашудаи маҳсулотҳо мебошад ва ба қонуни тақсимоти Пуассон итоат менамояд. Тақсимоти омории маҷмӯи интихобии аз ин гурӯҳ ҷудокардашуда, дода шудааст:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Бо усули моментҳо баҳои нуқтагии параметри номаълуми λ - ро дар қонуни тақсимоти Пуассон муайян кунед.

Ҳал. Маълум, ки ҳаҷми интихоб $n=132+43+20+3+2=200$ мебошад. Азбаски X ба қонуни тақсимоти Пуассон итоат менамояд, пас

$$P_n(n_i)=\frac{\lambda^{n_i}}{n_i!}\cdot e^{-\lambda},$$

ки дар ин ҷо n - миқдори санҷишҳои гузаронидашуда (ҳаҷми интихоб) буда, n_i - миқдори рӯйдиҳии ҳодисаҳо (зудии вариантаҳо) мебошад.

Азбаски як параметр ёфта мешавад кифоя аст, ки нисбат ба ин параметр як муодила ҳосил карда шавад.

Моменти аввалаи назариявии тартиби якумро ба моменти аввалаи омории тартиби якум баробар намуда, ин муодиларо ҳосил мекунем:

$$v_1=\overline{x_1}.$$

Азбаски моменти аввалаи назариявии тартиби якуми бузургии тасодуфӣ интизорияти математикии он аст, пас $v_1=M(X)$.

Ба ҳамин монанд, моменти аввалаи омории тартиби якум ин миёнаи оморӣ аст: $\overline{x_1}=\overline{x}$. Аз тарафи дигар, маълум ки интизорияти математикии тақсимоти Пуассон ба параметри λ баробар аст: $M(X)=\lambda$.

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\lambda=\overline{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{5}n_ix_i=\frac{1}{200}(132\cdot 0+43\cdot 1+20\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 4)=$$

$$=\frac{1}{200}(43+40+9+8)=\frac{100}{200}=0{,}5.$$

§2. УСУЛИ БА ҲАҚИҚАТ МОНАНДИ КАЛОНТАРИН

Бигузор, намуди умумии қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии X маълум буда, қиматҳои як ё якчанд параметрҳои он номаълум бошанд. Он гоҳ бо усули ба ҳақиқат монанди калонтарин баҳои нуқтагии параметрҳои номаълумро ёфтан мумкин аст.

Моҳияти ин усул аз он иборат аст, ки ҷустуҷӯи баҳои параметрҳои номаълум ба ҷустуҷӯи максимуми функсияи махсуси аз як ё якчанд параметрҳои номаълум вобаста оварда мешавад.

Ин функсия бо назардошти наздиктарин шудани тақсимоти маълуми бузургии тасодуфии X ба натиҷаҳои маҷмӯи интихобӣ сохта мешавад.

Саравал, сохтан ва истифода намудани функсияи ба ҳақиқат монандро барои бузургиҳои тасодуфии дискретӣ дида мебароем.

Бигузор, намуди умумии қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дискретии X маълум буда, кимати параметри он θ номаълум бошад. Инчунин, бигузор барои баҳо додан ба параметри номаълуми θ, бо бузургии тасодуфии X, n мушоҳидаҳои новобаста гузаронида, натиҷаҳои x_1, $x_2,...,$ x_n ба даст оварда шуда бошанд.

Баҳои нуқтагии параметри номаълумро, ки аз натиҷаҳои мушоҳидаҳо вобаста мебошад $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ меёбем.

Эҳтимолияти онро, ки X қимати x_j - ро кабул менамояд бо $P(x_j;\theta)$ ишора мекунем. Он гоҳ *функсияи ба ҳақиқат монанди бузургии тасодуфии дискретии* X гуфта функсияи аз параметри θ вобастаи зеринро меноманд:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n;\ \theta) = P(x_1;\theta) \cdot P(x_2;\theta) \cdot ... \cdot P(x_n;\theta).$$

Баҳои ба ҳақиқат монанди калонтарини параметри θ гуфта, он қимати θ^*-ро меноманд, ки бо он функсияи овардашуда қимати максималии худро кабул намояд.

Азбаски функсияҳои L ва $\ln L$ дар як нуқта максимум доранд, пас ба ивази функсияи L функсияи $\ln L$-ро истифода мебаранд, ки ёфтани қимати максималии он қулайтар мебошад. Функсияи $\ln L$-ро функсияи логарифмии ба ҳақиқат монанд меноманд.

Барои ёфтани максимуми функсияи $\ln L$, ки аз параметри θ вобаста мебошад, ҳосилаи тартиби якуми ин функсияро нисбат ба параметри θ ёфта, онро ба сифр баробар намуда муодилаи

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=0 \qquad (10.6)$$

-ро ҳосил мекунем, ки ҳалҳои он θ^* нуқтаҳои критикии функсияи $\ln L$ мешаванд.

Муодилаи (10.6) -ро *муодилаи ба ҳақиқат монанд* меноманд. Пас аз ин ҳосилаи тартиби дуюми функсияи $\ln L$ муайян карда мешавад:

$$\frac{d^2\ln L}{d\theta^2}.$$

Агар қимати ҳосилаи тартиби дуюм барои $\theta=\theta^*$ манфӣ бошад, пас θ^* нуқтаи максимуми функсия мебошад.

Ин қимати θ^* ба сифати баҳои ба ҳақиқат монанди калонтарини параметри номаълуми θ қабул карда мешавад.

Акнун фарз мекунем, ки бузургии тасодуфии X бефосила аст ва намуди умумии функсияи зичии тақсимоти он $f(x;\theta)$ дода шудааст, ки дар он параметри θ номаълум мебошад.

Он гоҳ *функсияи ба ҳақиқат монанди бузургии тасодуфии бефосилаи X* гуфта, функсияи аз параметри θ вобастаи зеринро меноманд:

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdot...\cdot f(x_n;\theta),$$

ки дар ин ҷо $x_1, x_2, ..., x_n$ натиҷаҳои n мушоҳидаҳои новобаста бо бузургии тасодуфии X мебошанд.

Қоидаи ёфтани баҳои ба ҳақиқат монанди калонтарини параметри номаълуми θ, айнан монанди қоидаи бо бузургии тасодуфии дискретӣ дидашуда мебошад.

Агар функсияи зичии тақсимот аз ду параметри номаълум вобаста бошад $f(x;\theta_1,\theta_2)$, он гоҳ функсияи ба ҳақиқат монанд низ аз ду аргументи новобастаи θ_1 ва θ_2 вобаста мешавад ва намуди зеринро соҳиб мешавад:

$$L = f(x_1;\theta_1,\theta_2)\cdot f(x_2;\theta_1,\theta_2)\cdot ...\cdot f(x_n;\theta_1,\theta_2).$$

Дар ин ҷо низ функсияи логарифмии ба ҳақиқат монанд муайян карда мешавад ва барои ёфтани максимуми он системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0. \end{cases}$$

ҳал карда мешавад.

Мисоли 1. Бо ёрии усули ба ҳақиқат монанди калонтарин баҳои нуқтагии параметри номаълуми p (эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодиса дар як санҷиш)-ро дар қонуни тақсимоти биномиалӣ:

$$P_m(x_i) = C_m^{x_i}\cdot p^{x_i}\cdot (1-p)^{m-x_i},\ \ i = 1, 2, ..., n,$$

ки дар ин ҷо x_i - миқдори рӯйдиҳии ҳодиса дар таҷрибаи i-юм, m - миқдори санҷишҳо дар як таҷриба, n - миқдори таҷрибаҳо мебошад, меёбем.

Ҳал. Функсияи ба ҳақиқат монандро месозем $\theta = p$:

$$L = p(x_1;\theta)\cdot p(x_2;\theta)\cdot ...\cdot p(x_n;\theta),$$

ё

$$L(\theta) = \left[C_m^{x_1}\cdot \theta^{x_1}(1-\theta)^{m-x_1}\right]\cdot \left[C_m^{x_2}\cdot \theta^{x_2}(1-\theta)^{m-x_2}\right]\cdot ...\cdot \left[C_m^{x_n}\cdot \theta^{x_n}(1-\theta)^{m-x_n}\right]$$

ё

$$L(\theta)=\left(C_m^{x_1}\cdot C_m^{x_2}\cdots C_m^{x_n}\right)\cdot\theta^{x_1+x_2+\ldots+x_n}\cdot(1-\theta)^{nm-(x_1+x_2+\ldots+x_n)}.$$

Функсияи логарифмии ба ҳакиқат монанд чунин намуд мегирад:

$$\ln L(\theta)=\ln\left[C_m^{x_1}\cdot C_m^{x_2}\cdots C_m^{x_n}\right]+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\theta+\left(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-\theta).$$

Аз ин ҷо

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}-\left(n\cdot m-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{1-\theta}.$$

Ифодаи ҳосилшударо баробари сифр қабул карда, муодилаи ба ҳақиқат монандро ҳосил мекунем:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}-\left(n\cdot m-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{1-\theta}=0.$$

Ин муодиларо ҳал карда ҳосил мекунем:

$$\theta^*=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)/(n\cdot m).$$

Ҳосилаи тартиби дуюуми функсияи $\ln L(\theta)$ - ро меёбем:

$$\frac{d^2\ln L(\theta)}{d\theta^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}-\frac{n\cdot m-\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-\theta)^2}.$$

Бо осонӣ муайян намудан мумкин аст, ки барои қимати $\theta^*=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)/(n\cdot m)$ ҳосилаи тартиби дуюм манфӣ мебошад, бинобар ин θ^* баҳои ба ҳақиқат монанди калонтарини параметри номаълуми p мешавад.

Маълум, ки агар ҳодиса x_i - маротиба дар n_i таҷрибаҳо рӯй дода бошад, он гоҳ

$$\theta^*=\left(\sum_{i=1}^{n}n_i\cdot x_i\right)/(n\cdot m).$$

Мисоли 2. Бо ёрии усули ба ҳақиқат монанди калонтарин баҳои нуқтагии параметрҳои номаълуми a ва σ^2 - и қонуни тақсимоти нормалиро барои интихоби ҳаҷмаш n муайян мекунем.

Ҳал. Маълум, ки $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. $\theta_1=a$ ва $\theta_2=\sigma^2$ гузошта, функсияи ба ҳақиқат монандро месозем:

$$L(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\cdot e^{-\frac{(x_1-\theta_1)^2}{2\theta_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\cdot e^{-\frac{(x_n-\theta_1)^2}{2\theta_2}}.$$

Он гоҳ функсияи логарифмии ба ҳақиқат монанд, чунин намуд мегирад:

$$\ln L(\theta_1,\theta_2)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\theta_2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}.$$

Ҳосилаҳои хусусии ин функсияро нисбат ба параметрҳои θ_1 ва θ_2 меёбем:

$$\frac{\partial\ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}=-\frac{1}{2\theta_2}\cdot\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\theta_1),$$

$$\frac{\partial\ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2.$$

Дар тарафҳои рости баробариҳои охирон каме табдилдиҳӣ гузаронида, онҳоро баробари сифр карда, системаи муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\cdot\theta_1=0,\\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2-n\cdot\theta_2=0.\end{cases}$$

Аз муодилаи якуми система меёбем:

$$\theta_1^*=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$$

$\theta_1=\bar{x}$ гузошта, аз муодилаи дуюм меёбем:

$$\theta_2^*=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=D^*.$$

Нишон додан мумкин аст, ки дар нуқтаи $(\bar{x},D^*)$ функсияи $\ln L(\theta_1,\theta_2)$ максимум дорад. Бинобар ин баҳои ба ҳакиқат монанди калонтарин барои параметри a миёнаи омории $\bar{x}$ ва барои σ^2 дисперсияи омории D^* мешавад.

§3. УСУЛҲОИ ФОСИЛАГӢ

Дар мавзӯҳои гузашта баҳоҳои нуқтагии параметри номаълуми тақсимотро дида баромадем. Баҳоҳои нуқтагӣ бо як адад ифода карда мешаванд, яъне дар тири ададӣ як нуқтаро ифода менамоянд, ки дар наздикии қимати ҳақиқии параметри номаълум ҷойгир шудааст.

Барои тасдиқ намудани он, ки баҳои нуқтагӣ ба қимати ҳақиқии параметри номаълум кифоя наздик аст, лозим аст, ки паҳншавии (тамоили миёнаи квадратии) σ худи ин баҳоро муайян намоем. Дар ин ҳолат мо аз мафҳуми нуқта ба мафҳуми фосила мегузарем.

Бинобар ин барои муайян намудани на танҳо баҳои параметри номаълуми θ, балки инчунин саҳеҳӣ ва эътимоднокии ин баҳо усулҳои фосилагӣ сохта шудаанд.

Бигузор, $F(x,\theta)$ -функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии X дода шуд бошад, қимати параметри θ номаълум бошад ва дар асоси n мушоҳидаҳои новобаста бо бузургии тасодуфии X интихоби зерин бо даст оварда шуда бошад: $x_1, x_2, ..., x_n$.

Инчунин дар асоси ин интихоб баҳои таҳрифнаёфтаи θ^* муайян карда шуда бошад. Хатогии баҳои ҳосилшударо муайян мекунем. Барои ин ягон эҳтимолияти α-ро қабул намуда, чунин қимати $\varepsilon > 0$-ро муайян мекунем, ки барои он баробарии

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = \alpha \tag{10.7}$$

иҷро шавад.

Маълум, ки ин баробариро ба намуди

$$P\left(\theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon\right) = \alpha \tag{10.8}$$

навиштан мумкин аст.

Баробарии (10.8) нишон медиҳад, ки қимати номаълуми параметри θ бо эҳтимолияти α ба фосилаи $(\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon)$ тааллуқ дорад. Аммо бояд як нуктаро қайд кард, ки қимати номаълуми θ бузургии тасодуфӣ набуда, балки сарҳадҳои фосила бузургиҳои тасодуфӣ мебошад (θ^* бузургиии тасодуфӣ мебошад). Бинобар ин "ибораи фосилаи $(\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon)$ бо эҳтимолияти α қимати номаълуми θ - ро дарбар мегирад (ё мепӯшонад)" нисбат ба ибораи "қимати номаълуми параметри θ бо эҳтимолияти α ба фосилаи $(\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon)$ тааллук дорад" дурусттар мебошад.

Дар ин ҳолат фосилаи $(\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon)$-ро фосилаи бовариноки ба эҳтимолияти бовариноки α мувофиқ меноманд.

Ҳамин тавр, агар баробарии (10.7) ҷой дошта бошад, он гоҳ мегӯянд, ки фосилаи бовариноки $(\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon)$ бо эҳтимолияти бовариноки α кимати номаълуми параметри θ - ро дарбар мегирад.

Дар баробарии (10.7) қимати $\varepsilon > 0$ -и ёфташаванда аз қимати додашудаи α вобаста мебошад. Бинобар ин барои ифода намудани ин вобастагӣ баробарии (10.7) -ро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon_\alpha\right) = \alpha. \qquad (10.9)$$

Дар масъалаҳои амалӣ, одатан, киматҳои эҳтимолияти α калон кабул карда мешаванд ($\alpha = 0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}999$ ва ғайра). Ин эҳтимолият дараҷаи боварии моро ба баҳои ёфташуда муайян мекунад. Масалан, агар $\alpha = 0{,}95$ қабул намуда, фосилаи боваринок созем, он гоҳ ба ҳисоби миёна дар 5 ҳолат аз 100 ин фосила қимати параметри номаълуми θ -ро дарбар намегирад. Агар $\alpha = 0{,}99$ қабул намоем, он гоҳ ба ҳисоби миёна дар 1 ҳолат аз 100 фосилаи бовариноки сохташуда қимати θ -ро дарбар намегирад. Албатта, ин як ҳолат кадом ҳолат аст ба мо номуайян мемонад.

Табиист, ки кимати α - ро калонтар қабул намуда, мо фосилаи боваринокро васеътар мекунем, яъне хатогӣ калонтар мешавад.

Баробарии (10.9) нишон медиҳад, ки ба қимати калонтари α фосилаи калонтари $(\theta^* - \varepsilon_\alpha, \theta^* + \varepsilon_\alpha)$ мувофик меояд, яъне дараҷаи бовариро ба баҳои θ^* баланд намуда, хатогии ин баҳоро калон менамоем. Бинобар ин дар масъалаҳои гуногуни амалӣ қимати α, вобаста ба саҳеҳии зарурии хатогии баҳои ёфташаванда, гуногун қабул карда мешавад.

Албатта, баробарии (10.9) имконият медиҳад, ки масъалаи баръакс низ ҳал карда шавад, яъне барои саҳеҳии хатогии додашудаи ε_α эҳтимолияти бовариноки α ёфт шавад.

Қайд менамоем, ки қоидаи сохтани фосилаҳои бовариноk аз қонуни тақсимоти баҳои параметри номаълум θ^* вобаста мебошад. Бинобар ин якчанд ҳолатҳои хусусии сохтани фосилаҳои боваринокро дида мебароем.

1. Фосилаи бовариноk барои қимати миёнаи номаълум. Бигузор, дар натиҷаи n санҷишҳои новобаста барои бузургии тасодуфии X натиҷаҳои $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ба даст оварда шуда бошанд. Инчунин фарз мекунем, ки интизорияти математикии ин бузургии тасодуфӣ a номаълум буда, дисперсияаш D маълум бошад.

Барои интизорияти математикии номаълуми a фосилаи бовариноk месозем.

Дар мавзӯъҳои гузашта нишон дода шуда буд, ки миёнаи интихобӣ

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

ва дисперсияи интихобии ислоҳшуда

$$D_{u}^{*}=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$$

барои интизорияти математикӣ ва дисперсияи бузургии тасодуфии X баҳоҳои таҳрифнаёфта ва асоснок мешаванд.

Азбаски $\bar{x}$ аз суммаи n бузургиҳои тасодуфии новобастаи қонуни тақсимоти якхела доштаи x_i иборат мебошад$\left(M(x_i)=a;\, D(x_i)=D;\, i=1,2,\ldots,n\right)$, пас дар асоси теоремаи ҳудудии марказӣ қонуни тақсимоти он ба қонуни тақсимоти нормалӣ наздик аст. Хосиятҳои интизорияти математикӣ ва дисперсияро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$M\left(\bar{x}\right)=M\left(\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}M\left(x_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}a=a.$$

$$D\left(\bar{x}\right)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{n}D\left(x_i\right)=\frac{n\cdot D}{n^2}=\frac{D}{n}.$$

Акнун барои эҳтимолияти додашудаи α чунин адади ε_α -ро меёбем, ки баробарии

$$P\left(\left|\bar{x}-a\right|<\varepsilon_\alpha\right)=\alpha \qquad (10.10)$$

иҷро шавад.

Ба қонуни тақсимоти нормалӣ наздик будани қонуни тақсимоти $\bar{x}$ -ро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем:

$$P\left(\left|\bar{x}-a\right|<\varepsilon_\alpha\right)=P\left(a-\varepsilon_\alpha<\bar{x}<a+\varepsilon_\alpha\right)\approx\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{a+\varepsilon_\alpha-a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{a-\varepsilon_\alpha-a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\approx\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon_\alpha}{\sigma}\right),$$

ки дар ин ҷо $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функсияи Лаплас буда, $\sigma=\sqrt{D}$ мебошад.

Ҳамин тавр,

$$P\left(\left|\bar{x}-a\right|<\varepsilon_\alpha\right)\approx\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon_\alpha}{\sigma}\right). \qquad (10.11)$$

Баробариҳои (10.10) ва (10.11) –ро муқоиса намуда, ҳосил мекунем:

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon_\alpha}{\sigma}\right)\approx\alpha. \qquad (10.12)$$

Аз баробарии (10.12) ва ҷадвали қиматҳои функсияи Лаплас (Ҷадвали 2, ки дар охири китоб оварда шудааст) истифода намуда, қимати ε_α-ро ёфта, фосилаи бовариноки $\left(\bar{x}-\varepsilon_\alpha;\, \bar{x}+\varepsilon_\alpha\right)$-ро барои қимати номаълуми a муайян намудан мумкин аст.

Аз баробарии (10.12) дар ҳолати номаълум будани $\sigma=\sqrt{D}$ низ истифода намудан мумкин аст. Дар ин ҳолат $D\approx D_u^*$ қабул намуда, фосилаи бовариноқро тақрибан муайян карда метавонем.

Мисол. Бо бузургии тасодуфии X 25-санҷишҳои новобаста гузаронида шуда, натиҷаҳои зерин ба даст оварда шудаанд: 246; 247; 247,3; 147,4; 251,7; 252,5; 252,6; 252,8; 252,8; 252,9; 253; 253,6; 254,6; 254,7; 254,8; 256,1; 256,3; 256,8; 257,4; 259,2; 251,98; 253,98; 252,98; 251,98; 253,98.

Фарз мекунем, ки дисперсияи X маълум аст: $D=9$. Фосилаи бовариноқ бо эҳтимолияти $\alpha=0{,}95$, барои интизорияти математикии он муайян карда шавад.

Ҳал. Миёнаи омории $\bar{x}$-ро ҳисоб мекунем:

$$\bar{x}=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{n}x_i=252{,}98.$$

Маълум, ки $n=25, \alpha=0{,}95, \sigma=3$ аст. Ин қиматҳоро дар формулаи (10.12) гузошта ҳосил мекунем:

$$\Phi\left(\frac{5}{3}\cdot\varepsilon_\alpha\right)\approx0{,}95.$$

Аз ҷадвали қиматҳои функсияи Лаплас меёбем:

$$\frac{5}{3}\cdot\varepsilon_\alpha \approx 1{,}96 \text{ ё } \varepsilon_\alpha = 1{,}18.$$

Фосилаи боваринокро меёбем:

$$\bar{x}-\varepsilon_\alpha = 252{,}98-1{,}18 = 251{,}80; \quad \bar{x}+\varepsilon_\alpha = 252{,}98+1{,}18 = 254{,}16.$$

Ҳамин тавр, фосилаи бовариноки (251,80; 254,16) бо эҳтимолияти бовариноки $\alpha = 0{,}95$ қимати номаълуми интизорияти математикии X-ро дарбар мегирад.

2. Фосилаи бовариног барои эҳтимолияти номаълум дар қонуни тақсимоти биномиалӣ. Фарз мекунем, ки дар ҳар яке аз n санҷишҳои новобаста ҳодисаи A бо эҳтимолияти доимии p рӯй медиҳад. Бигузор, m миқдори рӯйдиҳии ҳодисаи A дар n санҷишҳо бошад. Бо x_i - миқдори рӯйдиҳии ҳодисаи A - ро дар санҷиши i - юм ишора мекунем. Он гоҳ маълум, ки $m = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ва бузургии тасодуфии x_i қиматҳои 1 ва 0 -ро мувофиқан бо эҳтимолиятҳои p ва $q = 1-p$ қабул менамояд. Ҷадвалҳои тақсимоти x_i ва x_i^2 намуди зерин доранд:

x_i	0	1
p	q	p

x_i^2	0	1
p	q	p

Аз ин ҷо

$$M(x_i) = M(x_i^2) = 0\cdot q + 1\cdot p = p;$$
$$D(x_i) = M(x_i^2) - [M(x_i)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = p\cdot q;$$
$$\sigma = \sqrt{D(x_i)} = \sqrt{pq}.$$

Зудии нисбии рӯйдиҳии ҳодисаи A ба $\frac{m}{n} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$ баробар аст. Ифодаҳои ҳосилшударо ба баробарии (10.11) гузошта, ҳосил мекунем:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon_\alpha\right)\approx\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon_\alpha}{\sqrt{p\cdot q}}\right), \qquad (10.13)$$

Ишораи $z_\alpha=\dfrac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon_\alpha}{\sqrt{p\cdot q}}$ - ро истифода намуда, баробарии охиронро ба намуди зерин меоварем:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<z_\alpha\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)\approx\Phi(z_\alpha)=\alpha,$$

ё $q=1-p$ -ро ба инобат гирифта, ҳарду тарафи нобаробариро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$P\left\{\left(\frac{m}{n}-p\right)^2<z_\alpha^2\frac{p(1-p)}{n}\right\}\approx\Phi(z_\alpha)=\alpha.$$

Нобаробарии дохили қавси фигуравиро нисбат ба p ҳал карда, фосилаи боварионки $(p_1<p<p_2)$-ро меёбем, ки қиматҳои p_1 ва p_2 бо баробариҳои зерин муайян карда мешаванд:

$$p_1=\frac{n}{n+z_\alpha^2}\left[\frac{m}{n}+\frac{z_\alpha^2}{2n}-z_\alpha\sqrt{\frac{m(n-m)}{n^3}+\left(\frac{z_\alpha^2}{2n}\right)^2}\right], \qquad (10.14)$$

$$p_2=\frac{n}{n+z_\alpha^2}\left[\frac{m}{n}+\frac{z_\alpha^2}{2n}+z_\alpha\sqrt{\frac{m(n-m)}{n^3}+\left(\frac{z_\alpha^2}{2n}\right)^2}\right]. \qquad (10.15)$$

Қимати z_α аз баробарии $\Phi(z_\alpha)=\alpha$, бо истифодабарии ҷадвали қиматҳои функсияи Лаплас муайян карда мешавад.

Ҳамин тавр, фосилаи боварионки $(p_1;p_2)$ бо эҳтимолияти боварионки α параметри номаълуми p-ро дарбар мегирад.

Мисоли 1. Шӯъбаи назорати техникӣ 50 маҳсулоти истеҳсолшударо санҷида, дар байни онҳо 8 маҳсулоти нуқсондорро муайян намуд. Фосилаи боваринокро барои эҳтимолияти бенуқсон истеҳсол шудани маҳсулот p, бо эҳтимолияти боварионки $\alpha=0{,}95$, муайян кунед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $n=50$; $m=42$; $\alpha=0,95$. Аз баробарии $\Phi(z_\alpha)=\alpha$ қимати z_α-ро муайян мекунем:

$$\Phi(z_\alpha)=0,950.$$

Аз ҷадвали қиматҳои функсияи Лаплас(Ҷадвали 2) меёбем:

$$z_\alpha=1,96.$$

Акнун қиматҳои p_1 ва p_2 -ро аз баробариҳои (10.14) ва (10.15) муайян мекунем:

$$p_1=\frac{50}{50+(1,96)^2}\left[\frac{42}{50}+\frac{(1,96)^2}{2\cdot 50}-1,96\cdot\sqrt{\frac{42(50-42)}{50^3}+\left(\frac{(1,96)^2}{2\cdot 50}\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{50}{50+(1,96)^2}\left[\frac{42}{50}+\frac{(1,96)^2}{100}-1,96\sqrt{\frac{42\cdot 8}{50^3}+\left(\frac{(1,96)^2}{100}\right)^2}\right]=0,6983.$$

$$p_2=\frac{50}{50+(1,96)^2}\left[\frac{42}{50}+\frac{(1,96)^2}{2\cdot 50}+1,96\cdot\sqrt{\frac{42(50-42)}{50^3}+\left(\frac{(1,96)^2}{2\cdot 50}\right)^2}\right]=0,9332.$$

Ҳамин тавр, фосилаи бовариноки $(0,6983; 0,9332)$ бо эҳтимолияти бовариноки $\alpha=0,95$ параметри номаълуми p - ро дарбар мегирад.

Бо ёрии формулаи (10.13) масъалаҳои дигарро низ ҳал намудан мумкин аст. Масалан, муайян намудани миқдори зарурии санҷишҳо n барои бо саҳеҳии додашуда муайян намудани қимати номаълуми параметри p.

Мисоли 2. Дар қуттӣ кураҳои сафед ва сиёҳ бо таносуби $4:1$ мавҷуданд. Аз қуттӣ як кура гирифта, ранги онро қайд карда, онро боз ба қуттӣ бармегардонанд. Миқдори чунин санҷишҳо n чӣ қадар бояд бошад, ки эҳтимолияти он ки қимати мутлақи фарқи зудии нисбӣ ва эҳтимолияти баромадани кураи сафед на зиёда аз 0,01 мешавад, ба 0,9722 баробар шавад.

Ҳал. Мувофики шарти масъала

$$p = \frac{4}{5};\ q = \frac{1}{5};\ \varepsilon = 0{,}01. \quad P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{4}{5}\right| \le 0{,}01\right) = 0{,}9722.$$

Аз баробарии (10.13) истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\Phi\left(0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{n}{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}}\right) = 0{,}9722 \quad \text{ё} \quad \Phi\left(0{,}025\sqrt{n}\right) = 0{,}9722.$$

Аз ҷадвали қиматҳои функсияи Лаплас(Ҷадвали 2) истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$0{,}025\sqrt{n} = 2{,}2;\ \sqrt{n} = 88;\ n = 7744.$$

Қайд менамоем, ки бо ёрии баробарии (10.13) инчунин саҳеҳии баҳои ёфташуда ε_α-ро, дар ҳолати муайян будани қиматҳои параметрҳои бокимонда, ёфтан мумкин аст.

Мисоли 3. Эҳтимолияти рӯй додани ҳодиса дар ҳар яке аз 10000 санҷишҳои новобаста ба 0,75 баробар аст. Чунин адади мусбати ε_α ёфта шавад, ки бо эҳтимолияти $\alpha = 0{,}979$ кимати мутлаки фарқи зудии нисбӣ ва эҳтимолияти 0,75 аз ε_α зиёд нашавад.

Ҳал. Мувофики шарти масъала $n = 10000;\ p = 0{,}75;$ $q = 0{,}25;\ \alpha = 0{,}979.$ Аз баробарии

$$\Phi\left(\varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \alpha$$

истифода мебарем:

$$\Phi\left(\varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{10000}{0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right) = 0{,}979.$$

Аз ҷадвали қиматҳои функсияи Лаплас истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{100}{\sqrt{0{,}1875}} \cdot \varepsilon_\alpha = 2{,}31.$$

Муодиларо хал карда меёбем: $\varepsilon_\alpha \approx 0{,}01.$

3. Фосилаи боваринок барои интизорияти математикии номаълуми қонуни тақсимоти нормалӣ ҳангоми номаълум будани қимати тамоили миёнаи квадратӣ. Дар мавзӯи гузашта мо усули тақрибии сохтани фосилаи боваринокро барои қимати миёнаи номаълум дида баромадем. Барои аниқ муайян намудани фосилаи боваринок донистани қонуни тақсимоти $\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i$ зарур аст. Аммо, дар ҳолати умумӣ, худи қонуни тақсимоти X метавонад аз ин параметрҳои номаълум вобаста бошад. Маълум мешавад, ки дар баъзе ҳолатҳо, аз бузургии тасодуфии $\bar{x}$ ба бузургии тасодуфии дигаре гузаштан мумкин аст, ки он аз натиҷаҳои санҷишҳо $x_1, x_2, ..., x_n$ вобаста буда, қонуни тақсимоташ аз параметрҳои номаълуми тақсимоти X вобаста намебошад. Қонуни тақсимоти ин бузургии омории нав танҳо аз ҳаҷми интихоб n ва намуди умумии тақсимоти X вобаста мешавад.

Масалан, нишон додашудааст, ки агар X қонуни тақсимоти нормалӣ дошта, $M(X)=a$ бошад, он гоҳ бузургии тасодуфии

$$Y=\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{x}-a}{\sqrt{D_u^*}}, \qquad (10.16)$$

ки дар ин ҷо

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \quad D_u^*=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \qquad (10.17)$$

мебошад, ба қонуни тақсимоти Стюдент бо $n-1$ дараҷаи озод итоат менамояд. Зичии тақсимоти эҳтимолиятҳои Стюдент намуди зерин дорад:

$$f_{n-1}(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad (10.18)$$

ки дар ин ҷо $\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty} u^{x-1}\cdot e^{-u}du$ - гамма функсия мебошад.

Аз формулаи (10.18) дида мешавад, ки тақсимоти Стюдент аз параметрҳои $\bar{x}$ ва D_u^* вобаста набуда, танҳо аз миқдори санҷишҳо n вобаста мебошад. Инчунин, қайд менамоем, ки $f_{n-1}(t)$ функсияи ҷуфти тағирёбандаи t мебошад.

Акнун, бо ёрии тақсимоти Стюдент, фосилаи бовариноқро барои интизорияти математикии номаълум муайян мекунем.

Бигузор, бо бузургии тасодуфии X, ки ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (a,σ) итоат менамояд, n санҷиши новобаста гузаронида шуда бошад. Фарз мекунем, ки қиматҳои параметрҳои a ва σ номаълуманд ва дар асоси натиҷаҳои санҷишҳо баҳоҳои $\bar{x}$ ва D_u^*, ки бо баробариҳои (10.17) муайян шудаанд, ёфта шудаанд.

Фосилаи бовариноқро, ки ба эҳтимолияти бовариноки α мувофиқ аст, барои интизорияти математикии X месозем.

Барои ин ними дарозии фосилаеро, ки нисбат ба $\bar{x}$ симметрӣ мебошад бо ε_α ишора намуда, ҳосил мекунем:

$$P\left(\left|\bar{x}-a\right|<\varepsilon_\alpha\right)=\alpha. \qquad (10.19)$$

Дар баробари (10.19) аз бузургии тасодуфии $\bar{x}$ ба бузургии тасодуфии Y мегузарем. Барои ин ҳарду тарафи нобаробариро ба $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D_u^*}}$ зарб намуда, ҳосил мекунем:

$$P\left(\frac{\sqrt{n}\left|\bar{x}-a\right|}{\sqrt{D_u^*}}<\varepsilon_\alpha\Big/\sqrt{\frac{D_u^*}{n}}\right)=\alpha,$$

ё баробарии (10.16) -ро ба инобат гирифта

$$P\left(|Y| < \varepsilon_\alpha \Big/ \sqrt{\frac{D_u^*}{n}}\right) = \alpha.$$

Ишораи $z_\alpha = \varepsilon_\alpha \Big/ \sqrt{\frac{D_u^*}{n}}$ -ро қабул намуда ва ҷуфт будани функсияи $f_{n-1}(t)$-ро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем:

$$P(|Y| < z_\alpha) = 2 \cdot \int_0^{z_\alpha} f_{n-1}(t)dt = \alpha. \qquad (10.20)$$

Баробарии (10.20) қимати z_α-ро вобаста ба қимати додашудаи α муайян менамояд. Ҷадвали қиматҳои z_α дар охири китоб оварда шудааст (Ҷадвали 3). Аз ин ҷадвал, агар қимати α ва миқдори дараҷаҳои озод $n-1$ маълум бошанд $\gamma = \alpha$; $k = n-1$ гузошта, қимати z_α -ро муайян намудан мумкин аст.

Қимати z_α -ро маълум намуда, ε_α- ро бо формулаи $\varepsilon_\alpha = z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{D_u^*}{n}}$ ҳисоб мекунем ва фосилаи бовариноки $\left(\overline{x} - z_\alpha \sqrt{\frac{D_u^*}{n}}, \overline{x} + z_\alpha \sqrt{\frac{D_u^*}{n}}\right)$ -ро ҳосил мекунем, ки он параметри номаълуми a-ро дарбар мегирад.

Мисол. Бо бузургии тасодуфии X, ки тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои номаълуми a ва σ дорад, 10 санҷишҳои новобаста гузаронида шуда, натиҷаҳои зерин ба даст оварда шудаанд: 2,5; 2; -2,3; 1,9; -2,1; 2,4; 2,3; -2,5; 1,5; -1,7.

Фосилаи бовариноКро барои интизорияти математикии номаълуми a бо эҳтимолияти бовариноки $\alpha = 0,95$ муайян кунед.

Ҳал. Бо формулаҳои (10.17) миёнаи омории $\overline{x}$ ва дисперсияи омории ислоҳшудаи D_u^* -ро ҳисоб мекунем:

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=\frac{1}{10}(2,5+2-2,3+1,9-2,1+2,4+2,3-2,5+1,5-1,7)=0,4;$$

$$D_u^*=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i-0,4)^2=\frac{1}{9}[(2,5-0,4)^2+(2-0,4)^2+(-2,3-0,4)^2+(1,9-0,4)^2+$$

$$(-2,1-0,4)^2+(2,4-0,4)^2+(2,3-0,4)^2+(-2,5-0,4)^2+(1,5-0,4)^2+(-1,7-0,4)^2]\approx 4,933$$

Аз Ҷадвали 3 барои $k=n-1=9$ ва $\gamma=\alpha=0,95$ меёбем:

$$z_\alpha=2,26.$$

Аз ин ҷо

$$\varepsilon_\alpha=z_\alpha\sqrt{\frac{D_u^*}{n}}\approx 1,58.$$

Ҳамин тавр, фосилаи боваринок $(\bar{x}-\varepsilon_\alpha;\bar{x}+\varepsilon_\alpha)=(-1,18;1,98)$ мебошад.

§4. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Дар натиҷаи ченкунии бузургии физикӣ натиҷаҳои зерин ба даст оварда шудааст: 50; 52; 55; 58; 60. Миёнаи оморӣ, дисперсияи оморӣ ва дисперсияи омории ислоҳшудаи натиҷаҳои ченкуниро ёбед.

Ҷавоб: $\bar{x}=55;\ D^*=13,6;\ D_u^*=17$.

Масъалаи 2. Бузургии тасодуфии X- шумораи маҳсулоти нуқсондор, дар гурӯҳи додашудаи махсулотхо мебошад ва ба қонуни тақсимоти Пуассон итоат менамояд. Тақсимоти омории маҷмӯи интихобии аз ин гурӯҳ ҷудокардашуда дода шудааст:

x_i	10	12	14	16	18
n_i	5	20	35	50	90

Бо усули моментхо баҳои нуқтагии параметри номаълуми λ- ро дар қонуни тақсимоти Пуассон муайян кунед.

Ҷавоб: $\lambda=16$.

Масъалаи 3. Бо ёрии усули ба ҳақиқат монанди калонтарин баҳои нуқтагии параметри номаълуми λ- ро дар қонуни тақсимоти Пуассон

$$P_m(x_i) = \lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda} / x_i!, \quad i = 1,2,...,n,$$

ки дар ин ҷо x_i- миқдори рӯйдиҳии ҳодиса дар таҷрибаи i-юм, m- шумораи таҷрибаҳо мебошад, ёбед.

Ҷавоб: $\lambda = \bar{x}$.

Масъалаи 4. Бо ёрии усули ба ҳақиқат монанди калонтарин баҳои нуқтагии параметри номаълуми β-и гамма тақсимотро (параметри α маълум мебошад), ки функсияи зичии тақсимоташ намуди

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \cdot x^{\alpha} \cdot e^{-x/\beta} \quad (\alpha > 1,\ \beta > 0,\ x \geq 0)$$

- ро дорад, барои интихоби ҳаҷмаш n муайян кунед.

Ҷавоб: $\beta^* = \bar{x}/(\alpha+1)$.

Масъалаи 5. Аломати маҷмӯи генералӣ X ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (a,σ) итоат менамояд, ки $\sigma = 40$ буда, қимати a номаълум мебошад. Бо эҳтимолияти боваринокӣ $\alpha = 0{,}95$ барои қимати a фосилаи боваринок созед, агар миёнаи интихоб $\bar{x} = 200$ ва ҳаҷми интихоб $n = 5$ бошанд.

Ҷавоб: (1964,94; 2035,06).

Масъалаи 6. Аломати маҷмӯи генералӣ X ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (a,σ) итоат менамояд, ки $\sigma = 1{,}5$ буда, қимати a номаълум мебошад. Бо эҳтимолияти боваринокӣ $\alpha = 0{,}925$ ҳаҷми хурдтарини интихоб ёфта шавад, ки фарқи баҳои a аз миёнаи интихоб(саҳеҳии баҳои a) ба $\varepsilon = 0{,}2$ баробар шавад.

Ҷавоб: $n = 179$.

Масъалаи 7. Бузургии тасодуфии X тамоили андозаи маҳсулоти истеҳсолшаванда аз маҳсулоти стандартӣ дорои тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (a,σ) мебошад, ки a - қимати миёна ва σ - тамоили миёнаи квадратии бузургии X аст. Интервали боваринок барои қимати миёнаи тамоили андозаи a муайян карда шавад, агар қимати миёнаи интихоб $\bar{x}$, ҳаҷми интихоб n ва эҳтимолияти боваринок γ дода шуда бошанд: $\sigma = 10$, $\bar{x} = 14{,}2$; $n = 100$; $\gamma = 0{,}95$.

Ҷавоб: $12{,}44 < a < 16{,}16$

Б О Б И XI. ТАФТИШИ ГИПОТЕЗАҲОИ ОМОРӢ

§1. ТАСНИФИ ГИПОТЕЗАҲОИ ОМОРӢ. МАРҲИЛАҲОИ АСОСИИ ТАФТИШИ ГИПОТЕЗАҲО

Дар зери *мафҳуми гипотезаи оморӣ* ҳар гуна тасдиқотро дар бораи тақсимоти маҷмӯи генералӣ ё хосиятҳои алоҳидаи ин тақсимот мефаҳманд, ки онҳо дар асоси маҷмӯи интихобии ҷудокардашуда омӯхта мешаванд. Масалан, маҷмӯи генералии омӯхташаванда қонуни тақсимоти нормалӣ дорад, ё интизорияти математикии маҷмӯи генералии қонуни тақсимоти нормалӣ дошта, $a=5$ ё $a\neq 5$ мебошад ва ҳоказо. Гипотезаҳои оморӣ бо усулҳои оморӣ омӯхта мешаванд, яъне гипотезаҳои баёншударо аз рӯи қоидаи муайян бо натиҷаҳои омӯзиши маҷмӯи интихобӣ муқоиса намуда, дуруст ё нодуруст будани онро муайян мекунанд. Ин қоидаро *тафтиши гипотезаҳо* меноманд.

Одатан, *гипотезаи асосиро* бо H_0 ишора намуда, *гипотезаи ба он рақобаткунандаро* муайян намуда, онро бо H_1 ишора мекунанд. Дар натиҷаи тафтиши гипотезаҳо яке аз онҳо қабул карда шуда, дигараш рад карда мешавад.

Чӣ хеле, ки қайд карда шуд, гипотезаро дар асоси омӯзиши маҷмӯи интихобӣ, ки аз маҷмӯи генералии омӯхташаванда ҷудо карда шудааст, қабул ё рад мекунанд. Азбаски элементҳои маҷмӯи интихобӣ аз маҷмӯи генералӣ тасодуфан гирифта мешаванд, пас дар рафти тафтиши гипотезаҳо пайдо шудани хатогиҳо ва дар натиҷа қабул карда нашудани гипотезаи дуруст имконпазир мебошад.

Умуман дар рафти тафтиши гипотеза пайдо шудани ду намуди хатогиҳо имконпазир мебошад, ки онҳоро мувофиқан *хатогиҳои ҷинси якум ва дуюм* меноманд. *Хатогии ҷинси якум* ин хатогии рад намудани гипотезаи дурусти H_0 буда, *хатогии ҷинси дуюм* ин хатогии қабул намудани гипотезаи нодурусти H_0 мебошад.

Барои тафтиши гипотезаҳо бо тарзи муайян бузургии омории θ^* - ро, месозанд, ки аз элементҳои маҷмӯи интихобӣ: $x_1, x_2, ..., x_n$ вобаста мебошад, яъне $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$. Пас, маҷмӯи қиматҳои θ^*-ро ба ду зермаҷмӯи алоҳида-алоҳида ҷудо менамоянд. Зермаҷмӯи қиматҳои θ^*-ро, ки ба дурустии гипотезаи H_0 мувофиқат мекунад, *соҳаи имконпазири гипотеза* меноманд. Зермаҷмӯи дигарро, ки ба рад намудани H_0 *ва қабул намудани* H_1 *мувофиқат мекунад, соҳаи* критикӣ меноманд. Бо суханҳои дигар, барои муайян намудани соҳаи имконпазири гипотеза барои θ^* фосилаи боваринок месозанд. Бинобар ин, усули тафтиши гипотезаҳо бо усули сохтани фосилаҳои боваринок зич алоқаманд мебошад.

Мувофиқи мақсад аст, ки ҳангоми тафтиши гипотезаҳо эҳтимолиятҳои пайдо шудани хатогиҳо кам карда шаванд. Эҳтимолияти рӯй додани хатогии ҷинси якумро бо α ишора мекунем, ки онро *дараҷаи аҳамиятнокӣ* меноманд. Эҳтимолияти рӯй додани хатогии ҷинси дуюмро бо β ишора мекунем. Маълум, ки кам кардани α ба зиёд шудани β оварда мерасонад. Бинобар ин, бузургии омории θ^* чунон интихоб карда мешавад, ки α ва β қиматҳои хурдтарини имконпазири худро қабул намоянд. Қимати α пешакӣ дода мешавад ва он хело хурд мебошад. Масалан, дар бисёр ҳолатхо ба сифати α қиматҳои 0,05; 0,01; 0,005; 0,001 қабул карда мешаванд.

Агар гипотезаи асосии H_0 дар бораи қимати номаълуми параметри тақсимот θ намуди зеринро дошта бошад:

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$

он гоҳ гипотезаи рақобаткунандаи H_1 метавонад яке аз намудҳои зеринро дошта бошад:

$$H_1 : \theta < \theta_0, \quad H_1 : \theta > \theta_0, \quad H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Вобаста ба намуди H_1, соҳаи критикӣ барои бузургии омории θ^* яктарафа (аз чап ё аз рост) ё дутарафа мешавад. Дар ин ҳолат нуқтаҳои сарҳадии соҳаи критикӣ аз ҷадвали тақсимоти бузургии омории θ^* муайян карда мешаванд.

Ҳамин тавр, раванди тафтиши омории гипотезаҳоро ба марҳилаҳои асосии зерин тақсим намудан мумкин аст:

1. Дар асоси маҷмӯи интихобӣ: $x_1, x_2, ..., x_n$, хусусиятҳои мушаххаси масъалаи гузошташударо ба инобат гирифта, гипотезаи асосии H_0 ва гипотезаи рақобаткунандаи H_1 тартиб дода мешаванд.

2. Дараҷаи аҳамиятнокии α дода мешавад. Дараҷаи аҳамиятнокии α ин эҳтимолияти содир намудани хатогии ҷинси якум мебошад, яъне $\alpha = P(H_1 / H_0)$, ки дар ин ҷо $P(H_1 / H_0)$-эҳтимолияти қабул намудани гипотезаи H_1 дар ҳолати дуруст будани H_0 мебошад. Масалан $\alpha = 0{,}05$ чунин маъно дорад, ки агар дурустии гипотезаи H_0 барои ҳар яке аз 100 маҷмӯи интихобии ҳаҷми якхела доштаи аз як маҷмӯи генералӣ ҷудокардашуда омӯхта шавад, он гоҳ ба ҳисоби миёна дар 5 ҳолат мо хатогии ҷинси якумро содир мекунем.

Эҳтимолияти содир намудани хатогии ҷинси дуюмро, яъне эҳтимолияти қабул намудани гипотезаи H_0 -ро дар ҳолати дуруст будани H_1, бо $\beta = P(H_0 / H_1)$ ишора мекунем. Аз ин ҷо, эҳтимолияти қабул намудани гипотезаи дурусти H_0 ба $P(H_0 / H_0) = 1 - \alpha$ баробар буда, эҳтимолияти қабул накардани гипотезаи нодурусти H_0 (яъне эҳтимолияти қабул намудани гипотезаи дурусти H_1) ба $P(H_1 / H_1) = 1 - \beta$ баробар аст.

3. Бузургии омории θ^*, ки аз элементҳои маҷмӯи интихобӣ $x_1, x_2, ..., x_n$ вобаста мебошад, муайян карда мешавад $(\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n))$. Қимати θ^* номувофиқии маҷмӯи интихобиро бо гипотезаи H_0 муайян мекунад. Азбаски θ^* бузургии тасодуфӣ мебошад(бо сабаби тасодуфӣ будани ҷудокунии элементҳои маҷмӯи интихобӣ), пас он дар ҳолати дуруст будани гипотезаи H_0, ба ягон қонуни тақсимоти маълум итоат менамояд.

Бузургии омории θ^*-ро *критерия* (нишондиҳанда) меноманд. Усули сохтани критерияҳоро аз адабиёти махсус дарёфт намудан мумкин аст. Мо танҳо қайд менамоем, ки асоси ин усулро мафҳуми функсияи ба ҳақиқат монанд ташкил медиҳад.

4. Аз маҷмӯи қиматҳои имконпазири критерияи θ^* зермаҷмӯи K ҷудо карда мешавад. Зермаҷмӯи K-ро соҳаи критикӣ меноманд. Элементҳои ин зермаҷмӯ фарқи калон доштани маҷмӯи интихобӣ ва гипотезаи H_0 -ро нишон медиҳанд. Бинобар ин агар $\theta^* \in K$ бошад, он гоҳ гипотезаи H_1 қабул карда мешавад. Маълум ки дар ин ҳолат хатогии ҷинси якум содир карда мешавад, яъне

$$P(\theta^* \in K) = \alpha. \tag{11.1}$$

Аммо соҳаи критикӣ K, ки бо баробарии (11.1) муайян карда мешавад ягона намебошад. Дар ҳақиқат, графики функсияи зичии тақсимоти $f_{\theta^*}(x)$ -и критерияи θ^*-ро тасвир намуда, бо осонӣ дидан мумкин аст, ки дар тири абсиса миқдори беохири фосилаҳо мавҷуданд, ки масоҳати трапетсияи каҷхатаи дар онҳо сохташуда ба α баробар аст.

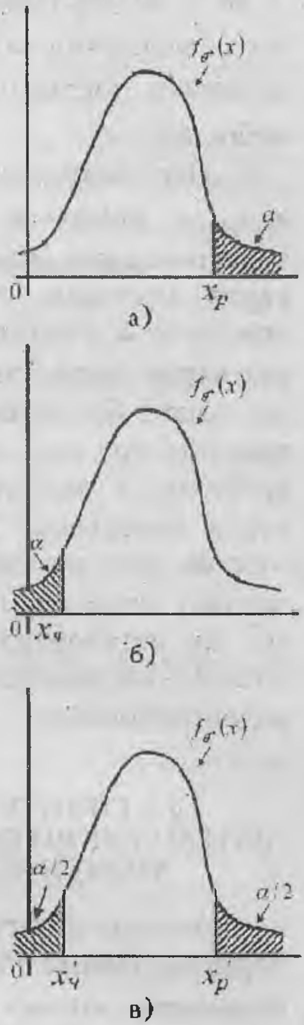
Бинобар ин барои ягона будани соҳаи критикӣ шарти иловагӣ ҳамроҳ карда мешавад, яъне соҳаи критикӣ бояд чунин бошад, ки барои қимати додашудаи α эҳтимолияти хатогии ҷинси дуюм β минималӣ шавад.

Вобаста ба намуди гипотезаҳои асосӣ H_0 ва рақобаткунанда H_1 ва вобаста ба намуди тақсимоти критерияи θ^* се намуди соҳаҳои критикӣ мавҷуданд:

1) *соҳаи критикии тарафи рост* (Расми 11.1,а), ки аз фосилаи $(x_p, +\infty)$ иборат аст. Нуқтаи x_p аз шарти

$$P(\theta^* > x_{p.}) = \alpha \tag{11.2}$$

муайян карда мешавад ва *нуқтаи критикии* тарафи рост номида мешавад, ки ба эҳтимолияти α мувофиқ мебошад.



Расми 11.1

2) *соҳаи критикии тарафи чап* (Расми 11.1,б), ки аз фосилаи $(-\infty, x_ч)$ иборат аст. Нуқтаи $x_ч$ аз шарти

$$P(\theta^* < x_ч) = \alpha \tag{11.3}$$

муайян карда мешавад ва *нуқтаи критикии тарафи чап* номида мешавад, ки ба эҳтимолияти α мувофиқ мебошад.

3) *соҳаи критикии дутарафа* (Расми 11.1,в), ки аз фосилаҳои $(-\infty, x'_ч)$ ва $(x'_p, +\infty)$ иборат мебошад. Нуқтаҳои

$x'_{ч.}$ ва $x'_{р.}$ аз шартҳои $P(\theta^* < x'_{ч.}) = \alpha/2$ ва $P(\theta^* > x'_{р.}) = \alpha/2$ муайян карда мешаванд ва *нуқтаҳои критикии дутарафа номида мешаванд*, ки ҳар яке ба эҳтимолияти $\alpha/2$ мувофиқ мебошад.

5. Дар формулаи критерия $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ ба ҷои $x_1, x_2, ..., x_n$ қиматҳои мушаххаси дар натиҷаи n санҷишҳо бадастовардашударо гузошта, қимати ададии θ^* ҳисоб карда мешавад. Агар қимати ададии θ^* ба соҳаи критикии K тааллуқ дошта бошад, он гоҳ гипотезаи H_0 рад карда шуда, гипотезаи H_1 қабул карда мешавад. Дар ин ҳолат бо эҳтимолияти α содир намудани хатогӣ имконпазир аст. Агар қимати ададии θ^* ба соҳаи критикии K мансуб набошад, он гоҳ гипотезаи H_0 рад карда намешавад. Дар ин ҳолат танҳо тасдиқ намудан мумкин аст, ки гипотезаи H_0 бо натиҷаҳои санҷишҳо зиддият надорад. Лекин инро низ қайд намудан лозим аст, ки метавонанд дигар гипотезаҳо низ вуҷуд дошта бошанд, ки монанди H_0 бо натиҷаҳои санҷишҳо зиддият надошта бошанд.

§ 2. ГИПОТЕЗА ДАР БОРАИ ИНТИЗОРИЯТИ МАТЕМАТИКИИ ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ НОРМАЛӢ ДАР ҲОЛАТИ МАЪЛУМ БУДАНИ ДИСПЕРСИЯ

Бигузор, бузургии тасодуфии X қонуни тақсимоти нормалӣ дошта бошад, яъне $X \in N(a, \sigma)$. Хотиррасон менамоем, ки $a = M(X)$ ва $\sigma = \sqrt{D(X)}$ мебошад. Фарз мекунем, ки бо бузургии тасодуфии X n санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, натиҷаҳои $x_1, x_2, ..., x_n$ ба даст оварда шудаанд. Аз мавзӯъҳои гузашта ба мо маълум аст, ки миёнаи оморӣ

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n \qquad (11.4)$$

ва дисперсияи омории ислоҳкардашуда

$$D_n^* = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 / (n-1) \qquad (11.5)$$

баҳоҳои таҳрифнаёфта ва асосноки a ва σ^2 мебошанд. Қиматҳои $\bar{x}$ ва D_n^* -ро маълум намуда, дар бораи қиматҳои a ва σ^2 тасаввуроти тақрибие ҳосил менамоем, ки он ба тартиб додани гипотеза ёрӣ мерасонад.

Ҳамин тавр, бигузор $X \in N(a,\sigma)$ бошад ва қимати интизорияти математикӣ a номаълум буда, қимати дисперсия σ^2 маълум бошад. Барои муайян намудани қимати номаълуми a гипотезаи асосии $H_0 : a = a_0$ (a_0- адади додашуда) -ро пешниҳод менамоем. Дар ин ҳолат *гипотезаи рақобаткунандаи* H_1 метавонад яке аз се намудҳои зеринро дошта бошад:

$$H_1 : a > a_0;\ H_1 : a < a_0;\ H_1 : a \neq a_0. \qquad (11.6)$$

Дараҷаи аҳамиятнокии α -ро муайян мекунем. Ба сифати критерия бузургии омории

$$\theta^* = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad (11.7)$$

-ро интихоб менамоем. Маълум, ки ин бузургӣ аз элементҳои маҷмӯи интихобӣ(натиҷаҳои санҷишҳо) вобаста буда, тафовути маҷмӯи интихобӣ ва гипотезаи асосии H_0 -ро муайян менамояд, яъне то чи андозае, ки $\bar{x}$ ба a_0 наздик бошад, ба ҳамон андоза қимати мутлақи θ^* кам мешавад. Инчунин, маълум аст, ки дар ҳолати дуруст будани гипотезаи асосии H_0 бузургии θ^* ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои $a = 0$ ва $\sigma = 1$ итоат менамояд:

$$\theta^* = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}} \in N(0,1). \qquad (11.8)$$

Соҳаи критикии K - ро, яъне соҳаи қиматҳои θ^*-ро, ки барои онҳо гипотезаи асосии H_0 рад карда мешавад, барои ҳар як намуди гипотезаи рақобаткунанда ҷудо мекунем.

Бигузор, $H_1 : a > a_0$ бошад. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ аз тарафи рост мешавад, яъне фосилаи $(x_{p.}, +\infty)$ мешавад, ки нуқтаи критикии x_p -ро аз шарти

$$P(\theta^* > x_{p.}) = \alpha \tag{11.9}$$

муайян мекунанд. Баробарии (11.8) -ро ба инобат гирифта, мо метавонем аз Ҷадвали 2, ки дар охири китоб оварда шудааст, истифода барем. Барои ин $\gamma = 1 - 2\alpha$ гузошта, чунин адади u_γ -ро меёбем, ки шарти

$$P(|\theta^*| < u_\gamma) = \Phi(u_\gamma) = \gamma \tag{11.10}$$

-ро қаноат кунонад. Адади ёфташудаи u_γ нуқтаи критикии x_p мешавад.

Фарз мекунем, ки гипотезаи рақобаткунанда намуди

$$H_1 : a < a_0$$

-ро дорад. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ K аз чап, яъне фосилаи $(-\infty, x_ч)$ мешавад, ки нуқтаи критикии $x_ч$-ро аз шарти $P(|\theta^*| < x_ч) = \alpha$ муайян мекунанд. Барои аз Ҷадвали 2 истифода намудан $\gamma = 1 - 2\alpha$ гузошта, чунин адади u_γ -ро меёбем, ки шарти (11.10) -ро қаноат кунонад. Нуқтаи критикии $x_ч$ ба $-u_\gamma$ баробар мешавад, яъне $x_ч = -u_\gamma$.

Бигузор, гипотезаи рақобаткунанда намуди $H_1 : a \neq a_0$ -ро дошта бошад. Дар ин ҳолат соҳаи критикии K дутарафа, яъне фосилаҳои $(-\infty, x'_ч)$ ва $(x'_{p.}, +\infty)$ мешавад, ки нуқтаҳои критикии $x'_ч$ ва x'_p аз шартҳои

$$P\left(\left|\theta^*\right| < x'_{ч.}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{ва} \quad P\left(\left|\theta^*\right| > x'_{р.}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

муайян карда мешаванд. Барои истифода намудан аз Ҷадвали 2, $\gamma = 1 - \alpha$ гузошта, чунин ададии u_γ -ро меёбем, ки шарти (11.10) -ро қаноат кунонад. Он гоҳ нуқтаҳои критикӣ

$$x'_ч = -u_\gamma \text{ ва } x'_р = u_\gamma$$

мешаванд.

Агар қимати ададии θ^*, ки аз баробарии (11.7) муайян карда мешавад, ба соҳаи критикӣ тааллуқ дошта бошад, он гоҳ гипотезаи асосии H_0 рад карда шуда, гипотезаи рақобаткунандаи H_1 қабул карда мешавад. Дар ҳолати баръакс H_0 рад карда намешавад.

Мисол. Бузургии тасодуфии X ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (a, σ) итоат менамояд, ки қимати a номаълум буда, $\sigma^2 = 9$ мебошад. Дар натиҷаи бо бузургии тасодуфии X гузаронидани 9 санҷишҳои новобаста миёнаи омории $\bar{x} = 48$ ҳосил шудааст. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ гипотезаи асосии $H_0 : a = 50$ -ро тафтиш кунед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $n = 9;\ \bar{x} = 48;$ $\sigma = 3;\ \alpha = 0{,}05$ ва гипотезаи асосӣ $H_0 : a = 50$ мебошад. Азбаски $\bar{x} = 48 < 50$ мебошад, пас ба сифати гипотезаи рақобаткунанда

$$H_1 : a < 50$$

-ро қабул менамоем. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ K аз тарафи чап, яъне фосилаи $(-\infty, x_{ч.})$ мешавад. Барои истифода намудани Ҷадвали 2, $\gamma = 1 - 2 \cdot \alpha = 1 - 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}9$ -ро муайян намуда, ададии u_γ -ро аз шарти (11.10)

$$\Phi(u_\gamma) = \gamma$$

муайян мекунем: $u_y = 1{,}65$. Пас $x_ч = -u_y = -1{,}65$. Мувофиқи (11.7) қимати ададии θ^* -ро ҳисоб мекунем:

$$\theta^* = \frac{48-50}{3/\sqrt{9}} = -2.$$

Азбаски адади -2 ба соҳаи $(-\infty, -1{,}65)$ тааллуқ дорад, пас гипотезаи H_0 -ро рад намуда, гипотезаи H_1 -ро қабул менамоем. Дар ин ҷо, мо метавонем бо эҳтимолияти $\alpha = 0{,}05$ хатогӣ содир намоем.

§ 3. ГИПОТЕЗА ДАР БОРАИ ИНТИЗОРИЯТИ МАТЕМАТИКИИ ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ НОРМАЛӢ ДАР ҲОЛАТИ НОМАЪЛУМ БУДАНИ ДИСПЕРСИЯ

Бигузор, $X \in N(a, \sigma)$ буда, ҳам қимати интизорияти математикӣ a ва ҳам қимати дисперсия σ^2 номаълум бошанд. Фарз мекунем, ки бо бузургии тасодуфии X n санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, натиҷаҳои $x_1, x_2, ..., x_n$ ба даст овардашуда бошанд. Дар асоси ин натиҷаҳо миёнаи омории $\bar{x}$ ва дисперсияи омории ислоҳкардашудаи D_u^* -ро бо формулаҳои (11.4) ва (11.5) ҳисоб мекунем. Барои тафтиш намудани гипотезаи асосии $H_0 : a = a_0$ (a_0 -адади додашуда) критерияи

$$\theta^* = \frac{\bar{x} - a_0}{\sqrt{D_u^*} / \sqrt{n}} \qquad (11.11)$$

-ро интихоб менамоем, ки он дар ҳолати дуруст будани гипотезаи H_0, ба t - тақсимоти(тақсимоти Стюдент) адади дараҷаҳои озодаш $k = n - 1$ итоат менамояд, яъне

$$\theta^* = \frac{\bar{x} - a_0}{\sqrt{D_u^*} / \sqrt{n}} \in t(k = n - 1). \qquad (11.12)$$

Дараҷаи аҳамиятнокии α -ро муайян намуда, соҳаи критикиро барои се намуди гипотезаи рақобаткунандаи H_1 (нигар ба (11.6)) месозем.

Сараввал, фарз мекунем, ки гипотезаи рақобаткунанда намуди $H_1 : a > a_0$ -ро дорад. Маълум, ки дар ин ҳолат соҳаи критикӣ аз рост, яъне фосилаи $(x_{р.};+\infty)$ мешавад, ки нуқтаи критикии $x_{р.}$ аз шарти (11.9) муайян карда мешавад. Баробарии (11.12) -ро ба инобат гирифта, аз Ҷадвали 3, ки дар охири китоб оварда шудааст, $\gamma = 1 - 2\alpha$ гузошта, чунин адади t_γ-ро меёбем, ки шарти

$$P(|\theta^*| < t_\gamma) = \gamma \qquad (11.13)$$

-ро қонеъ намояд. Пас, $x_{р.} = t_\gamma$ қабул менамоем.

Бигузор, гипотезаи рақобаткунанда намуди $H_1 : a < a_0$-ро дошта бошад. Маълум, ки дар ин ҳолат соҳаи критикӣ аз чап, яъне фосилаи $(-\infty, x_{ч.})$ мешавад, ки нуқтаи критики $x_ч$ аз шарти

$$P(\theta^* < x_{ч.}) = \alpha$$

муайян карда мешавад. Баробарии (11.12) -ро ба инобат гирифта, аз Ҷадвали 3, $\gamma = 1 - 2\alpha$ гузошта, чунин адади t_γ -ро меёбем, ки шарти (11.13) -ро қаноат кунонад. Пас, $x_{ч.} = -t_\gamma$ қабул менамоем.

Акнун фарз мекунем, ки гипотезаи рақобаткунанда намуди $H_1 : a \neq a_0$ -ро дошта бошад. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ дутарафа буда, аз фосилаҳои $(-\infty, x'_{ч.})$ ва $(x'_{р.}, +\infty)$ иборат мешавад, ки нуқтаҳои критикии $x'_ч$ ва $x'_{р.}$ -ро аз шартҳои

$$P(\theta^* < x'_{ч.}) = \frac{\alpha}{2} \text{ ва } P(\theta^* > x'_{р.}) = \frac{\alpha}{2}$$

меёбанд. Баробарии (11.12) –ро ба инобат гирифта, аз Ҷадвали 3, $\gamma = 1 - \alpha$ гузошта, чунин адади t_γ -ро меёбем, ки шарти (11.13) -ро қаноат кунонад. Пас, $x'_{ч.} = -t_\gamma$ ва $x'_{р.} = t_\gamma$ қабул менамоем.

Акнун гипотезаи H_0-ро тафтиш мекунем. Қимати ададии θ^*-ро бо формулаи (11.11) ҳисоб мекунем. Агар θ^* ба соҳаи критикӣ мансуб бошад, он гоҳ гипотезаи H_0 -ро рад намуда, гипотезаи H_1 -ро қабул менамоем. Дар ҳолати баръакс гипотезаи H_0 -ро қабул менамоем.

Мисол. Бо бузургии тасодуфии $X \in N(a,\sigma)$ 20 санҷишҳои новобаста гузаронида шуда, миёнаи оморӣ ва дисперсияи омории ислоҳкардашудаи он ҳисоб карда шудааст: $\bar{x} = 77$ ва $D_в^* = 4$. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}01$ гипотезаи $H_0 : a = 80$ тафтиш карда шавад.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $n = 20, \alpha = 0{,}01,$ $\bar{x} = 77, D_в^* = 4$. Ба сифати гипотезаи рақобаткунанда $H_1 : a \neq 80$ -ро интихоб менамоем. Он гоҳ соҳаи критикӣ аз фосилаҳои $(-\infty, x'_ч)$ ва $(x'_{р.}, +\infty)$ иборат мешавад. $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99;$ $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$ -ро муайян намуда, аз шарти (11.14) ва Ҷадвали 3 истифода намуда, ҳосил мекунем: $t_\gamma = 2{,}861$. Пас, $x'_ч = -2{,}861$ ва $x'_р = 2{,}861$. Ҳамин тавр, соҳаи критикӣ аз фосилаҳои $(-\infty; -2{,}861)$ ва $(2{,}861; +\infty)$ иборат мебошад. Бо формулаи (11.11) қимати ададии θ^* -ро меёбем: $\theta^* = \dfrac{77 - 80}{2/\sqrt{20}} = -6{,}708$. Азбаски адади (-6,708) ба соҳаи критикӣ тааллуқ дорад, пас гипотезаи H_0 -ро рад намуда, гипотезаи H_1 -ро қабул менамоем.

§ 4. ГИПОТЕЗА ДАР БОРАИ ДИСПЕРСИЯИ ҚОНУНИ ТАҚСИМОТИ НОРМАЛӢ

Бигузор, бузургии тасодуфии $X \in N(a,\sigma)$ дода шуда бошад ва дисперсияи он σ^2 номаълум бошад. Фарз мекунем, ки $x_1, x_2, ..., x_n$ натиҷаҳои n санҷишҳои новобаста бо бузургии тасодуфии X бошанд. Маълум, ки миёнаи оморӣ $\bar{x}$ ва дисперсияи ислоҳшуда D_u^* бо формулаҳои (11.4) ва (11.5) муайян карда мешаванд. Гипотезаи асосии $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ (σ_0^2 -адади додашуда) -ро тафтиш мекунем.

Тафтиши ин гипотеза дар асоси муқоисакунии σ_0^2 ва D_u^* гузаронида мешавад. Дар ҳамин асос ба сифати критерия бузургии омории

$$\theta^* = \frac{(n-1)D_u^*}{\sigma_0^2} \tag{11.14}$$

интихоб карда мешавад. Дар ҳолати дуруст будани гипотезаи асосии H_0 бузургии θ^* қонуни тақсимоти χ^2 -ро ба адади дараҷаҳои озоди $k = n-1$ дорад, яъне

$$\theta^* = \frac{(n-1)D_u^*}{\sigma_0^2} \in \chi^2(k = n-1). \tag{11.15}$$

Дараҷаи аҳамиятнокии α -ро муайян намуда, сохтани соҳаи критикиро барои се намуди гипотезаи рақобаткунандаи H_1 дида мебароем.

Сараввал, фарз мекунем, ки гипотезаи рақобаткунанда намуди $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ -ро дорад. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ намуди $(x_p, +\infty)$ -ро дорад, ки нуқтаи критики x_p аз шарти

$$P(\theta^* > x_p) = \alpha \tag{11.16}$$

муайян карда мешавад. Баробарии (11.15) -ро ба инобат гирифта, аз Ҷадвали 4, ки дар охири китоб оварда шудааст, $\gamma = 1-\alpha$ гузошта, ҳангоми $k = n-1$ чунин адади χ_γ^2 -ро меёбем, ки шарти $P(\theta^* < \chi_\gamma^2) = \gamma = 1-\alpha$ -ро қаноат кунонад. Он гоҳ

$$P(\theta^* > \chi_\gamma^2) = \alpha \tag{11.17}$$

мешавад. Баробариҳои (11.16) ва (11.17) -ро муқоиса намуда ҳосил мекунем: $x_p = \chi^2_\gamma$

Бигузор, гипотезаи рақобаткунанда намуди $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ -ро дошта бошад. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ аз чап мешавад. Азбаски θ^*, ки бо баробарии (11.14) муайян карда мешавад, адади ғайриманфӣ мебошад, пас соҳаи критикӣ фосилаи $(0, x_ч)$ мешавад. Нуқтаи критикии $x_ч$ аз шарти $P(\theta^* < x_ч) = \alpha$ муайян карда мешавад. Баробарии (11.15) -ро ба инобат гирифта, аз Ҷадвали 4, $\gamma = \alpha$ гузошта, ҳангоми $k = n - 1$, чунин адади χ^2_γ -ро меёбем, ки шарти

$$P(\theta^* < \chi^2_\gamma) = \alpha \qquad (11.18)$$

-ро қонеъ менамояд. Аз ин ҷо, ҳосил мекунем:

$$x_ч = \chi^2_\gamma .$$

Дар охир, фарз мекунем, ки гипотезаи рақобаткунанда намуди $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ -ро дорад. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ дутарафа мешавад, яъне аз фосилаҳои $(0, x'_ч)$ ва $(x'_p, +\infty)$ иборат мешавад, ки нуқтаҳои критики $x'_ч$ ва x'_p мувофиқан аз шартҳои $P(\theta^* < x'_ч) = \dfrac{\alpha}{2}$ ва $P(\theta^* > x'_p) = \dfrac{\alpha}{2}$ муайян карда мешаванд. Баробарии (11.15) -ро ба инобат гирифта, ба хулоса омадан мумкин аст, ки $x'_ч$ монанди $x_ч$ муайян карда мешавад. Фақат ба ҷои эҳтимолияти α эҳтимолияти $\alpha/2$ -ро гузоштан кифоя аст. Ба ҳамин монанд дидан мумкин аст, ки x'_p монанди x_p муайян карда мешаванд. Дар ин ҷо низ эҳтимолияти α -ро бо эҳтимолияти $\alpha/2$ иваз намудан лозим аст.

Акнун гипотезаи асосии H_0 -ро тафтиш мекунем. Агар қимати ададии θ^*, ки бо баробарии (11.14) муайян карда мешавад, ба соҳаи критикӣ тааллуқ дошта бошад, он гоҳ гипотезаи H_0-ро рад намуда, гипотезаи H_1-ро қабул менамоем. Дар ҳолати баръакс гипотезаи H_0 рад карда намешавад.

Мисол. Бо бузургии тасодуфии $X \in (a, \sigma)$ 20 санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, дар асоси ин санҷишҳо дисперсияи оморииислоҳшуда ҳисоб карда шудааст: $D_u^* = 7$. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ гипотезаи асосии $H_0 : \sigma^2 = 5$ тафтиш карда шавад.

Ҳал. Азбаски $D_u^* = 7 > 5$ мебошад, пас ба сифати гипотезаи рақобаткунанда $H_1 : \sigma^2 > 5$ -ро интихоб менамоем. Ба сифати критерия бузургии θ^*-ро, ки бо баробарии (11.14) муайян карда мешавад, қабул менамоем. Соҳаи критикӣ фосилаи $(x_p, +\infty)$ мешавад, ки нуқтаи критикии x_p -ро мувофиқи (11.16), аз шарти $P(\theta^* > x_p) = 0{,}05$ муайян мекунем.

Барои истифода намудан аз Ҷадвали 4 $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$; $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$ гузошта, чунин ададӣ χ_γ^2 -ро меёбем, ки шарти $P(\theta^* < \chi_\gamma^2) = 0{,}95$ -ро қаноат кунонад. Аз Ҷадвали 4 меёбем: $\chi_\gamma^2 = 30{,}1$. Пас $x_p = 30{,}1$ ва соҳаи критикӣ $(30{,}1; +\infty)$ мебошад.

Қимати ададии θ^* -ро мувофиқи баробарии (11.14) муайян мекунем: $\theta^* = \dfrac{(n-1)D_u^*}{\sigma_0^2} = \dfrac{19 \cdot 7}{5} = \dfrac{133}{5} = 26{,}6$. Азбаски $\theta^* = 26{,}6$ ба соҳаи критикӣ $(30{,}1; +\infty)$ тааллуқ надорад, пас гипотезаи $H_0 : \sigma^2 = 5$ рад карда намешавад.

§ 5. ГИПОТЕЗА ДАР БОРАИ БАРОБАРИИ ИНТИЗОРИЯТҲОИ МАТЕМАТИКИИ ҚОНУНҲОИ ТАҚСИМОТИ НОРМАЛӢ ДАР ҲОЛАТИ МАЪЛУМ БУДАНИ ДИСПЕРСИЯҲО

Бигузор, бузургиҳои тасодуфии $X \in (a_1, \sigma_1)$ ва $Y \in (a_2, \sigma_2)$ новобаста бошанд ва дисперсияҳояшон σ_1^2, σ_2^2 маълум буда, интизориятҳои математикиашон a_1, a_2 номаълум бошанд.

Фарз мекунем, ки бо бузургиҳои тасодуфии X ва Y мувофиқан n_1 ва n_2 санҷишҳои новобаста гузаронида шуда, натиҷаҳои $x_1, x_2, ..., x_{n_1}$ ва $y_1, y_2, ..., y_{n_2}$ ба даст оварда шудаанд. Маълум, ки миёнаҳои омории ин бузургиҳо $\overline{x} = (x_1 + x_2 + ... + x_{n_1})/n_1$ ва $\overline{y} = (y_1 + y_2 + ... + y_{n_2})/n_2$ пеш аз гузаронидани санҷишҳо низ бузургиҳои тасодуфӣ буда, ба қонуни тақсимоти нормалӣ мувофиқан бо параметрҳои $(a_1, \sigma_1/\sqrt{n_1})$ ва $(a_2, \sigma_2/\sqrt{n_2})$ итоат менамоянд.

Гипотезаи асосии $H_0 : a_1 = a_2$ -ро тафтиш мекунем.

Азбаски миёнаи оморӣ тақрибан қимати интизорияти математикиро муайян менамояд, пас тафтиши гипотезаи H_0 дар асоси муқоисакунии $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ гузаронида мешавад. Бинобар ин қонуни тақсимоти $(\overline{x} - \overline{y})$ -ро муайян мекунем.

Бузургиҳои тасодуфии $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ новобаста буда, ба қонуни тақсимоти нормалӣ итоат менамоянд. Пас, мувофиқи теорема дар бораи суммаи бузургиҳои тасодуфии қонуни тақсимоти нормалӣ дошта, бузургии тасодуфии $(\overline{x} - \overline{y})$ низ ба қонуни тақсимоти нормалӣ итоат менамояд. Интизорияти математикӣ ва дисперсияи он мувофиқан ба

$$M(\overline{x} - \overline{y}) = M(\overline{x}) - M(\overline{y}) = a_1 - a_2, \quad D(\overline{x} - \overline{y}) = D(\overline{x}) + D(\overline{y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

баробар мешаванд. Ҳамин тавр

$$\overline{x} - \overline{y} \in N\left(a_1 - a_2; \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}\right).$$

Бинобар ин

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(a_1-a_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/n_2}} \in N(0,1).$$

Агар гипотезаи H_0 дуруст бошад, яъне $a_1 = a_2$ бошад, он гоҳ аз ифодаи ҳосилшуда маълум мешавад, ки бузургии

$$\theta^* = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}. \qquad (11.19)$$

ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (0; 1) итоат менамояд, яъне

$$\theta^* = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \in N(0;1). \qquad (11.20)$$

Бузургии θ^* ба сифати критерияи тафтиши гипотезаи $H_0 : a_1 = a_2$ истифода бурда мешавад.

Дараҷаи аҳамиятнокии α -ро муайян намуда, ба сохтани соҳаи критикӣ, барои се намуди гипотезаи рақобаткунанда H_1 шурӯъ менамоем.

Сараввал, бигузор $H_1 : a_1 > a_2$ бошад. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ фосилаи $(x_{p.}, +\infty)$ мешавад, ки нуқтаи критикӣ $x_{p.}$ аз шарти $P(\theta^* > x_{p.}) = \alpha$ муайян карда мешавад. Баробарии (11.20) -ро ба инобат гирифта, мо метавонем аз Ҷадвали 2 истифода барем. Барои ин $\gamma = 1-2\alpha$ гузошта, чунин адади u_γ-ро меёбем, ки шарти

$$P(|\theta^*| < u_\gamma) = \Phi(u_\gamma) = \gamma \qquad (11.21)$$

-ро қаноат кунонад. Адади ёфташудаи u_γ нуқтаи критикии $x_{p.}$ мешавад.

Бигузор, гипотезаи рақобаткунанда намуди $H_1 : a_1 < a_2$-ро дошта бошад. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ фосилаи $(-\infty, x_ч)$ мешавад, ки нуқтаи критики $x_ч$ аз шарти

$$P(\theta^* < x_ч) = \alpha$$

муайян карда мешавад. Баробарии (11.20)-ро ба инобат гирифта, барои аз Ҷадвали 2 истифода намудан $\gamma = 1 - 2\alpha$ гузошта, чунин адади u_γ-ро меёбем, ки шарти (11.21)-ро қаноат кунонад, он гоҳ нуқтаи критикии $x_ч$ ба $-u_\gamma$ баробар мешавад, яъне $x_ч = -u_\gamma$.

Дар охир фарз мекунем, ки гипотезаи рақобаткунанда намуди $H_1 : a_1 \neq a_2$-ро дорад. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ аз фосилаҳои $(-\infty, x'_ч)$ ва $(x'_р, +\infty)$ иборат мешавад, ки нуқтаҳои критикӣ аз шартҳои $P(\theta^* < x'_ч) = \frac{\alpha}{2}$ ва $P(\theta^* > x'_р) = \frac{\alpha}{2}$ муайян карда мешаванд.

Баробарии (11.20) -ро ба инобат гирифта, барои аз Ҷадвали 2 истифода намудан $\gamma = 1 - \alpha$ гузошта, чунин адади u_γ-ро меёбем, ки шарти (11.21) -ро қаноат кунонад. Он гоҳ нуқтаҳои критикӣ $x'_ч = -u_\gamma$ ва $x'_р = u_\gamma$ мешаванд.

Агар қимати ададии θ^*, ки бо баробарии (11.19) муайян карда мешавад, ба соҳаи критикӣ таъаллуқ дошта бошад, он гоҳ гипотезаи H_0 рад карда шуда гипотезаи рақобаткунандаи H_1 қабул карда мешавад. Дар ҳолати баръакс H_0 рад карда намешавад.

Мисол. Бо бузургиҳои тасодуфии $X \in N(a_1, \sigma_1)$ ва $Y \in N(a_2, \sigma_2)$ мувофиқан $n_1 = 20$ ва $n_2 = 25$ санҷишҳои новобаста гузаронида шуда, миёнаҳои омории онҳо ҳисоб карда шудаанд: $\bar{x} = 100; \bar{y} = 102$. Дисперсияҳои ин бузургиҳои тасодуфӣ маълум буда $\sigma_1^2 = 6, \sigma_2^2 = 8$, интизориятҳои математикиашон номаълум мебошанд.

Гипотезаи асосии $H_0 : a_1 = a_2$ бо дарачаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ тафтиш карда шавад.

Ҳал. Ба сифати гипотезаи рақобаткунанда $H_1 : a_1 \neq a_2$-ро интихоб мекунем. Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ аз фосилаҳои $(-\infty, x'_ч)$ ва $(x'_{p}, +\infty)$ иборат мешавад. $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ гузошта аз баробарии (11.21) ва Ҷадвали 2 истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\Phi(u_\gamma) = 0{,}95; \quad u_\gamma = 1{,}96.$$

Пас, $x'_ч = -u_\gamma = -1{,}96$ ва $x'_p = u_\gamma = 1{,}96$. Соҳаи критикӣ фосилаҳои $(-\infty; -1{,}96)$ ва $(1{,}96; +\infty)$ мебошад.

Қимати ададии θ^*-ро мувофиқи баробарии (11.19) муайян мекунем:

$$\theta^* = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} = \frac{100 - 102}{\sqrt{6/20 + 8/25}} \approx -2{,}53.$$

Азбаски θ^* ба соҳаи критикӣ тааллуқ дорад, пас гипотезаи H_0 рад карда шуда, гипотезаи H_1 қабул карда мешавад.

§ 6. ГИПОТЕЗА ДАР БОРАИ ҚИМАТИ АДАДИИ ЭҲТИМОЛИЯТИ РӮЙДИҲИИ ҲОДИСА

Бигузор n санҷишҳои новобаста гузаронида шаванд, ки дар ҳар яки онҳо ҳодисаи тасодуфии A бо эҳтимолияти доимии аз 0 ва 1 фарқкунандаи $p \ (0 < p < 1)$ рӯй дода, бо эҳтимолияти $q = 1 - p$ рӯй надиҳад. Бо m миқдори рӯйдиҳии ҳодисаи A -ро дар ин санҷишҳо ишора мекунем.

Барои муайян намудани қимати ададии эҳтимолияти номаълуми p гипотезаи $H_0 : p = p_0$ (p_0 -адади додашуда)-ро тафтиш мекунем.

Азбаски эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодиса p тақрибан ба зудии нисбии рӯйдиҳии он $\bar{p} = \frac{m}{n}$ баробар аст, пас тафтиши ин гипотеза дар асоси муқоисакунии p_0 ва $\overline{p}$ гузаронида мешавад. Дар ҳамин асос критерияи муқоисакуниро месозем.

Маълум аст, ки микдори рӯйдиҳии ҳодисаи тасодуфӣ m бузургии тасодуфӣ буда, дар ҳолати кифоя калон будани микдори санҷишҳо n қонуни тақсимоти он, мувофиқи теоремаҳои локалӣ ва интегралии Муавр-Лаплас, ба қонуни тақсимоти нормалӣ наздик мебошад. Дар ин ҳолат интизорияти математикӣ ва дисперсияи он мувофиқан ба $n \cdot p$ ва npq баробар мешаванд, яъне

$$m \in N\left(np, \sqrt{npq}\right).$$

Қайд менамоем, ки ин тасдиқот тақрибӣ буда, барои қиматҳои кифоя калони n ҷой дорад. Дар амалия барои истифода намудани ин тасдиқот $n \cdot p > 10$ гирифта мешавад.

Маълум, ки дар вақти ба адади доимии n тақсим намудани бузургии тасодуфии m қонуни тақсимоти он тағйир наёфта, фақат параметрҳои он тағйир меёбанд. Бинобар ин $\overline{p} = \frac{m}{n}$ низ ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои

$$M\overline{p} = M\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} M(m) = \frac{1}{n} \cdot np = p,$$

$$D\overline{p} = D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(m) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}$$

итоат менамояд, яъне $\overline{p} \in N\left(p, \sqrt{pq/n}\right)$.

Аз ин ҷо бузургии тасодуфии $\frac{\overline{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$ ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои $(0;1)$ итоат менамояд:

$$\frac{\bar{p}-p}{\sqrt{pq/n}} \in N(0,1).$$

Бинобар ин дар ҳолати дуруст будани гипотезаи H_0 бузургии

$$\theta^* = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \qquad (11.22)$$

ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (0;1) итоат менамояд, яъне

$$\theta^* = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \in N(0,1). \qquad (11.23)$$

Бузургии θ^*-ро ба сифати критерия қабул менамоем.

Дараҷаи аҳамиятнокии α-ро муайян намуда, соҳаи критикиро барои ҳар яке аз се намудҳои гипотезаи рақобаткунанда

$$H_1: p > p_0;\ H_1: p < p_0;\ H_1: p \neq p_0;$$

айнан бо тарзи дар мавзӯи гузашта овардашуда, муайян намудан мумкин аст.

Агар қимати ададии θ^*, ки бо баробарии (11.23) муайян карда мешавад, ба соҳаи критикӣ тааллуқ дошта бошад, он гоҳ H_0 рад карда шуда, H_1 қабул карда мешавад. Дар ҳолати баръакс H_0 рад карда намешавад.

Мисол. Дар байни 1200 маҳсулоти санҷидашуда 60 маҳсулоти нуқсондор қайд карда шуд. Оё бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}01$ тасдиқ намудан мумкин аст, ки эҳтимолияти истеҳсол шудани маҳсулоти нуқсондор $p_0 = 0{,}02$ мебошад.

Ҳал. Мувофиқи шарти мисол $n = 1200;\ m = 60;\ \alpha = 0{,}01;$ $p_0 = 0{,}02$ аст. Гипотезаи асосиро $H_0: p = 0{,}02$ қабул менамоем. Зудии нисбии истеҳсол шудани маҳсулоти нуқсондорро ҳисоб мекунем:

$$\bar{p} = \frac{60}{1200} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Азбаски $\bar{p} = 0{,}05 > 0{,}02$ мебошад, пас ба сифати гипотезаи рақобаткунанда $H_1 : p > 0{,}02$-ро интихоб менамоем.

Дар ин ҳолат соҳаи критикӣ аз рост, яъне фосилаи $(x_{p.}, +\infty)$ мешавад, ки нуқтаи критики $x_{p.}$ -ро аз шарти

$$P(|\theta^*| > x_{p.}) = \alpha = 0{,}01$$

муайян мекунем. Барои истифода намудани Ҷадвали 2, $\gamma = 1 - 2\alpha = 1 - 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}98$ гузошта, чунин ададИ u_γ-ро меёбем, ки шарти

$$P(|\theta^*| < u_\gamma) = \gamma = 0{,}98$$

-ро қаноат кунонад. Мувофиқи Ҷадвали 2 ин адад $u_\gamma = 2{,}33$. Пас, $x_{p.} = u_\gamma = 2{,}33$ ва соҳаи критикӣ фосилаи $(2{,}33; +\infty)$ мешавад.

Қимати ададии θ^*-ро мувофиқи баробарии (11.23) муайян мекунем:

$$\theta^* = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} = \frac{0{,}05 - 0{,}02}{\sqrt{0{,}02(1 - 0{,}02)/1200}} = 7{,}5.$$

Қимати ададии $\theta^* = 7{,}5$ ба соҳаи критикӣ тааллуқ дорад. Пас, гипотезаи $H_0 : p = 0{,}02$ рад карда шуда, гипотезаи $H_1 : p > 0{,}02$ қабул карда мешавад.

§ 7. КРИТЕРИЯИ МУВОФИҚОВАРИИ χ^2

Дар мавзӯҳои гузашта, дар ҳолати маълум будани намуди умумии қонуни тақсимот, гипотезаҳоро доир ба қимати номаълуми параметрҳои тақсимот дида баромадем. Аммо дар бисёр масъалаҳои амалӣ намуди қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии омӯхташаванда номаълум мебошад. Бинобар ин масъалаи муайян намудани қонуни тақсимоти номаълум, дар асоси омӯхтани натиҷаҳои санҷиш (маҷмӯи интихобӣ) ба миён меояд.

Бигузор, қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии X номаълум бошад. Барои муайян намудани ин қонуни тақсимот аз маҷмӯи генералии X маҷмӯи интихобиро ҷудо мекунем.

Дар асоси омӯхтани маҷмӯи интихобӣ ё дигар мулоҳи-заҳо доир ба масъалаи дидашудаистода, гипотезаро доир ба намуди қонуни тақсимоти X пешниҳод менамоем . Бигузор, мувофиқи гипотезаи пешниҳодшуда функсияи тақсимоти X намуди муайяни $F(x)$-ро дошта бошад. Ин функсияро *функсияи назариявии тақсимот* меномем.

Маълум, ки дар асоси маҷмӯи интихобӣ, мо метавонем функсияи эмпирикии тақсимот $F^*(x)$-ро муайян намоем.

Он гоҳ гипотезаи пешниҳодшудаи H_0 танҳо дар ҳолате қабул карда мешавад, ки байни функсияҳои $F^*(x)$ ва $F(x)$ мувофиқоии хуб ҷой дошта бошад, яъне онҳо ба ҳам хело наздик бошанд. Пас, гипотезаи H_0-ро чунин навиштан мумкин аст:

$$H_0 : F^*(x) = F(x).$$

Барои тафтиш намудани чунин гипотезаҳо якчанд критерияҳо сохта шудаанд, ки онҳоро *критерияҳои мувофиқоварӣ* меноманд.

Яке аз ин критерияҳоро, ки χ^2-критерияи мувофиқоварӣ ё критерияи мувофиқоварии Пирсон меноманд, дида мебароем.

Ҳангоми татбиқ намудани критерияи мувофиқоварии χ^2 маҷмӯи генералии X ба l фосилаҳо тақсим карда мешавад, ки онҳо метавонанд дарозиҳои гуногун дошта бошанд. Аз маҷмӯи интихобӣ истифода намуда, мувофиқи ин фосилаҳо қатори вариатсионӣ сохта мешавад. Агар дар ягон фосилаи i-юм зудии варианта n_i аз адади 5 хурд бошад, он гоҳ ин фосила бо фосилаи ҳамсояаш якҷоя карда мешавад. Ин якҷоякуниҳо то он вақте давом дода мешавад, ки зудиҳои вариантаҳои фосилаҳои ҳосилшуда аз адади 5 хурд набошанд. Ин шарти асосии татбиқ намудани критерияи χ^2 мебошад. Агар маҷмуи генералӣ дискретӣ бошад, он гоҳ фосила метавонад аз як қимат иборат бошад.

Пас, дар асоси маҷмӯи интихобӣ, баҳои параметрҳои тақсимоти назариявӣ муайян карда мешаванд. Ҳамин тавр, функсияи назариявии тақсимот $F(x)$ пурра муайян мешавад. Аз ин функсия истифода намуда, мо эҳтимолияти аз фосилаи i-юм қимат қабул намудани X, яъне p_i-ро ҳисоб карда метавонем. Баъд аз ин зудиҳои назариявиро бо формулаи $m_i = n \cdot p_i$ (n-ҳаҷми маҷмӯи интихобӣ) муайян карда метавонем.

Гипотезаи H_0 дуруст ҳисобида мешавад, агар зудиҳои назариявӣ m_i ва таҷрибавӣ n_i аз якдигар хело кам фарқ кунанд. Бинобар ин барои тафтиш намудани гипотезаи H_0, ба сифати критерия, бузургии омории

$$\theta^* = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} \tag{11.24}$$

-ро истифода мебаранд.

Бузургии тасодуфии θ^* тақсимоти χ^2-ро бо адади дараҷаҳои озоди $k = l - r - 1$ дорад, ки дар ин ҷо l-миқдори фосилаҳо, r-миқдори параметрҳои тақсимоти назариявӣ, ки дар асоси маҷмӯи интихобӣ баҳо дода шудаанд.

Ҳамин тавр,

$$\theta^* = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} \in \chi^2 \ (k = l - r - 1) \tag{11.25}$$

То чӣ андозае, ки θ^* калон бошад, то ҳамон андоза мувофиқоии тақсимотҳои назариявӣ ва таҷрибавӣ бад мебошад. Бинобар ин барои қиматҳои кифоя калони θ^* гипотезаи H_0 рад карда мешавад.

Тафтиши гипотезаи H_0 монанди тафтиши гипотезаҳо дар мавзӯъҳои гузашта, гузаронида мешавад.

Дараҷаи аҳамиятнокии α дода мешавад.

Барои θ^*, ки бо баробариҳои (11.24) ва (11.25) муайян шудааст, соҳаи критикӣ сохта мешавад. Аз ғайриманфӣ будани θ^* маълум, ки соҳаи критикӣ аз рост, яъне фосилаи $(x_p, +\infty)$ мешавад. Нуқтаи критики x_p, чун дар мавзӯъҳои гузашта, бо истифодабарии Ҷадвали 4, муайян карда мешавад.

Қимати ададии θ^* мувофиқи формулаи (11.24) муайян карда мешавад. Агар θ^* ба фосилаи $(x_p, +\infty)$ шомил бошад, он гоҳ гипотезаи H_0 рад карда мешавад. Дар ҳолати баъакс гипотезаи H_0 рад карда намешавад.

Мисол. Аз маҷмӯи генералии бузургии тасодуфии x маҷмӯи интихобии ҳаҷмаш $n = 79$ ҷудо карда шуда, қатори вариатсионӣ сохта шудааст:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	4	13	14	24	16	3	3	2

Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}01$ гипотеза дар бораи он, ки маҷмӯи генералӣ тақсимоти Пуассонро дорад, тафтиш карда шавад.

Ҳал. Дар асоси қатори вариатсионӣ миёнаи омориро ҳисоб мекунем:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i = \frac{1}{79}\sum_{i=1}^{\infty} n_i \cdot x_i = \frac{1}{79}(4\cdot0+13\cdot1+14\cdot2+24\cdot3+16\cdot4+3\cdot5+3\cdot6+2\cdot7)=2{,}84$$

Дисперсияи омориро ҳисоб мекунем:

$$D^* = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{l} n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2 = \frac{1}{79}\cdot\sum_{i=1}^{8} n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2 = \frac{1}{79}\cdot\left(4(0-2{,}84)^2+13\cdot(1-2{,}84)^2+14\cdot(2-2{,}84)^2+\right.$$

$$\left.24\cdot(3-2{,}84)^2+16\cdot(4-2{,}84)^2+3\cdot(5-2{,}84)^2+3\cdot(6-2{,}84)^2+2\cdot(7-2{,}84)^2\right)=2{,}3971$$

Маълум, ки қонуни тақсимоти Пуассон аз як параметри λ вобаста буда, $\lambda = M(X) = D(X)$ мебошад. Аммо баҳоҳои интизорияти математикӣ ва дисперсияи X, яъне $\bar{x}$ ва D^* ба ҳам наздик буда, вале баробар намебошанд. Дар ҷадвали қиматҳои тақсимоти Пуассон қиматҳои ба $\bar{x}$ ва D^* наздиктари λ ададҳои 2 ва 3 мебошанд. Бинобар ин гипотезаро барои $\lambda = 3$ тафтиш мекунем.

Дар қатори вариатсионӣ зудиҳои се вариантаи охирин аз 5 хурд мебошанд. Ин вариантаҳоро ба як фосила якҷоя менамоем. Дар натиҷа микдори фосилаҳо $l = 6$ мешавад.

Бузургии омории θ^*, ки бо баробариҳои (11.24) ва (11.25) муайян карда мешавад, ба тақсимоти χ^2 бо адади дараҷаҳои озоди $k = l - r - 1 = 6 - 1 - 1 = 4$ итоат менамояд. Соҳаи критикиро аз шарти $P(\theta^* > x_p) = 0{,}01$ муайян мекунем. $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$ гузошта, аз Ҷадвали 4 меёбем: $x_p = 13{,}28$, яъне соҳаи критикӣ фосилаи $(13{,}28;\ +\infty)$ аст.

Қимати ададии θ^*-ро бо формулаи (11.24) ҳисоб мекунем. Эҳтимолиятҳои назариявии p_i^*-ро аз ҷадвали қиматҳои тақсимоти Пуассон меёбем. Ҳисобкуниҳои гузаронидашуда дар намуди ҷадвали зерин оварда шудаанд:

x_i	n_i	p_i	m_i	$(n_i - m_i)^2 / m_i$
0	4	0,0498	3,9	0,0026
1	13	0,1494	11,8	0,1220
2	14	0,2240	17,7	0,7734
3	24	0,2240	17,7	2,2424
4	16	0,1680	13,3	0,5481
5	8	0,1847	14,6	2,9836
$\sum$	79	0,9999	79,0	6,6721

Қимати $\theta^* = 6{,}6721$ ба соҳаи критикӣ тааллуқ надорад. Бинобар ин гипотеза дар бораи он ки маҷмӯи генералии бузургии тасодуфии X тақсимоти Пуассонро дорад, рад карда намешавад.

§ 8. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Бузургии тасодуфии X ба қонуни тақсимоти нормалӣ ба параметрҳои (a, σ) итоат менамояд, ки қимати a номаълум буда, $\sigma = 40$ мебошад. Дар натиҷаи бо бузургии тасодуфии X гузаронидани $n = 64$ санҷишҳои новобаста миёнаи омории $\bar{x} = 136{,}5$ ҳосил шудааст. Бо дараҷаи ахамиятнокии $\alpha = 0{,}01$ гипотезаи асосии $H_0 : a = a_0 = 130$ тафтиш карда шавад.

Ҷавоб: гипотезаи H_0 рад карда намешавад.

Масъалаи 2. Бо бузургии тасодуфии $X \in \mathrm{N}$ (a, σ) $n = 16$ санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, миёнаи омории $x = 118{,}2$ ва дисперсияи омории ислохшудаи он $D_u^* = 12{,}96$ ҳисоб карда шудааст. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ гипотезаи $H_0 : a = a_0 = 120$ тафтиш карда шавад.

Ҷавоб: гипотезаи H_0 рад карда намешавад.

Масъалаи 3. Бо бузургии тасодуфии $X \in N(a, \sigma)$, $n = 21$ санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, дар асоси ин санҷишҳо дисперсияи омории ислоҳшуда ҳисоб карда шудааст: $D_в^* = 16{,}2$. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}01$ гипотезаи асосии $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$ тафтиш карда шавад.

Ҷавоб: гипотезаи H_0 рад карда намешавад.

Масъалаи 4. Бо бузургиҳои тасодуфии $X \in N(a_1, \sigma_1)$ ва $Y \in N(a_2, \sigma_2)$ мувофиқан $n_1 = 40$ $n_2 = 50$ санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, миёнаҳои омории онҳо $\bar{x} = 130$ ва $\bar{y} = 140$ ҳисоб карда шудаанд. Дисперсияҳои ин бузургиҳои тасодуфӣ $\sigma_1^2 = 80$ ва $\alpha_2^2 = 100$ буда, интизориятҳои математикиашон номаълум мебошанд. Гипотезаи асосии $H_0: a_1 = a_2$ бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}01$ тафтиш карда шавад.

Ҷавоб: гипотезаи H_0 рад карда мешавад.

БОБИ XII. ТАҲЛИЛИ ДИСПЕРСИОНӢ

Маълум аст, ки бузургии тасодуфӣ дар натиҷаи таъсири якчанд омилҳо ба вуҷуд меояд. Масалан, таъсири хосиятҳои гуногуни ашёи хом ба сифати маҳсулот; таъсири кори якчанд бригадаҳое, ки дар сохтумон кор мекунанд, ба ҳаҷми умумии кори сохтумон; таъсири моддаҳои минералии гуногун ба ҳосилнокии растанӣ ва ҳоказо.

Дар амалия баъзе аз омилҳо ба бузургии тасодуфӣ таъсири калон ва баъзе аз онҳо таъсири ночиз мерасонанд. Албатта барои омӯхтани бузургии тасодуфӣ донистани омилҳое, ки ба пайдо шудани он таъсири асосӣ мерасонанд зарур мебошад.

Бинобар ин масъалаи муайян намудани омилҳое, ки ба бузургии тасодуфӣ таъсири амалӣ мерасонанд, ба миён меояд. Усули таҳлили чунин масъалаҳоро математики англис Р. А. Фишер соли 1918 эҷод намудааст, ки дертар аз сабаби он, ки ин усул дар асоси муқоисакунии дисперсияҳо сохта шудааст, номи *таҳлили дисперсиониро* гирифтааст.

Дар таҳлили дисперсионӣ дараҷаи таъсири ҳар як омил ба бузургии тасодуфӣ омӯхта мешавад ва таъсири омилҳо байни ҳам муқоиса карда мешаванд. Бо ин мақсад дисперсияи бузургии тасодуфӣ ба якчанд ҷамъшавандаҳои новобаста ҷудокардашуда, ин ҷамъшавандаҳо байни ҳам муқоиса карда мешаванд.

Масалан, фарз мекунем, ки таъсири омилҳои новобастаи A ва B ба ягон бузургии тасодуфии N санҷида шуда истодааст. Бигузор, дар натиҷаи ченкунии ин бузургӣ қимати X ба даст оварда шуда бошад. Он гоҳ фарқи $N-X=\alpha+\beta+\gamma$, ки дар ин ҷо α ва β мувофиқан ҳиссаҳои ин фарқ дар зери таъсири омилҳои A ва B буда, γ - ҳиссаи ин фарқ дар зери таъсири омилҳои боқимондаи ба инобат гирифтанашуда мебошад. Бо сабаби новобастагии омилҳои таъсиркунанда α, β ва γ бузургиҳои тасодуфии новобаста мебошанд. Хосиятҳои дисперсияро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$D(N-X)=D(\alpha+\beta+\gamma)=D(\alpha)+D(\beta)+D(\gamma),$$

ки дар ин ҷо $D(\alpha)$ таъсири омили A, $D(\beta)$ таъсири омили B ва $D(\gamma)$ таъсири омилҳои боқимондаи ба инобат гирифтанашударо ба натиҷаи ченкунӣ тавсиф менамоянд. $D(\gamma)$ - ро *дисперсияи боқимонда* меноманд. Дар таҳлили дисперсионӣ барои ба қиматнокии омилҳои A ва B баҳо додан дисперсияи онҳо $D(\alpha)$ ва $D(\beta)$ -ро бо дисперсияи боқимонда $D(\gamma)$ муқоиса менамоянд.

Ҳамин тавр, таҳлили дисперсионӣ усули оморӣ буда, барои баҳо додани таъсири омилҳои гуногун ба натиҷаи санҷиш истифода мешавад.

Агар ба натиҷаҳои санҷиш таъсири танҳо як омил омӯхта шавад, он гоҳ чунин таҳлилро *таҳлили якомила* меноманд. Агар шумораи омилҳои таъсиркунанда бисёр бошанд, он гоҳ сухан дар бораи *таҳлили бисёромила* меравад.

§1. ТАҲЛИЛИ ЯКОМИЛА

Чӣ хеле, кӣ дар боло қайд карда шуд, дар таҳлили якомила танҳо таъсири як омил ба бузургии тасодуфӣ омӯхта мешавад. Аниқтараш ба бузургии тасодуфӣ таъсир расонидан ё нарасонидани ин як омил омӯхта мешавад.

Бузургии тасодуфиро, ки ба он омил таъсир мерасонад *аломати натиҷавӣ* номида, бо X ишора мекунем. Барои омӯхтани таъсири омил ба аломати натиҷавӣ, дар ҳар як *саҳми омил,* n санҷишҳо гузаронида мешавад. Дар зери мафҳуми *саҳми омил* ченаки ё ҳолати омил фаҳмида мешавад. Масалан, рақами тартибии гурӯҳи деталҳо, ки омӯхта мешаванд; микдори поруҳои минералӣ, ки ба хок пошида мешаванд ва гайраҳо. Агар омили таъсиркунанда қиматҳои ададӣ қабул намояд, он гоҳ дар зери мафҳуми саҳми омил рақами тартибии фосилаҳоеро, ки дар онҳо қиматҳои омил гурӯҳбандӣ карда шудааст, фаҳмидан мумкин аст. Яъне бо мафҳумҳои назарияи эҳтимолият ва омори риёзӣ аз маҷмӯи генералии омил якчанд маҷмӯҳои интихобӣ ҷудо карда мешаванд ва ҳолати омил дар ҳар яке аз ин маҷмӯҳои интихобӣ *саҳми ба ин маҷмӯъ мувофиқи омил* номида мешавад. Бигузор X_{ij} қимати дар санҷиши i- юми саҳми j- юми омил қабулкардаи X бошад.

Ҷадвали 1

i \ j	1	2	…	m
Ракамҳи тартибии омил / *Ракамҳи тартибии мушоҳида*	A_1	A_2	…	A_m
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2m}
…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nm}
Миёнаи интихобии гурӯҳӣ	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	…	$\bar{x}_m$
Дисперсияи интихобии гурӯҳӣ	D_1^*	D_2^*	…	D_m^*

Масалан, бигузор таъсири кори бригадаҳои идораи сохтумон ба ҳаҷми умумии кори иҷрокардаи идораи сохтумон омӯхта шавад. Фарз мекунем, ки дар идораи сохтумон m бригада кор мекунанд. Аломати натиҷавӣ ҳаҷми умумии кори дар як баст иҷрокардаи идора мебошад. Онро бо X ишора менамоем. Бригадаи коркардаистодаро омили A номида, рақами тартибии онро саҳми ё гурӯҳи омили A меномем ва бо A_j ишора мекунем $(j = 1,2,...,m)$. Бигузор, нисбати ҳар яке аз m бригадаҳо n мушоҳидаҳо (санҷишҳо) гузаронидашуда, натиҷаҳои онҳо дар намуди Ҷадвали 1 оварда шуда бошанд.

Дар ин ҷо

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\left(x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj}\right) \qquad (12.1)$$

$$D_j^* = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2. \qquad (12.2)$$

Одатан барои баҳо додани таъсири омил ба бузургии тасодуфӣ, ҷадвали натиҷаҳои мушоҳидаҳо (Ҷадвали 1) тартиб дода мешавад. Чунин ба назар менамояд, ки аллакай аз Ҷадвали 1 ба ягон хулосаи пешакӣ соҳиб шудан мумкин аст: *агар миёнаҳои интихобии гурӯҳҳо аз якдигар фарқи калон дошта бошанд, он гоҳ таъсири омил ба бузургии тасодуфӣ (дар мисоли мо таъсири кори бригадаҳо ба ҳаҷми умумии корҳои иҷрошуда) калон мебошад ва баръакс, агар фарқи миёнаҳои интихобии гурӯҳҳо ночиз бошад, он гоҳ таъсири омилро ба бузургии тасодуфӣ ба инобат нагирифтан мумкин аст.* Аммо чунин хулосаҳо қатъӣ намебошанд, чунки дар Ҷадвали 1 ададҳои тавсифии маҷмӯҳои интихобӣ оварда шудаанд, вале мо бояд хулосаҳои худро барои маҷмӯи генералии қиматҳои X соҳиб шавем.

Бо ин мақсад интизорияти математикии аломати натиҷавии X-ро дар саҳми A_1 бо a_1, дар саҳми A_2 бо a_2 ва ҳоказо дар сахми A_m бо a_m ишора мекунем.

Агар дар ҳолати тағйир ёфтани саҳми омил интизориятҳои математикии гурӯҳӣ тағйир наёбанд, яъне $a_1 = a_2 = ... = a_m$ бошад, он гоҳ ба чунин хулоса омадан мумкин аст, ки аломати натиҷавӣ X аз омили A вобаста намебошад. Дар ҳолати баръакс чунин вобастагӣ ҷой дорад. Азбаски қиматҳои ададии $a_1, a_2, ..., a_m$ номаълум мебошанд, пас масъалаи тафтиши гипотезаи

$$H_0 : a_1 = a_2 = ... = a_m \tag{12.3}$$

ба миён меояд.

Гипотезаи (12.3)-ро танҳо дар ҳолати иҷро шудани шартҳои зерин тафтиш намудан мумкин аст:

а) дар ҳар як саҳми омил мушоҳидаҳои гузаронидашаванда новобаста мебошанд ва дар шароити якхела гузаронида мешаванд; мушоҳидаҳои гузаронидашаванда аз рақами тартибии саҳми омил вобаста намебошанд;

б) дар ҳар як саҳми омил аломати натиҷавӣ дорои қонуни тақсимоти нормалӣ бо дисперсияи генералии доимӣ мебошад (онро бо σ^2 ишора мекунем).

Дар ҳолати иҷро шудани ин шартҳо масъала аз тафтиши гипотезаи (12.3) дар ҳолати мавҷуд будани m маҷмӯҳои интихобии ҳаҷми якхела дошта, иборат мешавад. Ҳар яки ин маҷмӯҳои интихобӣ бояд қонуни тақсимоти нормалиро бо дисперсияи якхелаи σ^2 доро бошанд.

Фарз мекунем, ки шартҳои овардашудаи а) ва б) ҷой доранд. Бо $\bar{x}$ миёнаи умумии натиҷаҳои мушоҳидаҳоро ишора мекунем:

$$\bar{x} = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j , \tag{12.4}$$

ва суммаи квадратҳои фарқҳои $(x_{ij} - \bar{x})$- ро дохил менамоем

$$S = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 . \qquad (12.5)$$

Инчунин ишораҳои

$$S_1 = n \cdot \sum_{j=1}^{m}\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 , \qquad (12.6)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2 \qquad (12.7)$$

- ро дохил менамоем, ки дар ин ҷо S_1- суммаи квадратҳои фарқҳои миёнаҳои гурӯҳӣ аз миёнаи умумӣ буда, S_2- суммаи квадратҳои фарқҳои натиҷаҳои мушоҳидаҳо аз миёнаи гурӯҳӣ мебошад.

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки

$$S = S_1 + S_2 .$$

Аз ин баробарӣ чунин хулоса мебарояд, ки тағйирёбии умумии аломати омӯхташаванда аз суммаи ду компонентаҳо иборат аст: тағйирёбии байнигурӯҳӣ S_1 ва тағйирёбии дохилигурӯҳӣ S_2. S_1 таъсири омили омӯхташавандаро ба аломати натиҷавӣ тавсиф менамояд. Тағйирёбии дохилигурӯҳӣ S_2 бошад барои ҳамаи гурӯҳҳо (саҳмҳои омил) якхела буда (бо сабаби доимӣ будани дисперсия σ^2), таъсири омилҳои боқимондаи ба инобат гирифтанашударо тавсиф менамояд.

Агар S_1 ва S_2- ро мувофиқан ба адади дараҷаҳои озодашон(фарқи миқдори тағйирёбандаҳо ва миқдори вобастагиҳои байни онҳо) тақсим намоем, он гоҳ баҳоҳои таҳрифнаёфтаи дисперсияҳои байнигурӯҳӣ ва дохилигурӯҳиро соҳиб мешавем:

$$d^{*}_{омил} = \frac{S_1}{m-1}, \qquad d^{*}_{бокимонда} = \frac{S_2}{m \cdot n - m}.$$

Бузургиҳои муайяншударо истифода намуда Ҷадвали 2 -ро тартиб медиҳанд, ки онро ҷадвали дисперсионӣ меноманд:

Маълум, ки $d^*_{омил}$ ва $d^*_{боқимонда}$ аз якдигар новобаста буда, баҳоҳои таҳрифнаёфтаи ҳамон як дисперсияи σ^2 мебошанд. Бинобар ин масъалаи тафтиши гипотезаи (12.3) ба масъалаи муқоисакунии $d^*_{омил}$ ва $d^*_{боқимонда}$ оварда мешавад. Ин муқоисакунӣ бо ёрии бузургии омории

$$F = \frac{d^*_{омил}}{d^*_{боқимонда}}$$

Ҷадвали 2

Манбаи тағйирёбии аломати натиҷавӣ X	Суммаи квадратҳои фарқҳо	Адади дараҷаҳои озод	Баҳои таҳрифнаёфта барои дисперсия
Омили A	S_1	$m-1$	$d^*_{омил}$
Омилҳои боқимонда	S_2	$n \cdot m - m$	$d^*_{боқимонда}$
Тағйирёбии умумӣ	S	$n \cdot m - 1$	$S/(n \cdot m - 1)$

гузаронида мешавад, ки онро F- тақсимот ё тақсимоти (критерияи) Фишер меноманд. Агар $F > F_{\alpha;k_1,k_2}$ бошад, он гоҳ гипотезаи H_0 рад карда шуда, дар ҳолати $F < F_{\alpha;k_1,k_2}$ ин гипотеза қабул карда мешавад. Дар ин ҷо $F_{\alpha;k_1,k_2}$- қимати F бо аҳамиятнокии α ва ададҳои дараҷаҳои озоди $k_1 = m-1$; $k_2 = m \cdot n - m$ мебошад, ки аз ҷадвали тақсимоти Фишер (Ҷадвали 5, ки дар охири китоб оварда шудааст) муайян карда мешавад. Маълум, ки рад карда шудани H_0

мавҷудияти таъсири омили омӯхташавандаро ба аломати натиҷавӣ нишон медиҳад.

Мувофиқи маънои эҳтимолиаш натиҷаҳои мушоҳидаҳоро ҳамчун суммаи зерин навиштан мумкин аст:

$$x_{ij} = a + \lambda_j + e_{ij}, \tag{12.8}$$

ки дар ин ҷо a - миёнаи генералӣ, ё ки интизорияти математикии аломати натиҷавии X, λ_j - таъсири саҳми j-юми омил ба X ва e_{ij} - фарқи тасодуфии қимати X аз интизорияти математикиаш дар санҷиши i-юми саҳми j-юми омил мебошад. Маълум, ки $\lambda_j = a_j - a$, $e_{ij} = x_{ij} - a_j$ ва a_j - интизорияти математикии гурӯҳи j- юми омил мебошад.

Бо дохил намудани баробарии (12.8), масъалаи гузошташударо ҳамчун таъсири омили A ба модели параметрдор тасаввур намудан мумкин аст, ки параметрҳояш интизорияти математикӣ a, таъсири гурӯҳҳои омил $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ва дисперсияи σ^2 мебошанд. Агар гипотезаи H_0 рад карда нашавад, он гоҳ омили A ба аломати натиҷавии X таъсир намерасонад ва бинобар ин $\lambda_j = 0 (j = 1, 2, ..., m)$. Баҳои параметрҳои боқимонда чунин муайян карда мешаванд: баҳои a ба миёнаи умумии ҳамаи натиҷаҳои мушоҳидаҳо

$$\bar{x} = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

ва баҳои σ^2 ба

$$d^{*}_{\text{боқимонда}} = \frac{1}{mn - m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{x}_j \right)^2$$

баробар мешавад.

Агар гипотезаи H_0 рад карда шавад, яъне мавҷудияти таъсири омил ба аломати натиҷавӣ тасдиқ карда шавад, он гоҳ баҳоҳои $\lambda_j \neq 0 (j = 1, 2, ..., m)$ ба фарқҳои $\overline{x}_j - \overline{x}$ баробар мешаванд, ки дар ин ҷо $\overline{x}_j$ -миёнаи гурӯҳии саҳми j-юми омили A мебошад.

Мисоли мушаххасеро дар бораи вобастагии миқдори поруии минералии ба хок дохилкардашуда ва ҳосилнокии растанӣ дида мебароем. Фарз мекунем, ки дар 4 қитъаи якхелаи замин миқдори гуногуни поруи минералӣ ба хок дохил карда шуда, дар ҳар як қитъа 4 маротибагӣ мушоҳида гузаронида шудааст. Дар ин мисол рақами тартибии қитъаи замин(аниқтараш рақами тартибии миқдори поруии дохилкардашуда) омили таъсиркунанда буда, ҳосилнокии растанӣ аломати натиҷавӣ мебошад. Натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар ҷадвали 3 оварда шудаанд.

Бо F- критерия қиматнокии таъсири миқдори поруи дохилкардашударо ба ҳосилнокии растанӣ месанҷем.

Ҷадвали 3

i \ j	1	2	3	4
Рақами тартибии мушоҳида \ *Рақами тартибии омил*	A_1	A_2	A_3	A_4
1	14,5	15,5	17,5	19,5
2	14,0	16,0	18,0	20,0
3	15,0	16,5	18,5	20,5
4	15,5	17,0	19,5	21,5
Миёнаи интихобии гурӯҳӣ	$\overline{x_1} = 14,75$	$\overline{x_2} = 16,25$	$\overline{x_3} = 18,375$	$\overline{x_4} = 20,37$
Дисперсияи интихобии гурӯҳӣ	$D_1^* = 0,3125$	$D_2^* = 0,3125$	$D_3^* = 0,5469$	$D_4^* = 0,546$

Миёнаи умумии ҳамаи 16 натиҷаҳои мушоҳидаҳоро ҳисоб мекунем:

$$\bar{x} = \frac{1}{16}(14{,}5 + 14{,}0 + 15{,}0 + 15{,}5 + 15{,}5 + 16{,}0 + 16{,}5 + +17{,}0 + 17{,}5 +$$

$$+18{,}0 + 18{,}5 + 19{,}5 + 19{,}5 + 20{,}0 + 20{,}5 + 21{,}5) = 17{,}4375 \approx 17{,}44$$

Тағйирёбиҳои дар натиҷаи таъсири омили омӯхташаванда ва дар натиҷаи таъсири омилҳои боқимонда бавуҷудояндаро ҳисоб мекунем:

$$S_1 = n \cdot \sum_{j=1}^{m} \left(\overline{x_j} - \bar{x}\right)^2 = 4 \cdot [(14{,}75 - 17{,}44)^2 + (16{,}25 - 17{,}44)^2 +$$

$$+(18{,}375 - 17{,}44)^2 + (20{,}375 - 17{,}44)^2] = 4 \cdot (7{,}2361 + 1{,}4161 +$$

$$+0{,}874225 + 8{,}614225) = 72{,}5626 \approx 72{,}56;$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ij} - \overline{x_j}\right)^2 = 0{,}3125 \cdot 4 + 0{,}3125 \cdot 4 + 0{,}5469 \cdot 4 + 0{,}5469 \cdot 4 =$$

$$= 6{,}8752 \approx 6{,}88.$$

Тағйирёбии умумӣ:

$$S = 72{,}56 + 6{,}88 = 79{,}44.$$

Акнун метавонем ҷадвали дисперсионии зеринро тартиб диҳем:

Ҷадвали 4

Манбаи тағйирёбии ҳосилноки	Суммаи квадратҳои фарқҳо	Адади дараҷаҳои озод	Баҳои таҳрифнаёфта барои дисперсия
Микдори поруии дохилкарда шуда	72,56	$4-1=3$	$d^{*}_{омил} = 72{,}56/3 \approx 24{,}19$
Омилҳои боқимонда	6,88	$16-4=12$	$d^{*}_{боқимонда} = 6{,}88/12 \approx 0{,}57$
Тағирёбии умумӣ	79,44	$16-1=15$	$79{,}44/15 \approx 5{,}3$

Дар асоси нишондодҳои ин ҷадвал қимати мушоҳидашудаи F - критерияро ҳисоб мекунем:

$$F = \frac{d^*_{омил}}{d^*_{бокимонда}} = \frac{24,19}{0,57} \approx 42,44;$$

Акнун қимати F-критерияро барои аҳамиятнокии додашудаи $\alpha = 0,05$ бо дарачаҳои озоди 3 ва 12 аз чадвали F- тақсимот муайян мекунем. Барои истифода намудан аз ин чадвал $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$; $k_1 = 3$; $k_2 = 12$ гузошта, ҳосил мекунем:

$$F_{0,05;3;12} = 3,49.$$

Азбаски $F > F_{0,05;3;12}$ мебошад, пас гипотезаи H_0- ро рад менамоем ва ба чунин хулоса меоем, ки таъсири микдори гуногуни поруҳо ба ҳосилнокии растани гуногун мебошад.

Дар таҳлили дисперсионӣ мафҳуми *коэффитсиенти детерминатсия* истифода мешавад, ки он ҳамчун нисбати тағйирёбии омилӣ (тағйирёбии аломати натичавӣ дар зери таъсири омили омӯхташаванда) бар тағйирёбии умумӣ муайян карда шуда, нишон медиҳад, ки кадом ҳиссаи дисперсияи аломати натичавӣ X аз омили омӯхташаванда вобаста мебошад. Коэффитсиенти детерминатсияро бо ρ^* ишора мекунем:

$$\rho^* = \frac{S_1}{S}.$$

Барои мисоли овардашуда

$$\rho^* = \frac{72,56}{79,44} \approx 0,913.$$

Ин қимат нишон медиҳад, ки 91,3% тағйирёбии ҳосилнокӣ аз микдори поруҳои дохилкардашуда вобаста мебошад.

Баҳои миёнаи умумии ҳосилнокии растанӣ $\bar{x} = 17,44$. Баҳоҳои таъсири ҳар як китъаи замин (микдори муайяни поруҳо):

$$\lambda_1 = 14,75 - 17,44 = -2,69; \quad \lambda_2 = 16,25 - 17,44 = -1,19;$$
$$\lambda_3 = 18,375 - 17,44 = 0,935; \quad \lambda_4 = 20,375 - 17,44 = 2,935.$$

Аломат ва бузурги $\lambda_j (j=1,2,3,4)$ нишондиҳандаҳои тавсифии саҳми омил мебошанд.

Қайд намудан лозим аст, ки агар дисперсияи омилӣ $d^*_{омил}$ аз дисперсияи боқимонда $d^*_{боқимонда}$ хурд бошад (яъне тағйирёбии аломати натиҷавӣ дар зери таъсири омили омӯхташаванда аз тағйирёбии он дар зери таъсири омилҳои боқимонда кам бошад), он гоҳ аллакай дурустии гипотезаи H_0 маълум мешавад ва зарурияти санҷидани F- критерия барҳам мехӯрад.

Инчунин қайд менамоем, ки дар ин параграф ҳолати баробар будани миқдори мушоҳидаҳои дар ҳар як саҳми омил гузаронидашуда (ҳолати якхела будани ҳаҷми маҷмӯҳои интихобӣ) дида баромада шуд. Дар ҳолати гуногун будани миқдори мушоҳидаҳо дар ҳар як саҳми омил маълум аст, ки формулаҳои истифодашуда каме тағйир меёбанд.

§2. КРИТЕРИЯИ БАРТЛЕТ

Дар боло критерияи муқоисаи ду дисперсияро дида баромадем (F- критерия).

Муқоисакунии $m(m>2)$ дисперсия бо ёрии критерияи Бартлет гузаронида мешавад, ки дар он бузургии омории тақсимоти χ^2 дошта, истифода мешавад. Бигузор, m тақсимоти нормалӣ, ки дисперсияҳояшон мувофиқан ба $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_m^2$ баробаранд дода шуда бошанд. Аз ин тақсимотҳо m маҷмӯҳои интихобии новобастаро, ки ҳаҷмашон мувофиқан ба $n_1, n_2, ..., n_m$ баробар аст, ҷудо мекунем. Гипотезаи асосии H_0 -ро дар бораи баробарии дисперсияҳо $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_m^2 = \sigma^2$ месанҷем.

Барои ҳамаи j маҷмӯҳои интихобӣ баҳоҳои таҳрифнаёфтаи d_j^*- ро барои дисперсияҳои σ_j^2 ҳисоб намуда, бузургии d_0^*- ро ба формулаи зерин ҳисоб мекунем:

$$d_0^* = \frac{(n_1-1)d_1^* + (n_2-1)d_2^* + \ldots + (n_m-1)d_m^*}{(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_m-1)}. \qquad (12.9)$$

Он гоҳ бузургии омории

$$\varphi = q \cdot [(n_1-1)\ln\frac{d_0^*}{d_1^*} + (n_2-1)\ln\frac{d_0^*}{d_2^*} + \ldots + (n_m-1)\ln\frac{d_0^*}{d_m^*}]. \qquad (12.10)$$

-ро критерияи Бартлет меноманд, ки дар ин ҷо

$$q = [1 + \frac{1}{3(m-1)}(\frac{1}{n_1-1} + \frac{1}{n_2-1} + \ldots + \frac{1}{n_m-1} + \frac{1}{(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_m-1)})]^{-1}$$

.Исбот карда шудааст, ки дар ҳолати дуруст будани гипотезаи H_0, агар барои ҳар гуна j шарти $n_j > 3$ иҷро шавад, он гоҳ тақсимоти бузургии омории φ ба тақсимоти χ^2, бо $m-1$ дараҷаҳои озод, наздик мебошад. Бинобар ин барои тафтиши гипотезаи H_0 аз ҷадвали тақсимоти χ^2, барои аҳамиятнокии α - и додашуда, қимати критики $\chi^2{}_{\gamma;m-1}$ $(\gamma = 1-\alpha)$- ро ёфта бо қимати φ муқоиса намудан лозим аст. Агар $\varphi < \chi^2{}_{\gamma;m-1}$ шавад, он гоҳ H_0- ро, дар бораи баробарии дисперсияҳои m маҷмӯҳои интихобӣ, бо аҳамиятнокии α, қабул намудан мумкин аст.

Татбиқи критерияи Бартлетро дар мисоли мавзӯи гузашта дида мебароем, яъне бо ин критерия гипотезаи H_0 - ро дар бораи баробарии дисперсияҳои микдори гуногуни поруҳо месанҷем:

$$d_1^* = \frac{n_1}{n_1-1}\cdot D_1^* = \frac{4}{3}\cdot 0{,}3125 \approx 0{,}4167; \quad d_2^* = \frac{n_2}{n_2-1}\cdot D_2^* = \frac{4}{3}\cdot 0{,}3125 \approx 0{,}4167;$$

$$d_3^* = \frac{n_3}{n_3-1}\cdot D_3^* = \frac{4}{3}\cdot 0{,}5469 = 0{,}7292; \qquad d_4^* = \frac{n_4}{n_4-1}\cdot D_4^* = \frac{4}{3}\cdot 0{,}5469 = 0{,}7292;$$

$$d_0^* = \frac{1}{4}\cdot\left(d_1^* + d_2^* + d_3^* + d_4^*\right) = \frac{2.2918}{4} \approx 0{,}5730;$$

$$q = \left[1 + \frac{1}{3\cdot 3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3+3+3+3}\right)\right]^{-1} = 0{,}864;$$

$$\varphi = 0,864 \cdot 3 \cdot \left[\ln\frac{0,5730}{0,4167} + \ln\frac{0,5730}{0,4167} + \ln\frac{0,5730}{0,7292} + \ln\frac{0,5730}{0,7292} \right] = 0,4015.$$

Барои $\alpha = 0,05$- и додашуда $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ гузошта, аз ҷадвали тақсимоти χ^2 ҳосил мекунем: $\chi^2_{\gamma;m-1} = \chi^2_{0,95;3} = 7,82$.

Азбаски $\varphi < \chi^2_{\gamma;m-1}$ мебошад, пас гипотеза дар бораи баробарии дисперсияҳои аломати натиҷавии X дар чор қитъаи замин $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2$ бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0,05$ қабул карда мешавад.

Қайд менамоем, ки агар гипотеза дар бораи баробарии дисперсияҳо қабул карда шавад, он гоҳ ба сифати баҳои қимати умумии дисперсияҳо бузургии d_0^*-ро қабул намудан мумкин аст. Дар мисоли овардашуда $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = d_0^* = 0,573$.

§3. ТАҲЛИЛИ ДУОМИЛА

Бигузор, омӯхтани таъсири ду омили A ва B ба аломати натиҷавии X талаб карда шавад. Масалан, таъсири намуди дастгоҳ ва намуди ашёи хом ба сифати маҳсулот омӯхта шавад. Ин яке аз масъалаҳои классикии таҳлили дисперсионии дуомила мебошад.

Бо $A_1, A_2, ..., A_n$ саҳмҳои омили A ва бо $B_1, B_2, ..., B_m$ саҳмҳои омили B-ро ишора мекунем.

Ҷадвали 5

Саҳмҳои омили B		B_1	B_2	$\ldots$	B_m	Миёнаҳои гурӯҳӣ(аз рӯи сатр)
Саҳмҳои омили A	$i \backslash j$	1	2	$\ldots$	m	
A_1	1	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1m}	$\overline{x}_{1B}$
A_2	2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2m}	$\overline{x}_{2B}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_n	n	x_{n1}	x_{n2}	$\ldots$	x_{nm}	$\overline{x}_{nB}$
Миёнаҳои гурӯҳӣ (аз рӯи сутун)		$\overline{x}_{A1}$	$\overline{x}_{A2}$	$\ldots$	$\overline{x}_{Am}$	

Бигузор, барои муайян намудани таъсири омилҳои A ва B ба аломати натиҷавии X мушоҳидаҳо гузаронидашуда, натиҷаҳои онҳо ва ҳисобкуниҳои пешакӣ ба намуди Ҷадвали 5 дода шуда бошанд. Дар ин ҷадвал x_{11}- натиҷаи мушоҳидае, ки дар саҳми 1- уми омили A ва дар саҳми 1-уми омили B; x_{12}- натиҷаи мушоҳидае, ки дар саҳми 1-уми омили A ва дар саҳми 2- юми омили B; ва ҳоказо x_{ij}-натиҷаи мушоҳидае, ки дар саҳми i- юми омили A ва дар саҳми j- юми омили B гузаронида шудаанд.

Миёнаҳои гурӯҳӣ (аз рӯи сатр) бо формулаи

$$\bar{x}_{iB} = \frac{1}{m}\left(x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{im}\right), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ва миёнаҳои гурӯҳӣ (аз рӯи сутун) бо формулаи

$$\bar{x}_{Aj} = \frac{1}{n}\left(x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj}\right), \quad j = 1,2,\ldots,m$$

ҳисоб карда мешаванд.

Ҳалли масъалаи таҳлили дисперсионии дуомила аз миқдори мушоҳидаҳои дар ҳар яке аз пайвастшавиҳои саҳмҳои омилҳои A ва B, яъне аз миқдори мушоҳидаҳои дар ҳар яке аз катакчаҳои Ҷадвали 5 гузаронидашуда вобаста мебошад. Мо ҳолатеро дида мебароем, ки дар ҳар яке аз катакчаҳои Ҷадвали 5 танҳо як мушоҳида гузаронида шудааст. Маълум, ки дар ин ҳолат миқдори умумии мушоҳидаҳои гузаронидашуда ба $N = m \cdot n$ баробар мешавад.

Бо a_i интизорияти математикии X- ро дар саҳми A_i, $i = 1,2,\ldots,n$ ва бо b_j интизорияти математикии X- ро дар саҳми B_j, $j = 1,2,\ldots,m$ ишора мекунем. Агар ҳангоми тағйир ёфтани саҳми омили A баробарии $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ҷой дошта бошад, он гоҳ X аз омили A вобаста намебошад. Дар ҳолати баръакс X аз омили A вобаста мебошад. Ба ҳамин монанд, ҳангоми тағйир ёфтани саҳми омили B баробарии $b_1 = b_2 = \ldots = b_m$ ҷой дошта бошад, он гоҳ X аз омили B вобаста намебошад. Вале, азбаски қиматҳои интизориятҳои математикӣ номаълум мебошанд, пас масъалаи тафтиши гипотезаҳои

$$H_A : a_1 = a_2 = ... = a_n; \quad H_B : b_1 = b_2 = ... = b_m$$

ба миён меояд. Тафтиши ин гипотезаҳо танҳо дар ҳолати иҷро шудани шартҳои зерин имконпазир мебошад:

а) барои пайвастшавиҳои гуногуни саҳмҳои омилҳои A ва B мушоҳидаҳо новобаста мебошанд;

б) барои ҳар як пайвастшавиҳои саҳмҳои омилҳои A ва B аломати натиҷавӣ X ба қонуни тақсимоти нормалӣ, бо дисперсияи доимии σ_0^2 итоат менамояд.

Тағйирёбии натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар зери таъсири омилҳои A, B ва омилҳои боқимондаи ба инобат гирифтанашуда бо дисперсияи интихобии бузургии X чен карда мешавад. Онро бо D_X^* ишора мекунем. Барои ҳосил намудани формулаи ҳисобкунии D_X^* миёнаи умумии натиҷаҳои мушоҳидаҳо $\bar{x}$ - ро муайян мекунем:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \frac{m}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{iB} = \frac{n}{N} \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_{Aj} . \qquad (12.11)$$

Он гоҳ

$$D_X^* = S_X / N , \qquad (12.12)$$

ки дар ин ҷо

$$S_X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(x_{ij} - \bar{x} \right)^2 . \qquad (12.13)$$

Тағйирёбии натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар зери таъсири омили A бо дисперсияи интихобии миёнаҳои гурӯҳӣ $\bar{x}_{iB}$, $i = 1,2,...,n$; чен карда мешавад. Онро бо D_A^* ишора мекунем.

Маълум ки

$$D_A^* = S_A / N , \qquad (12.14)$$

ки дар ин ҷо

$$S_A = m \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{x}_{iB} - \bar{x} \right)^2 . \tag{12.15}$$

Ба ҳамин монанд, тағйирёбии натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар зери таъсири омили B бо дисперсияи интихобии миёнаҳои гурӯҳӣ $\bar{x}_{Aj}$, $j = 1,2,...,m$; чен карда мешавад. Онро бо D_B^* ишора намуда, ҳосил мекунем:

$$D_B^* = S_B / N , \tag{12.16}$$

ки дар ин ҷо

$$S_B = n \cdot \sum_{j=1}^{m} \left(\bar{x}_{Aj} - \bar{x} \right)^2 . \tag{12.17}$$

Таъсири омилҳои боқимонда бошад, бо бузургии

$$D_0^* = S_0 / N . \tag{12.18}$$

чен карда мешавад, ки дар ин ҷо

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(x_{ij} - \bar{x}_{iB} - \bar{x}_{Aj} + \bar{x} \right)^2 \tag{12.19}$$

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки

$$D_X^* = D_A^* + D_B^* + D_0^* . \tag{12.20}$$

Пас аз ҳисоб намудани нишондиҳандаҳои тағйирёбии аломати натиҷавӣ D_X^*, D_A^*, D_B^* ва D_0^* мо метавонем ҷадвали дисперсиониро тартиб диҳем, ки он намуди зеринро дорад:

Акнун метавонем тафтиши гипотезаи H_A- ро, ки ба муқоисакунии бузургиҳои d_A^* ва d_0^* асоснок карда шудааст, дида бароем. Агар гипотезаи H_A дуруст бошад, он гоҳ бузургии $F_A = d_A^* / d_0^*$ қонуни F- тақсимотро бо адади дараҷаҳои озоди $l = n-1$ ва $k = (n-1)(m-1)$ дорад.

Барои дараҷаи аҳамиятнокии додашудаи α, $\gamma = 1-\alpha$ гузошта, аз ҷадвали F- тақсимот(Ҷадвали 5, ки дар охири китоб оварда шудааст) нуқтаи критикии тарафи рост x_p -

ро муайян мекунем. Агар қимати адади F_A бо фосилаи $(x_p, +\infty)$ тааллуқ дошта бошад, он гоҳ гипотезаи H_A рад карда мешавад ва чунин хулоса бароварда мешавад, ки омили A ба аломати натиҷавии X таъсир мерасонад.

Ҷадвали 6

Манбаи тағйирёбии аломати натиҷавӣ X	Нишондиҳандаи тағйирёбӣ	Адади дараҷаҳои озод	Баҳои таҳрифнаёфтаи дисперсияи σ_0^2
Омили A	$D^*_A = S_A / N$	$n-1$	$d^*_A = S_A / (n-1)$ (дар ҳолати дуруст будани гипотезаи H_A)
Омили B	$D^*_B = S_B / N$	$m-1$	$d^*_B = S_B / (m-1)$ (дар ҳолати дуруст будани гипотезаи H_B)
Омилҳои боқимонда	$D^*_0 = S_0 / N$	$(n-1)(m-1)$	$d^*_0 = S_0 / ((n-1)(m-1))$
Тағйирёбии умумӣ	$D^*_X = S_X / N$	$m \cdot n - 1$	$d^*_X = S_X / (m \cdot n - 1)$ (дар ҳолати дуруст будани гипотезаи H_A ва H_B)

Дараҷаи ин таъсиррасонӣ бо коэффитсиенти детерминатсияи интихобӣ

$$\rho^*_A = D^*_A / D^*_X \quad .$$

чен карда шуда, ҳиссаи дисперсияи X- ро, ки дар зери таъсири омили A ба амал омадааст, нишон медиҳад.

Агар $F_A < x_p$ шавад, он гоҳ гипотезаи H_A рад карда намешавад ва чунин хулоса бароварда мешавад, ки таъсири омили A ба аломати натиҷавии X муайян карда нашудааст.

Ба ҳамин монанд, гипотезаи H_B, дар бораи таъсири омили B ба аломати натиҷавии X, тафтиш карда мешавад. Агар ин гипотеза дуруст бошад, он гоҳ бузургии омории

$$F_B = d_B^* / d_0^*$$

қонуни F- тақсимотро бо адади дараҷаҳои озоди $l = m-1$ ва $k = (n-1)(m-1)$ дорад. Барои α- и додашуда $\gamma = 1-\alpha$ гузошта аз ҷадвали F- тақсимот x_p- ро муайян мекунем. Агар F_B ба фосилаи $(x_p, +\infty)$ тааллуқ дошта бошад, гипотезаи H_B рад карда мешавад ва хулоса бароварда мешавад, ки омили B ба аломати натиҷавӣ X таъсир мерасонад. Дараҷаи ин таъсиррасонӣ бо коэффитсиенти детерминатсияи интихобӣ

$$\rho_B^* = D_B^* / D_X^*$$

чен карда шуда, ҳиссаи дисперсияи X- ро, ки дар зери таъсири омили B ба амал омадааст, нишон медиҳад.

Агар $F_B < x_p$ шавад, он гоҳ H_B рад карда намешавад ва чунин хулоса бароварда мешавад, ки таъсири омили B ба аломати натиҷавии X муайян карда нашудааст.

Дар бисёр ҳолатҳо барои гузаронидани таҳлили дисперсионӣ модели қиматҳои аломати натиҷавӣ сохта мешавад. Барои таҳлили дуомила, бо як мушоҳида дар як катакча, ин модел чунин намуд дорад:

$$x_{ij} = a + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m. \qquad (12.21)$$

ки дар ин ҷо x_{ij}- қимати аломати натиҷавии X, ки метавонад дар саҳми i- юми омили A ва дар саҳми j- юми омили B ба қайд гирифта шавад; a- миёнаи генералии натиҷаҳои мушоҳидаҳо (интизорияти математикии X); α_i- таъсири умумии саҳми i- юми омили A ба X; яъне $\alpha_i = a_i - a$; β_j- таъсири умумии саҳми j- юми омили B ба X, яъне $\beta_j = b_j - a$; a_i- интизорияти математикии саҳми i- юми омили A; b_j- интизорияти математикии саҳми j- юми омили B; ε_{ij}- таъсири боқимондаи тасодуфӣ, ки таъсири ҳамаи омилҳои боқимондаи ба инобат гирифтанашударо ба X ифода менамояд.

Агар шартҳои а) ва б), ки дар аввали мавзӯъ оварда шудаанд, ҷой дошта бошанд, он гоҳ бақияи ε_{ij} ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои $a = 0$ ва $\sigma = \sigma_0^2$ итоат менамояд:

$$\varepsilon_{ij} = N\left(0, \sigma_0^2\right), \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,m \qquad (12.22)$$

ва ҳамаи бузургиҳои ε_{ij} новобаста мебошанд.

Параметрҳои модели овардашуда интизорияти математикии a, таъсирҳои саҳмҳои омили $A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, таъсирҳои саҳмҳои омили $B: \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ва дисперсияи σ_0^2 мебошанд.

Агар гипотезаҳои H_A ва H_B рад карда нашаванд, яъне таъсири омилҳои A ва B ба X тасдиқ нагарданд, он гоҳ дар модел $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, ва $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$ ва параметрҳои боқимонда, дар асоси натиҷаҳои мушоҳидаҳо, чунин баҳо дода мешаванд: *баҳои a миёнаи умумии $\bar{x}$ ва баҳои σ_0^2 бузургии омории d_0^* мешаванд.*

Агар гипотезаҳои H_A ва H_B рад карда шаванд, он гоҳ таъсири омилҳои A ва B ба X тасдиқ карда мешавад ва параметрҳои модел чунин баҳо дода мешаванд: *баҳои a ба миёнаи умумии $\bar{x}$, баҳоҳои α_i ба $\overline{x_{iB}} - \bar{x}$, баҳоҳои β_j ба $\overline{x_{Aj}} - \bar{x}$ ва баҳои σ_0^2 ба d_0^* баробар мешаванд.*

Мисол. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ таъсири намуди дастгоҳ ва ашёи хом ба сифатнокии маҳсулоти истеҳсолшаванда муайян карда шавад. Натиҷаҳои мушоҳидаҳои гузаронидашуда ва ҳисобкуниҳои пешакӣ дар Ҷадвали 7 оварда шудаанд.

Ҳал. Чӣ хеле, ки аз Ҷадвали 7 дида мешавад, шумораи саҳмҳои омили A ва шумораи саҳмҳои омили B

мувофиқан $n=3$ ва $m=2$ мебошанд. Шумораи умумии мушоҳидаҳои гузаронидашуда $N=6$ аст. Фарз мекунем, ки шартҳои а) ва б) – и дар аввали мавзӯъ овардашуда ҷой доранд.

Миёнаи умумии $\bar{x}$- ро бо формулаи (12.11) ҳисоб мекунем:

Ҷадвали 7

Намудҳои дастгоҳ (саҳми омили А)	Намуди ашёи хом (саҳми омили В)	B_1	B_2	Миёнаи гурӯҳӣ (аз рӯи сатр)
	i \ j	1	2	
A_1	1	12	48	$\bar{x}_{1B}=30$
A_2	2	18	62	$\bar{x}_{2B}=40$
A_3	3	30	100	$\bar{x}_{3B}=65$
Миёнаҳои гурӯҳӣ (аз рӯи сутун)		$\bar{x}_{A_1}=20$	$\bar{x}_{A_2}=70$	

$$\bar{x}=\frac{12+48+18+62+30+100}{6}=45.$$

Тагйирёбии умумиро мувофиқи формулаи (12.13) ҳисоб мекунем

$$S_X=(12-45)^2+(48-45)^2+(18-45)^2+(62-45)^2+(30-45)^2+(100-45)^2=5366$$

Он гоҳ, дар асоси формулаи (12.12):

$$D_X^*=S_X/N=5366/6.$$

Тағйирёбиеро, ки дар зери таъсири омили A ба вуҷуд омадааст, бо формулаи (12.15) ҳисоб мекунем:

$$S_A=(30-45)^2\cdot 2+(40-45)^2\cdot 2+(65-45)^2\cdot 2=1300.$$

Он гоҳ, дар асоси формулаи (12.14):

$$D_A^*=S_A/N=1300/6.$$

Тағйирёбиеро, ки дар зери таъсири омили B ба вучуд омадааст, бо формулаи (12.17) ҳисоб мекунем:

$$S_B = (20-45)^2 \cdot 3 + (70-45)^2 \cdot 3 = 3750.$$

Он гоҳ, дар асоси формулаи (12.16):

$$D_B^* = S_B / N = 3750/6.$$

Тағйирёбии боқимондаро бо формулаи (12.19) ҳисоб мекунем:

$$S_0 = (12-30-20+45)^2 + (48-30-70+45)^2 + (18-40-20+45)^2 +$$
$$+ (62-40-70+45)^2 + (30-65-20+45)^2 + (100-65-70+45)^2 = 316.$$

Он гоҳ дар асоси формулаи (12.18):

$$D_0^* = S_0 / N = 316/6.$$

Дурустии баробарии (12.20) – ро месанчем:

$$\frac{5366}{6} = \frac{1300}{6} + \frac{3750}{6} + \frac{316}{6}; \ \ 5366 = 5366.$$

Акнун мо метавонем ҷадвали дисперсиониро тартиб диҳем:

Қимати ададии критерияи F_A- ро ҳисоб мекунем:

$$F_A = d_A^* / d_0^* = \frac{650}{158} \approx 4{,}1.$$

Акнун барои $\alpha = 0{,}05$ ишораи $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$ - ро қабул намуда, барои ададИ дараҷаҳои озод $k_1 = l = 2$ ва $k_2 = k = 2$ аз ҷадвали F- тақсимот нуқтаи критикии $x_P = 19$ - ро меёбем. Азбаски $F_A = 4{,}1$ ба соҳаи критикии $(19,+\infty)$ мансуб нест, пас ба чунин хулоса омадан мумкин аст, ки таъсири намудҳои дастгоҳ ба сифатнокии маҳсулоти истеҳсолшаванда тасдиқ нагардид.

Қимати ададии критерияи F_B - ро ҳисоб мекунем:

$$F_B = d_B^* / d_0^* = \frac{3750}{158} \approx 23{,}7.$$

Барои $\alpha = 0,05$; $\gamma = 1-\alpha = 0,95$; $k_1 = l = 1$; $k_2 = k = 2$ аз ҷадвали F- тақсимот нуқтаи критикии $x_p = 18,51$- ро меёбем. Азбаски $F_B = 23,7$ ба соҳаи критикии $(18,51;+\infty)$ тааллуқ дорад, пас намуди ашёи хом ба сифатнокии маҳсулот таъсир мерасонад. Барои муайян намудани ин таъсир коэффитсиенти детерминатсияи интихобиро ҳисоб мекунем:

Ҷадвали 8

Манбаи тағйирёбии сифатнокии маҳсулот	Нишондиҳандаи тағйирёбӣ	Адади дараҷаҳои озод	Баҳои таҳрифнаёфтаи дисперсияи σ_0^2
Намуди дастгоҳҳо (омили A)	1300/6	2	$d_A^* = 1300/2 = 650$
Намуди ашёи хом (омили B)	3750/6	1	$d_B^* = 3750/1 = 3750$
Омилҳои боқимонда	316/6	$(3-1)\times(2-1) = = 2$	$d_0^* = 316/2 = 158$
Тағйирёбии умумӣ	5366/6	5	$d_X^* = 5366/5 = 1073,2$

$$\rho_B^* = D_B^* / D_X^* = \frac{3750}{5366} \approx 0,69.$$

Ҳамин тавр, қариб 70% - и тағйирёбии интихобии сифати маҳсулот аз ашёи хом вобаста мебошад.

Акнун барои мисоли овардашуда параметрҳои модели (12.21) – ро муайян мекунем. Азбаски намуди дастгоҳ (омили A) ба сифати маҳсулот таъсир намерасонад, пас $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Баҳоҳои параметрҳои боқимонда чунин аст:

$$a \approx \bar{x} = 45; \ \ \beta_1 = 20 - 45 = -25; \ \ \beta_2 = 70 - 45 = 25; \ \ \sigma_0^2 \approx d_0^* = 158.$$

Аз ин ҷо баробариҳои (12.21) ва (12.22) – ро ба инобат гирифта, барои сифати маҳсулоти дар дастгоҳи дилхоҳ, аз намуди якуми ашёи хом истеҳсолшуда, баробарии тақрибии зеринро ҳосил мекунем:

$$x_{i1} \approx 45 - 25 + N\left(0; \sqrt{158}\right), \quad i = 1,2,3.$$

Барои сифати маҳсулоти дар дастгоҳи дилхоҳ аз намуди дуюми ашёи хом истеҳсолшуда бошад, баробарии тақрибии зерин ҷой дорад:

$$x_{i2} \approx 45 + 25 + N\left(0; \sqrt{158}\right), \quad i = 1,2,3.$$

§4. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

Масъалаи 1. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0,05$ вобастагии ҳаҷми умумии кори иҷрокардаи идораи сохтумон аз кори якрӯзаи 4 бригадаҳои коркардаистодаи идораи сохтумон муайян карда шавад, агар барои ҳар як бригада 4 мушоҳида гузаронида шуда бошад. Натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар ҷадвали зерин оварда шудаанд:

i \ j	1	2	3	4
Рақами тартибии омил / *Рақами тартибии мушоҳида*	A_1	A_2	A_3	A_4
1	140	150	148	150
2	144	149	149	155
3	142	152	146	154
4	145	150	147	152

Ҷавоб: Вобастагӣ ҷой дорад; $\rho^* = 0,849$

Масъалаи 2. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ таъсири се намуди дастгоҳ ва ду намуди ашёи хом ба сифатнокии маҳсулоти истеҳсолшаванда муайян карда шавад. Натиҷаҳои мушоҳидаҳои гузаронидашуда дар ҷадвали зерин оварда шудаанд.

Намуди дастгоҳ (саҳми омили A)	Намуди ашёи хом (саҳми омили B)	B_1	B_2
	i \ j	1	2
A_1	1	10	50
A_2	2	20	60
A_3	3	30	100

Ҷавоб: намуди дастгоҳ таъсир намерасонад; намуди ашёи хом таъсир мерасонад: $\rho^* = 0{,}7$.

Масъалаи 3. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ таъсири се намуди дастгоҳ ва се намуди ашёи хом ба сифатнокии маҳсулоти истеҳсолшаванда муайян карда шавад. Натиҷаҳои мушоҳидаҳои гузаронидашуда дар ҷадвали зерин оварда шудаанд.

Намуди дастгоҳ (саҳми омили A)	Намуди ашёи хом (саҳми омили B)	B_1	B_2	B_3
	i \ j	1	2	3
A_1	1	25	15	45
A_2	2	35	20	55
A_3	3	20	30	65

БОБИ XIII. ТАҲЛИЛИ КОРРЕЛЯТСИОНӢ

§ 1. ВОБАСТАГИҲОИ ФУНКСИОНАЛӢ ВА КОРРЕЛЯТСИОНӢ

Дар масъалаҳои амалӣ бузургиҳо метавонанд бо тарзҳои гуногун байни ҳам вобаста бошанд. Тарзи маъмултарини вобастагии ду бузургӣ, ки аз барномаи мактаби ҳамагонӣ ба мо шинос аст, *вобастагии функсионалӣ* мебошад. Дар вобастагии функсионалӣ ба ҳар як қимати як бузургӣ як ё якчанд қимати муайяни бузургии дигар мувофиқ гузошта мешавад. Масалан, дар байни радиуси доира R ва масоҳати он S вобастагии функсионалии якқимата ҷой дорад, ки бо формулаи $S=\pi\cdot R^2$ муайян карда мешавад. Дар вобастагии функсионалии $y=x^2$ бошад, ба ду қимати тағйирёбандаи $x(x=-x_0;x=x_0)$ як қимати тағйирёбандаи $y\left(y_0=(\pm x_0)^2\right)$ мувофиқ гузошта мешавад.

Аммо, дар масъалаҳои амалӣ инчунин бузургиҳои вобастае вомехӯранд, ки аз муайян будани қимати яке аз онҳо қимати (ё қиматҳои) дигарашро аниқ муайян намудан имконнопазир мебошад.

Вобастагии байни бузургиҳои X ва Y, ки дар он ба як қимати бузургии X маҷмӯи қиматҳои бузургии Y мувофиқ гузошта шуда, бузургии Y аз ин маҷмӯъ тасодуфан қимат қабул менамояд, *стохастикӣ (тасодуфӣ, эҳтимолӣ) ё оморӣ* номида мешавад. Масалан вобастагии байни ҳосилнокии растанӣ ва миқдори поруҳои ба хок андохташуда *стохастикӣ* мебошад. Дар ҳақиқат ба қитъаҳои масоҳаташон баробари майдони кишт миқдори якхелаи пору андохта, аз ҳар як қитъаи замин ҳосили якхела гирифта наметавонем. Яъне ба як қимати миқдори поруҳо маҷмӯи қиматҳои ҳосилнокӣ мувофиқ меояд ва агар қимати миқдори поруҳоро тағйир диҳем, он гоҳ маҷмӯи қиматҳои ҳосилнокӣ низ тағйир меёбад. Ин ҳолат аз он сабаб рӯй медиҳад, ки ба ҳосилнокии растанӣ ғайр аз миқдори поруҳо боз бузургиҳои бисёри дигар ба монанди таркиби хок, таркиби поруҳо, мунтазам тақсим шудани поруҳо дар сатҳи замин, дар кадом чуқурии замин ҷойгир шудани поруҳо ва ғайраҳо таъсир мерасонанд.

Ҳамин тавр, агар маҷмӯи қиматҳои бузургии Y-ро, ки ба як қимати қайдкардашудаи X мувофиқ меояд, ҳамчун тақсимоти Y тасаввур намоем, он гоҳ гуфтан мумкин аст, ки *вобастагии X ва Y стохастикӣ* номида мешавад, агар тағйирёбии қиматҳои X ба тағйирёбии қонуни тақсимоти Y оварда расонад.

Ҳолати хусусии вобастагии стохастикиро, ки дар он тағйирёбии қиматҳои яке аз бузургиҳо ба тағйирёбии қимати миёнаи бузургии дигар оварда мерасонад, *вобастагии корреляционӣ* (аз калимаи лотинии *correlatio*, ки маъноям вобастагии байни ду бузургӣ мебошад) меноманд.

Дар ин боб *вобастагии корреляционии* байни ду бузургии тасодуфии X ва Y -ро муфассал дида мебароем.

§ 2. ҶАДВАЛИ КОРРЕЛЯТСИОНӢ. МУОДИЛАИ РЕГРЕССИЯ

Бигузор, бо бузургии тасодуфии дученакаи дискретии (X,Y) n санҷишҳои новобаста гузаронида шуда, натиҷаҳои ба даст оварда шуда ба намуди ҷадвали 1 гурӯҳбандӣ карда шуда бошанд.

Дар сатри якум ва сутуни якуми ин ҷадвал мувофиқан қиматҳои дар натиҷаи n санҷиш қабул намудаи бузургиҳои тасодуфии Y ва X оварда шудаанд. Дар мобайни ҷадвал зудиҳои қиматҳои бузургии тасодуфии дученакаи (X, Y) оварда шудаанд, ки n_{lj} зудии ҳодисаи $\{X = x_i, Y = Y_j\}$ мебошад. Дар сутуни охирон суммаи зудиҳои ҳар як сатри ҷадвал ва дар сатри охирон суммаи зудиҳои ҳар як сутуни ҷадвал оварда шудаанд:

Ҷадвали 1

$Y \backslash X$	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_k	n_{x_i}
x_1	n_{11}	n_{12}	$\ldots$	n_{1j}	$\ldots$	n_{1k}	n_{x_1}
x_2	n_{21}	n_{22}	$\ldots$	n_{2j}	$\ldots$	n_{2k}	n_{x_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	n_{i2}	$\ldots$	n_{ij}	$\ldots$	n_{ik}	n_{x_i}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_l	n_{l1}	n_{l2}	$\ldots$	n_{lj}	$\ldots$	n_{lk}	$n_{x_{li}}$
n_{y_j}	n_{y_1}	n_{y_2}	$\ldots$	n_{y_j}	$\ldots$	n_{y_k}	n

Ҷадвали 1 -ро ҷадвали коррелятсионӣ меноманд.

$$n_{x_i} = n_{i1} + n_{i2} + \ldots + n_{ik}; \quad n_{y_j} = n_{1j} + n_{2j} + \ldots + n_{lj}.$$

Маълум, ки

$$\sum_{i=1}^{l} n_{x_i} = \sum_{j=1}^{k} n_{y_j} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} n_{ij} = n, \tag{13.1}$$

ки дар ин ҷо n- ҳаҷми интихоб(миқдори санҷишҳои гузаронидашуда) мебошад.

Агар бузургии тасодуфии (X, Y) бефосила бошад, он гоҳ маҷмӯи қиматҳои имконпазири X -ро ба l фосилаҳои дарозиашон баробари (α_{i-1}, α_i), $i = 1, 2, \ldots, l$ ва маҷмӯи қиматҳои имконпазири Y -ро ба k фосилаҳои дарозиашон баробари (β_{j-1}, β_j), $j = 1, 2, \ldots, k$ тақсим намуда, ба сифати x_i ва y_j мувофиқан миёнаҳои фосилаҳои (α_{i-1}, α_i) ва (β_{j-1}, β_j) -ро қабул намудан кифоя аст.

Аз ҷадвали коррелятсионӣ дидан мумкин аст, ки дар натиҷаи санҷишҳо, бузургии тасодуфии X қиматҳои $x_1, x_2, \ldots x_l$ - ро мувофиқан бо зудиҳои $n_{x_1}, n_{x_2}, \ldots, n_{x_l}$ қабул намудааст. Бинобар ин баробарии (13.1) – ро ба инобат гирифта, миёнаи омории ин қиматҳоро бо формулаи зерин ҳисоб намудан мумкин аст:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{x_i}}{\sum_{i=1}^{l} n_{x_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{x_i}}{n}. \tag{13.2}$$

Ба ҳамин монанд, миёнаи омории қиматҳои қабулкардаи бузургии тасодуфии Y ҳисоб карда мешавад:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j \cdot n_{y_j}}{\sum_{j=1}^{k} n_{y_j}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j \cdot n_{y_j}}{n}. \tag{13.3}$$

Маълумотҳои ҷадвали коррелятсиониро бо ду тарз гурӯҳбандӣ намудан мумкин аст. Дар тарзи якум, нисбат ба ҳар як қимати қабулкардаи X гурӯҳҳо ташкил медиҳем. Яъне ба гурӯҳе, ки ба қимати x_i мувофиқ аст, ҳамаи элементҳои сатри i-юми қисми асосии ҷадвали коррелятсионӣ: $n_{i1}, n_{i2}, \ldots, n_{ik}$ ва n_{x_i} мансуб мебошанд. Миёнаи омории ин гурӯҳ ба

$$\bar{y}_i^* = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j \cdot n_{ij}}{n_{x_i}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j \cdot n_{ij}}{\sum_{j=1}^{k} n_{ij}}. \tag{13.4}$$

баробар мешавад.

Ҳамин тавр, ба ҳар як қимати x_i - и бузургии тасодуфии X *миёнаи омории гурӯҳии* $\bar{y}_i^*$- и бузургии тасодуфии Y мувофиқ гузошта мешавад. Яъне дар байни бузургиҳои x ва $\bar{y}^*$ метавонад вобастагии функсионалии

$$\overline{y}^{*} = f(x) \qquad (13.5)$$

ҷой дошта бошад, ки мувофиқи он ба ҳар як қимати x_i қимати муайяни $\overline{y}^{*}_i$ мувофиқ гузошта мешавад.

Дар тарзи дуюм, нисбат ба ҳар як қимати қабулкардаи Y гурӯҳҳо ташкил медиҳем. Яъне ба гурӯҳе, ки ба қимати y_j мувофиқ аст, ҳамаи элементҳои сутуни j-юми қисми асосии ҷадвали коррелятсионӣ: $n_{1j}, n_{2j}, ..., n_{lj}$ ва n_{y_j} мансуб мебошанд. Маълум, ки миёнаи омории ин гурӯҳ ба

$$\overline{x}^{*}_j = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{ij}}{n_{y_j}} = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{ij}}{\sum_{i=1}^{l} n_{ij}}. \qquad (13.6)$$

баробар мешавад.

Дар ин ҷо низ дар байни бузургиҳои y ва $\overline{x}^{*}$ метавонад вобастагии функсионалии

$$\overline{x}^{*} = \varphi(y) \qquad (13.7)$$

ҷой дошта бошад, ки мувофиқи он ба ҳар як қимати y_j қимати муайяни $\overline{x}^{*}_j$ мувофиқ гузошта мешавад.

Ҳамин тавр, вобастагии коррелятсионии байни ду бузургиҳои тасодуфии X ва Y гуфта, вобастагии функсионалии байни қиматҳои яке аз ин бузургиҳо ва миёнаҳои омории гурӯҳии бузургии дигарро меноманд.

Аз баробариҳои (13.5) ва (13.7) ба чунин хулоса омадан мумкин аст, ки байни бузургиҳои тасодуфии X ва Y, ки бо ҷадвали коррелятсионии 1 дода шудаанд, метавонад ду намуди вобастагиҳои коррелятсионӣ ҷой дошта бошанд. Намуди аввал ин вобастагии байни қиматҳои X ва миёнаҳои омории гурӯҳии Y, ки бо баробарии (13.5) муайян шудааст. Ин вобастагиро *вобастагии коррелятсионии* Y аз X меноманд. Намуди дуюм ин вобастагии функсионалии қиматҳои Y ва миёнаҳои омории гурӯҳии X мебошад, ки бо баробарии (13.7) муайян карда шудааст. Ин намуди вобастагиро вобастагии коррелятсионии X аз Y меноманд.

Муодилаҳои (13.5) ва (13.7) – ро, ки намуди умумии вобастагиҳои коррелятсионии Y аз X ва X аз Y - ро ифода менамоянд, мувофиқан *муодилаҳои регрессияи* (аз калимаи лотинии *regression*, ки маънояш ба қафо ё ба ҳолати пештара баргаштан мебошад) Y аз X ва X аз Y меноманд.

Графики муодилаҳои регрессияи (13.5) ва (13.7) – ро мувофиқан *хати каҷи регрессияи* Y аз X ва X аз Y меноманд.

Мақсади асосии таҳлили коррелятсионӣ аз муайян намудани функсияҳои $f(x)$, $\varphi(y)$ дар асоси ҷадвали коррелятсионии додашуда ва аз муайян намудани дараҷаи алоқамандии бузургиҳои тасодуфии X ва Y иборат мебошад.

§ 3. ВОБАСТАГИҲОИ КОРРЕЛЯТСИОНИИ ХАТТӢ

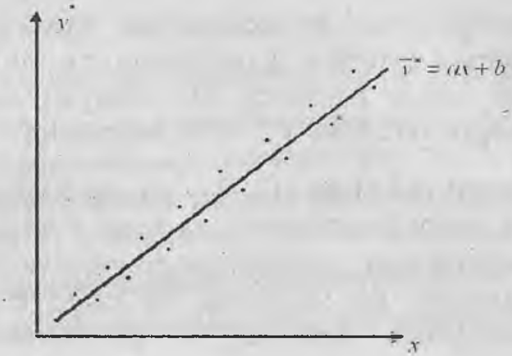
Вобастагиҳои коррелятсионии Y *аз* X *ва* X *аз* Y *хаттӣ* номида мешаванд, агар $f(x)$ ва $\varphi(y)$ дар баробариҳои (13.5) ва (13.7) функсияҳои хаттӣ бошанд:

$$\bar{y}^* = a \cdot x + b, \tag{13.8}$$

$$\bar{x}^* = c \cdot y + d, \tag{13.9}$$

ки дар ин ҷо a, b, c ва d доимиҳо мебошанд.

Муодилаҳои (13.8) ва (13.9) *муодилаҳои хаттии регрессияи* Y аз X ва X аз Y номида мешаванд. Графики ин муодилаҳо мувофиқан хати *рости регрессияи* Y аз X ва X аз Y номида мешаванд.



Расми 13. 1

Сараввал вобастагии коррелятсионии хаттии Y аз X-ро дида мебароем. Дар асоси ҷадвали коррелятсионии 1 барои ҳар як қимати $x_i,\ i = 1,2,...,l$ миёнаи омории гурӯҳии $\bar{y}_i^*$ - ро бо ёрии формулаи (13.4) ҳисоб намуда, мавқеи нуқтаҳои $(x_i, \bar{y}_i^*)$ - ро дар ҳамвории координатӣ муайян мекунем. Бигузор, ин нуқтаҳо чӣ тавре, ки дар расми 13.1 нишон дода шудааст, дар атрофии хати рости бо муодилаи (13.8) додашуда ҷойгир шуда бошанд. Ин ҷойгиршавии нуқтаҳо нишон медиҳад, ки вобастагии коррелятсионии Y аз X хаттӣ мебошад.

Дар ин ҳолат, масъалаи ёфтани муодилаи регрессияи (13.8) ба масъалаи ёфтани қиматҳои номаълуми a ва b табдил меёбад. Табиист, ки қиматҳои a ва b бояд чунин бошанд, ки нуқтаҳои $(x_i, \bar{y}_i^*)$ ба хати рости бо муодилаи (13.8) додашуда наздиктарин бошанд. Яке аз усулҳои маъмултарини ёфтани чунин қиматҳои a ва b усули квадратҳои хурдтарин мебошад. Дар асоси ин усул a ва b бояд чунин бошанд, ки бузургии

$$S = \sum_{i=1}^{l} \left(ax_i + b - \bar{y}_i^*\right)^2 \cdot n_{x_i}$$

қимати хурдтарини худро қабул намояд. Қиматҳои x_i, $\overline{y}^*_i$ ва n_{x_i} аз ҷадвали коррелятсионӣ муайян карда мешаванд. Пас, S функсияи ду тағйирёбандаи новобастаи a ва b мебошад. Аз курси математикаи олӣ маълум аст, ки шарти зарурии экстремум (максимум ё минимум) доштани S ба сифр баробар шудани ҳосилаҳои хусусии он нисбат ба ҳар як аргументаш мебошад:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum\limits_{i=1}^{l} 2\left(ax_i + b - \overline{y}^*_i\right) \cdot n_{x_i} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{l} 2\left(ax_i + b - \overline{y}^*_i\right) \cdot x_i \cdot n_{x_i} = 0. \end{cases}$$

Ҳарду тарафи баробариҳои ҳосилшударо ба 2 тақсим намуда, табдилдиҳиҳои заруриро гузаронида нисбат ба a ва b системаи муодилаҳои алгебравии зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{x_i} + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{l} n_{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{l} \overline{y}^*_i \cdot n_{x_i}, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^2 \cdot n_{x_i} + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \cdot \overline{y}^*_i \cdot n_{x_i}, \end{cases}$$

ё ҳар як ҷамъшавандаҳои муодилаҳои ҳосилшударо ба ҳаҷми интихоб n тақсим намуда ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a \cdot \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{x_i}}{n} + b \cdot \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} n_{x_i}}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} \overline{y}^*_i \cdot n_{x_i}}{n}, \\ a \cdot \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^2 \cdot n_{x_i}}{n} + b \cdot \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{x_i}}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} x_i \cdot \overline{y}^*_i \cdot n_{x_i}}{n}. \end{cases} \qquad (13.10)$$

Агар муносибатҳои аз ҷадвали коррелятсионии 1 ҳосилшударо ба инобат гирем, он гоҳ системаи (13.10) – ро дар намуди дигар навиштан мумкин аст. Дар ҳақиқат, аз баробарии (13.1) маълум мегардад, ки коэффитсиенти назди b, дар муодилаи якум, ба як баробар аст. Аз баробариҳои (13.2) ва (13.3) дидан мумкин аст, ки коэффитсиенти назди a дар муодилаи якум ва коэффитсиенти назди b дар муодилаи дуюм ба миёнаи омории $\bar{x}$ баробар аст. Инчунин маълум аст, ки тарафи рости баробарии якум ба миёнаи омории $\bar{y}$ баробар аст:

$$\frac{\sum_{i=1}^{l} \bar{y}_i^* \cdot n_{x_i}}{n} = \bar{y}.$$

Коэффитсиенти назди a дар муодилаи дуюм ба миёнаи арифметикии квадратҳои қиматҳои X баробар аст. Онро бо $\overline{x^2}$ ишора мекунем.

Аз баробарии (13.4) истифода намуда, дар тарафи рости баробарии дуюми (13.10) табдилдиҳии зеринро мегузаронем:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{x_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j \cdot n_{ij}}{n_{x_i}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j \cdot n_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j \cdot n_{ij}}{n}.$$

Ифодаи ҳосилшуда ба миёнаи арифметикии ҳосили зарби қиматҳои X ва Y баробар аст. Бинобар ин, онро бо $\overline{xy}$ ишора мекунем:

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{n}. \qquad (13.11)$$

Ҳамин тавр, системаи муодилаҳои (13.10) –ро чунин навиштан мумкин аст:

$$\begin{cases} a\bar{x} + b = \bar{y}, \\ a\overline{x^2} + b\bar{x} = \overline{xy}. \end{cases} \qquad (13.12)$$

Аз муодилаи якуми системаи (13.12) ҳосил мекунем:

$$b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

Ифодаи ҳосилшударо дар муодилаи (13.8) ба ҷои b гузошта, муодилаи хаттии регрессияи Y аз X- ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$\overline{y}^*-\overline{y}=\alpha\cdot\left(x-\overline{x}\right). \qquad (13.13)$$

Муодилаи ҳосилшуда нишон медиҳад, ки хати регрессияи Y аз X аз нуқтаи $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ мегузарад. Ин нуқтаи *мобайнии графики корреляция* мебошад.

Коэффитсиенти α дар муодилаи (13.13) *коэффитсиенти регрессияи* Y аз X номида мешавад ва бо $\rho_{y/x}$ ишора карда мешавад. Бинобар ин, муодилаи (13.13) –ро дар намуди зерин менависем:

$$\overline{y}^*-\overline{y}=\rho_{y/x}\cdot\left(x-\overline{x}\right). \qquad (13.14)$$

Барои пурра муайян намудани муодилаи (13.14) системаи (13.12) – ро ҳал намуда, *коэффитсиенти регрессия* $\alpha=\rho_{y/x}$ - ро меёбем:

$$\rho_{y/x}=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2}-\overline{x}^2}. \qquad (13.15)$$

Махраҷи касри тарафи рости баробарии (13.15) ба дисперсияи бузургии тасодуфии X нисбат ба миёнаи омориаш баробар аст. Бинобар ин

$$\rho_{y/x}=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x^2} \qquad (13.16)$$

мешавад, ки дар ин ҷо

$$\sigma_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{l}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot n_{x_i}}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{l}x_i^2\cdot n_{x_i}}{n}-\overline{x}^2. \qquad \left(13.16'\right)$$

Дар тарафи рости баробарии (13.16) сурати касрро бо μ ишора мекунем:

$$\mu=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k}x_i\cdot y_j\cdot n_{ij}}{n}-\overline{x}\cdot\overline{y}. \qquad (13.17)$$

Он гоҳ коэффитсиенти регрессияи Y аз X- ро чунин навиштан мумкин аст:

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma_x^2}. \qquad (13.18)$$

Ҳамин тавр, муодилаи регрессияи хаттии Y аз X- ро дар намуди (13.14) ҳосил намудем, ки дар он коэффитсиенти регрессияи Y аз X бо формулаи (13.18) муайян карда мешавад.

Барои ҳар як қиматҳои y_j, $j = 1,2,...,k$, ки дар ҷадвали коррелятсионии 1 оварда шудааст миёнаҳои омории гурӯҳии $\overline{x}_j^*$ -ро бо формулаи (13.6) ҳисоб намуда, айнан ҳамин тавр мулоҳизаронӣ намуда, муодилаи регрессияи хаттии X аз Y- ро дар намуди зерин ҳосил намудан мумкин аст:

$$\overline{x}^* - \overline{x} = \rho_{x/y} \cdot (y - \overline{y}), \qquad (13.19)$$

ки дар ин ҷо $\rho_{x/y}$ коэффитсиенти регрессияи X аз Y номида мешавад. Ин коэффитсиент бо формулаи

$$\rho_{x/y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_y^2}, \qquad (13.20)$$

ё

$$\rho_{x/y} = \frac{\mu}{\sigma_y^2}, \qquad (13.21)$$

муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо σ_y^2- дисперсияи бузургии тасодуфии Y нисбат ба миёнаи омориаш мебошад. Яъне

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} (y_j - \overline{y})^2 \cdot n_{y_j}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j^2 \cdot n_{y_j}}{n} - \overline{y}^2. \qquad (13.22)$$

Формулаи (13.18) ва (13.21) – ро муқоиса намуда, дидан мумкин аст, ки сурати касрҳо якхела буда, махраҷҳояшон мусбат мебошанд. Бинобар ин, коэффитсиентҳои регрессияи $\rho_{y/x}$ ва $\rho_{x/y}$ аломати якхела доранд ва аломати онҳо бо аломати μ якхела мебошад.

Чӣ хеле, ки аз муодилаи (13.14) дида мешавад коэффитсиенти регрессияи Y аз X, яъне $\rho_{y/x}$ коэффитсиенти кунҷии хати регрессияи Y аз X мебошад. Коэффитсиенти кунҷии хати регрессияи X аз Y, чӣ хеле, ки аз баробарии (13.19) дида мешавад $1/\rho_{x/y}$ мешавад.

Ҳамин тавр, аз ҷадвали коррелятсионии 1 истифода намуда, муодилаи регрессияи хаттии Y аз X ё X аз Y -ро ёфтан мумкин аст. Барои ба ин мақсад ноил гаштан миёнаҳои омории $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ -ро мувофиқан бо формулаҳои (13.2) ва (13.3), дисперсияҳои σ_x^2 ва σ_y^2 -ро бо формулаҳои $(13.16')$ ва (13.22), бузургии μ -ро бо формулаи (13.17), коэффитсиентҳои регрессияи $\rho_{y/x}$ ва $\rho_{x/y}$ -ро мувофиқан бо формулаҳои (13.18) ва (13.21) ҳисоб намудан лозим аст. Пас аз ин қиматҳои ҳосилшудаи $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\rho_{x/y}$ ва $\rho_{y/x}$ -ро ба муодилаҳои (13.14) ва (13.19) гузошта, намуди мушаххаси муодилаҳои (13.8) ва (13.9)-ро ҳосил мекунем.

Мисол. Бигузор, бо бузургии тасодуфии дученакаи (X, Y) $n=100$ санҷишҳои новобаста гузаронида шуда, ҷадвали коррелятсионии зерин ҳосил карда шуда бошад:

Ҷадвали 2

$X \backslash Y$	10	12	14	16	18	20	n_{x_i}
10	9	4	1	-	-	-	14
30	1	10	9	3	-	-	23
50	-	2	6	14	6	-	28
70	-	-	1	10	18	6	35
n_{y_j}	10	16	17	27	24	6	$n=100$

Муодилаҳои регрессияи Y аз X ва X аз Y ёфта шаванд.

Ҳал. Барои муайян намудани хатти регрессияи Y аз X миёнаи омории гурӯҳҳои Y -ро нисбат ба ҳар як қиматҳои X бо формулаи (13.4) ҳисоб мекунем:

$$\overline{y}_1^* = \frac{\sum_{j=1}^{6} y_j \cdot n_{1j}}{n_{x_1}} = \frac{1}{14} \cdot (10 \cdot 9 + 12 \cdot 4 + 14 \cdot 1) \approx 10{,}86;$$

$$\overline{y}_2^* = \frac{\sum_{j=1}^{6} y_j \cdot n_{2j}}{n_{x_2}} = \frac{1}{23} \cdot (10 \cdot 1 + 12 \cdot 10 + 14 \cdot 9 + 16 \cdot 3) \approx 13{,}22;$$

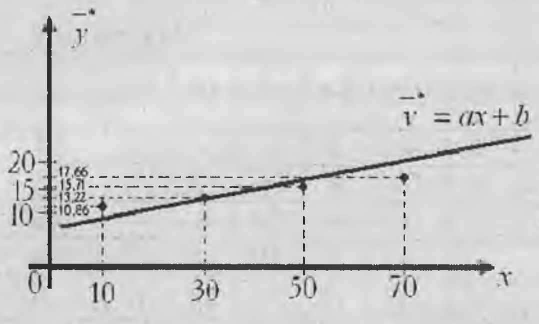
$$\overline{y}_3^* = \frac{\sum_{j=1}^{6} y_j \cdot n_{3j}}{n_{x_3}} = \frac{1}{28} \cdot (12 \cdot 2 + 14 \cdot 6 + 16 \cdot 14 + 18 \cdot 6) \approx 15{,}71;$$

$$\overline{y}_4^* = \frac{\sum_{j=1}^{6} y_j \cdot n_{4j}}{n_{x_4}} = \frac{1}{35} \cdot (14 \cdot 1 + 16 \cdot 10 + 18 \cdot 18 + 20 \cdot 6) \approx 17{,}66.$$

Дар натиҷа ҷадвали зеринро ҳосил мекунем:

x_i	10	30	50	70
$\overline{y}_i^*$	10,86	13,22	15,71	17,66

Нуқтаҳои $(x_i, \overline{y}_i^*)$-ро дар ҳамвории координатӣ тасвир менамоем (Расми 13.2):



Расми 13.2

Чӣ хеле, ки аз расми 13.2 дида мешавад, нуқтаҳои $(x_i, \overline{y}_i^*)$ дар атрофи хати рости $\overline{y}^* = ax + b$ ҷойгир шудаанд. Аз ин чо ба хулоса омадан мумкин аст, ки вобастагии коррелятсионии Y аз X хаттӣ мебошад. Бинобар ин муодилаҳои регрессияи Y аз X ва X аз Y- ро дар намудҳои (13.8) ва (13.9) ҷустуҷӯ менамоем.

Миёнаҳои омории $\bar{x}$ ва $\bar{y}$- ро мувофиқан бо формулаҳои (13.2) ва (13.3) ҳисоб мекунем:

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(10 \cdot 14 + 30 \cdot 23 + 50 \cdot 28 + 70 \cdot 35) = 46{,}8.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{100}(10 \cdot 10 + 12 \cdot 16 + 14 \cdot 17 + 16 \cdot 27 + 18 \cdot 24 + 20 \cdot 6) = 15{,}14.$$

Дисперсияҳои σ_x^2 ва σ_y^2 -ро бо формулаҳои $(13.16')$ ва (13.22) ҳисоб мекунем:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot n_{x_i}}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1}{100}(10^2 \cdot 14 + 30^2 \cdot 23 + 50^2 \cdot 28 + 70^2 \cdot 35) - (46{,}8)^2 = 445{,}76.$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{6} y_j^2 \cdot n_{y_j}}{n} - \bar{y}^2 = \frac{1}{100}(10^2 \cdot 10 + 12^2 \cdot 16 + 14^2 \cdot 17 + 16^2 \cdot 27 + 18^2 \cdot 24 + 20^2 \cdot 6) -$$
$$-(15{,}4)^2 = 8{,}0204.$$

Бузургии μ- ро бо формулаи (13.17) ҳисоб мекунем:

$$\mu = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{6} x_i y_j \cdot n_{ij}}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{100} \cdot [10 \cdot (10 \cdot 9 + 12 \cdot 4 + 14 \cdot 1) +$$
$$+ 30 \cdot (10 \cdot 1 + 12 \cdot 10 + 14 \cdot 9 + 16 \cdot 3) + 50 \cdot (12 \cdot 2 + 14 \cdot 6 + 16 \cdot 14 + 18 \cdot 6) +$$
$$+ 70 \cdot (14 \cdot 1 + 16 \cdot 10 + 18 \cdot 18 + 20 \cdot 6)] - 46{,}8 \cdot 15{,}14 = 50{,}448.$$

Коэффитсиентҳои $\rho_{y/x}$ ва $\rho_{x/y}$- ро бо формулаҳои (13.18) ва (13.21) ҳисоб мекунем:

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma_x^2} = \frac{50{,}448}{445{,}76} \approx 0{,}113; \quad \rho_{x/y} = \frac{\mu}{\sigma_y^2} = \frac{50{,}448}{8{,}0204} \approx 6{,}290.$$

Акнун қиматҳои $\bar{x} = 46{,}8$; $\bar{y} = 15{,}14$ ва $\rho_{y/x} \approx 0{,}113$ - ро ба формулаи (13.14) гузошта, муодилаи регрессияи Y аз X-ро ҳосил мекунем:

$$\bar{y}^{*} - 15{,}14 = 0{,}113 \cdot (x - 46{,}8)$$

ё

$$\bar{y}^{*} = 0{,}113x + 9{,}852 .$$

Ба ҳамин монанд, қиматҳои $\bar{x} = 46{,}8$; $\bar{y} = 15{,}14$ ва $\rho_{x/y} = 6{,}290$- ро ба формулаи (13.19) гузошта, муодилаи регрессияи X аз Y-ро ҳосил мекунем:

$$\bar{x}^{*} - 46{,}8 = 6{,}290 \cdot (y - 15{,}14)$$

ё

$$\bar{x}^{*} = 6{,}290y - 48{,}431 .$$

§4. ВОБАСТАГИҲОИ КОРРЕЛЯТСИОНИИ ҒАЙРИХАТТӢ

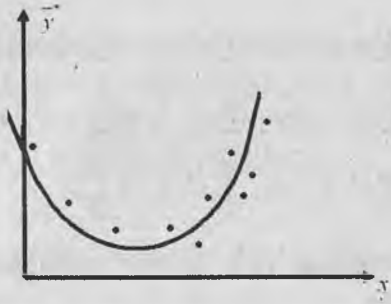
Дар байни бузургиҳои тасодуфии X ва Y метавонад *вобастагии корреляцсионии ғайрихаттӣ* ҷой дошта бошад. Дар ин ҳолат низ, монанди корреляцсияи хаттӣ, дар асоси ҷадвали корреляцсионӣ муодилаи регрессияро ёфтан мумкин аст.

Бигузор, вобастагии X ва Y бо ҷадвали корреляцсионии 1 дода шуда бошад. Миёнаҳои омории гурӯҳии $\bar{y}_i^{*}$ -ро, ки ба ҳар як қимати x_i, ($i = 1, 2, ..., l$) мувофиқ меоянд, ҳисоб мекунем. Фарз мекунем, ки нуқтаҳои $(x_i, \bar{y}_i^{*})$ дар атрофии парабола ҷойгир шуда бошанд(Расми 13.3):

Дар ин ҳолат муодилаи регрессияи параболии Y аз X -ро дар намуди муодилаи парабола

$$\bar{y}_i = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \qquad (13.23)$$

ҷустуҷӯ мекунем, ки дар ин ҷо a_0, a_1, a_2 доимиҳо мебошанд.



Расми 13.3

Қоидаи ёфтани муодилаи (13.23) ба монанди қоидаи ёфтани муодилаи регрессияи хаттӣ мебошад. Аз ҳамаи параболаҳои имконпазир параболаеро интихоб мекунем, ки ба маънои усули квадратҳои хурдтарин ба нуқтаҳои $\left(x_i, \bar{y}_i^*\right)$ наздиктарин бошад, яъне функсияи

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{l}\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - \bar{y}_i^*\right)^2 \cdot n_{x_i}$$

қимати хурдтарини худро қабул намояд.

Чӣ хеле, ки дида мешавад S функсияи се тағйирёбандаҳои новобастаи a_0, a_1, a_2 мебошад. Аз курси математикаи олӣ маълум аст, ки шарти зарурии мавҷудияти экстремуми ин функсия ба сифр баробар шудани ҳосилаҳои хусусии он мебошад:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \text{ ва } \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0.$$

Ин ҳосилаҳои хусусиро ёфта, табдилдиҳиҳои заруриро гузаронида, нисбат ба номаълумҳои a_0, a_1, a_2 системаи муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a_0 \cdot \sum_{i=1}^{l} n_{x_i} + \quad a_1 \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{x_i} + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i^2 \cdot n_{x_i} = \sum_{i=1}^{l} \overline{y}_i^* \cdot n_{x_i}, \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot n_{x_i} + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i^2 \cdot n_{x_i} + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i^3 \cdot n_{x_i} = \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot \overline{y}_i^* \cdot n_{x_i}, \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i^2 \cdot n_{x_i} + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i^3 \cdot n_{x_i} + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i^4 \cdot n_{x_i} = \sum_{i=1}^{l} x_i^2 \cdot \overline{y}_i^* \cdot n_{x_i}. \end{cases} \quad (13.24)$$

Системаи муодилаҳои (13.24)-ро *системаи муодилаҳои нормалӣ* меноманд.

Муодилаи регрессияи параболии X аз Y дар намуди

$$\overline{x}_i = b_0 + b_1 \cdot y + b_2 \cdot y^2 \quad (13.25)$$

ҷустуҷӯ карда мешавад. Дар ин ҳолат *системаи муодилаҳои нормалӣ* барои ёфтани номаълумҳои b_0, b_1 ва b_2 намуди зеринро дорад:

$$\begin{cases} b_0 \cdot \sum_{j=1}^{k} n_{y_j} + b_1 \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j \cdot n_{y_j} + b_2 \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j^2 \cdot n_{y_j} = \sum_{j=1}^{k} \overline{x}_j^* \cdot n_{y_j} \\ b_0 \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j \cdot n_{y_j} + b_1 \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j^2 \cdot n_{y_j} + b_2 \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j^3 \cdot n_{y_j} = \sum_{j=1}^{k} \overline{x}_j^* \cdot y_j \cdot n_{y_j}, \\ b_0 \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j^2 \cdot n_{y_j} + b_1 \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j^3 \cdot n_{y_j} + b_2 \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j^4 \cdot n_{y_j} = \sum_{j=1}^{k} \overline{x}_j^* \cdot y_j^2 \cdot n_{y_j}. \end{cases} \quad (13.26)$$

Мисол. Бигузор, бо бузургиҳои тасодуфии дученакаи (X, Y), $n = 40$ санҷишҳои новобаста гузаронидашуда ҷадвали коррелятсионии зерин ҳосил карда шуда бошад:

Ҷадвали 3

X \ Y	10	12	14	16	n_{x_i}
0	4	1	-	-	5
10	-	2	3	2	7
20	-	1	4	4	9
30	-	2	2	3	7
40	-	2	3	1	6
50	2	2	2	-	6
n_{y_j}	6	10	14	10	$n = 40$

Муодилаи регрессияи Y аз X ёфта шаванд.

Ҳал. Барои муайян намудани хати регрессияи Y аз X миёнаи омории гурӯҳии Y -ро нисбат ба ҳар як қиматҳои X бо формулаи (13.4) ҳисоб мекунем:

$$\bar{y}_1^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j \cdot n_{1j}}{n_{x_1}} = \frac{1}{5} \cdot (10 \cdot 4 + 12 \cdot 1) = 10{,}4;$$

$$\bar{y}_2^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j \cdot n_{2j}}{n_{x_2}} = \frac{1}{7} \cdot (12 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 16 \cdot 2) = 14;$$

$$\bar{y}_3^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j \cdot n_{3j}}{n_{x_3}} = \frac{1}{9} \cdot (12 \cdot 1 + 14 \cdot 4 + 16 \cdot 4) = \frac{44}{3} \approx 14{,}7;$$

$$\bar{y}_4^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j \cdot n_{4j}}{n_{x_4}} = \frac{1}{7} \cdot (12 \cdot 2 + 14 \cdot 2 + 16 \cdot 3) = \frac{100}{7} \approx 14{,}3;$$

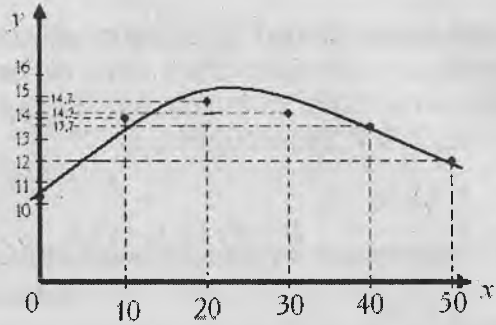
$$\bar{y}_5^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j \cdot n_{5j}}{n_{x_5}} = \frac{1}{6} \cdot (12 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 16 \cdot 1) = \frac{41}{3} \approx 13{,}7;$$

$$\bar{y}_6^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j \cdot n_{6j}}{n_{x_6}} = \frac{1}{6} \cdot (10 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 14 \cdot 2) = 12.$$

Дар натиҷа ҷадвали зеринро ҳосил мекунем:

x_i	0	10	20	30	40	50
$\bar{y}_i^*$	10,4	14	14,7	14,3	13,7	12

Нуқтаҳои $(x_i, \bar{y}_i^*)$-ро дар ҳамвории координатӣ тасвир менамоем (Расми 13.4):



Расми 13.4

Чӣ хеле, ки аз расми 13.4 дида мешавад, нуқтаҳои $\left(x_i, \bar{y}_i^*\right)$ дар атрофи хати параболаи

$$\bar{y}^* = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

ҷойгир шудаанд. Аз ин ҷо ба чунин хулоса омадан мумкин аст, ки вобастагии коррелятсионии Y аз X параболӣ мебошад. Бинобар ин муодилаи регрессияи Y аз X-ро дар намуди (13.23) ҷустуҷӯ менамоем. Бо ин мақсад, коэффитсиентҳои муодилаҳои нормалии (13.24)-ро аз ҷадвали коррелятсионии 3 истифода намуда, ҳисоб мекунем:

$$\sum_{i=1}^{6} n_{x_i} = 5+7+9+7+6+6 = 40;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot n_{x_i} = 0\cdot 5 + 10\cdot 7 + 20\cdot 9 + 30\cdot 7 + 40\cdot 6 + 50\cdot 6 = 1000;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 \cdot n_{x_i} = 0^2\cdot 5 + 10^2\cdot 7 + 20^2\cdot 9 + 30^2\cdot 7 + 40^2\cdot 6 + 50^2\cdot 6 = 35200;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^3 \cdot n_{x_i} = 0^3\cdot 5 + 10^3\cdot 7 + 20^3\cdot 9 + 30^3\cdot 7 + 40^3\cdot 6 + 50^3\cdot 6 = 1402000;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^4 \cdot n_{x_i} = 0^4\cdot 5 + 10^4\cdot 7 + 20^4\cdot 9 + 30^4\cdot 7 + 40^4\cdot 6 + 50^4\cdot 6 = 60040000;$$

$$\sum_{i=1}^{6} \bar{y}_i^* \cdot n_{x_i} = 10{,}4\cdot 5 + 14\cdot 7 + \frac{44}{3}\cdot 9 + \frac{100}{7}\cdot 7 + \frac{41}{6}\cdot 6 + 12\cdot 6 = 536;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot \overline{y}_i^* \cdot n_{x_i} = 0\cdot 10{,}4\cdot 5+10\cdot 14\cdot 7+20\cdot\frac{44}{3}\cdot 9+30\cdot\frac{100}{7}\cdot 7+40\cdot\frac{41}{6}\cdot 6+50\cdot 12\cdot 6=13500$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 \cdot \overline{y}_i^* \cdot n_{x_i} = 0^2\cdot 10{,}4\cdot 5+10^2\cdot 14\cdot 7+20^2\cdot\frac{44}{3}\cdot 9+30^2\cdot\frac{100}{7}\cdot 7+$$
$$+40^2\cdot\frac{41}{6}\cdot 6+50^2\cdot 12\cdot 6=463800.$$

Ҳамин тавр, намуди мушаххаси системаи муодилаҳои нормалиро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 40a_0+1000a_1+35200a_2=536; \\ 1000a_0+35200a_1+1402000a_2=13500; \\ 35200a_0+1402000a_1+60040000a_2=463800. \end{cases}$$

Ин системаро ҳал намуда меёбем:

$$a_2 \approx -0{,}0055;\ a_1 \approx 0{,}2913 \text{ ва } a_0 \approx 10{,}9575\,.$$

Аз ин ҷо, муодилаи регрессияи параболии Y аз X намуди зеринро дорад:

$$\overline{y}^* = 10{,}9575+0{,}2913x-0{,}0055x^2.$$

Акнун фарз мекунем, ки нуқтаҳои $(x_i, \overline{y}_i^*)$, ки аз ҷадвали коррелятсионии 1 муайян карда шудаанд, дар атрофии хати гипербола(Расми 13.5) ҷойгир шуда бошанд. Он гоҳ муодилаи регрессияро дар намуди муодилаи гипербола ҷустуҷӯ менамоем.

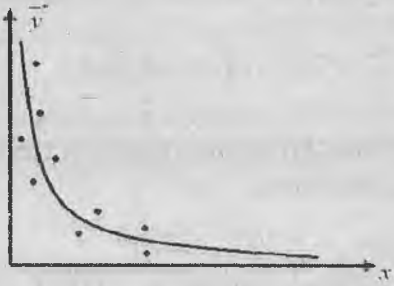
Барои регрессяи Y аз X:

$$\overline{y}^* = \frac{a}{x}+b \tag{13.27}$$

ва барои регрессияи X аз Y:

$$\overline{x}^* = \frac{c}{y}+d \tag{13.28}$$

ки дар ин ҷо a, b, c ва d доимиҳои номаълум мебошанд. Чунин регрессияро *регрессияи гиперболӣ* меноманд.



Расми 13.5

Сараввал регрессияи Y аз X -ро дида мебароем. Ишораи $z=\frac{1}{x}$ -ро қабул намуда, муодилаи (13.27) –ро ба намуди $\overline{y}^*=a\cdot z+b$ меоварем. Мувофиқи ин муодила дар байни $\overline{y}^*$ ва z вобастагии коррелятсионии хаттӣ ҷой дорад. Бинобар ин параметрҳои a ва b аз системаи муодилаҳои (13.12), ки дар он x бо z иваз карда шудааст, муайян карда мешаванд. Пас аз ин, ба тағйирёбандаи x баргашта, барои муайян намудани параметрҳои a ва b системаи муодилаҳои нормалии зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{1}{x_i}\cdot n_{x_i}+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{l}n_{x_i}=\sum\limits_{i=1}^{l}\overline{y}_i^*\cdot n_{x_i}; \\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{1}{x_i^2}\cdot n_{x_i}+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{1}{x_i}\cdot n_{x_i}=\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{1}{x_i}\cdot\overline{y}_i^*\cdot n_{x_i}. \end{cases} \tag{13.29}$$

Ба ҳамин монанд, дар ҳолати регрессияи гиперболии X аз Y, барои муайян намудани параметрҳои c ва d дар муодилаи (13.28), системаи муодилаҳои нормали зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} c\cdot\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{y_j}\cdot n_{y_j}+d\cdot\sum\limits_{j=1}^{k}n_{y_j}=\sum\limits_{j=1}^{k}\overline{x}^*_j\cdot n_{y_j}; \\ c\cdot\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{y_j^2}\cdot n_{y_j}+d\cdot\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{y_j}\cdot n_{y_j}=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{y_j}\cdot\overline{x}^*_j\cdot n_{y_j}. \end{cases} \tag{13.30}$$

Мисол. Бигузор, бо бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y), $n=30$ санчишҳои новобаста гузаронидашуда чадвали коррелятсионии зерин ҳосил карда шуда бошад:

Чадвали 4

$X \backslash Y$	100	110	120	130	n_{x_i}
50	-	-	1	3	4
100	-	3	3	-	6
150	-	6	2	1	9
200	1	4	-	-	5
250	4	1	1	-	6
n_{y_j}	5	14	7	4	30

Муодилаи регрессияи Y аз X ёфта шавад.

Ҳал. Барои муайян намудани хати регрессияи Y аз X миёнаҳои омории гурӯҳии Y -ро нисбат ба ҳар як қиматҳои x бо формулаи (13.4) ҳисоб мекунем:

$$\overline{y}^*_1=\frac{\sum\limits_{j=1}^{4}y_j\cdot n_{1j}}{n_{x_1}}=\frac{1}{4}(120\cdot 1+130\cdot 3)=127{,}5;$$

$$\overline{y}^*_2=\frac{\sum\limits_{j=1}^{4}y_j\cdot n_{2j}}{n_{x_2}}=\frac{1}{6}(110\cdot 3+120\cdot 3)=115;$$

$$\overline{y}_3^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j \cdot n_{3j}}{n_{x_3}} = \frac{1}{9}(110 \cdot 6 + 120 \cdot 2 + 130 \cdot 1) = 114{,}44;$$

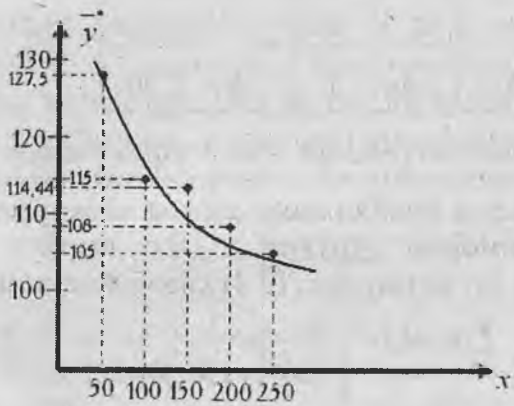
$$\overline{y}_4^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j \cdot n_{4j}}{n_{x_4}} = \frac{1}{5}(100 \cdot 1 + 110 \cdot 4) = 108;$$

$$\overline{y}_5^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j \cdot n_{5j}}{n_{x_5}} = \frac{1}{6}(100 \cdot 4 + 110 \cdot 1 + 120 \cdot 1) = 105.$$

Дар натиҷа ҷадвали зеринро ҳосил мекунем:

x_i	50	100	150	200	250
$\overline{y}_i^*$	127,5	115	114,44	108	105

Нуқтаҳои $(x_i, \overline{y}_i^*)$- ро дар ҳамвории координатӣ тасвир менамоем (Расми 13.6):



Расми 13.6

Чӣ хеле ки аз расми 13.6 дида мешава, нуқтаҳои $(x_i, \overline{y}_i^*)$ дар атрофии хати гиперболаи

$$\bar{y}^* = \frac{a}{x} + b$$

ҷойгир шудаанд. Аз ин ҷо, ба чунин хулоса омадан мумкин аст, ки вобастагии коррелятсионии Y аз X гиперболӣ мебошад. Бинобар ин муодилаи регрессияи Y аз X- ро дар намуди (13.27) ҷустуҷӯ менамоем. Бо ин мақсад, аз ҷадвали коррелятсионии 4 истифода намуда, коэффитсиентҳои системаи муодилаҳои нормалии (13.29) – ро ҳисоб мекунем:

$$\sum_{i=1}^{5} n_{x_i} = 4 + 6 + 9 + 5 + 6 = 30;$$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i} \cdot n_{x_i} = \frac{1}{50} \cdot 4 + \frac{1}{100} \cdot 6 + \frac{1}{150} \cdot 9 + \frac{1}{200} \cdot 5 + \frac{1}{250} \cdot 6 = 0,249;$$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i^2} \cdot n_{x_i} = \frac{1}{50^2} \cdot 4 + \frac{1}{100^2} \cdot 6 + \frac{1}{150^2} \cdot 9 + \frac{1}{200^2} \cdot 5 + \frac{1}{250^2} \cdot 6 = 0,002821;$$

$$\sum_{i=1}^{5} \bar{y}_i^* \cdot n_{x_i} = 127,5 \cdot 4 + 115 \cdot 6 + 114,44 \cdot 9 + 108 \cdot 5 + 105 \cdot 6 = 3400;$$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i} \cdot \bar{y}_i^* \cdot n_{x_i} = \frac{1}{50} \cdot 127,5 \cdot 4 + \frac{1}{100} \cdot 115 \cdot 6 + \frac{1}{150} \cdot 114,44 \cdot 9 +$$

$$+ \frac{1}{200} \cdot 108 \cdot 5 + \frac{1}{250} \cdot 105 \cdot 6 = 29,19.$$

Ҳамин тавр, намуди мушаххаси системаи муодилаҳои нормалии (13.29) – ро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 0,249a + 30b = 3400; \\ 0,002821a + 0,249b = 29,19. \end{cases}$$

Ин системаро ҳал карда меёбем:

$$a = 1256,96; \ b = 102,66.$$

Муодилаи регрессияи гиперболии Y аз X намуди зеринро дорад:

$$\bar{y}^{*} = \frac{1256,96}{x} + 102,66.$$

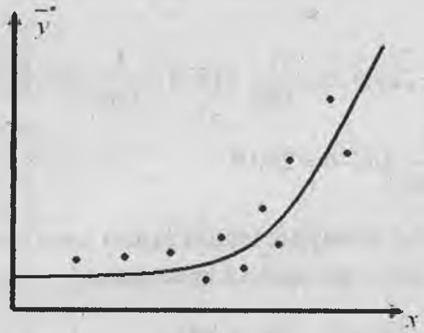
Дар охир, фарз мекунем, ки нуқтаҳои $\left(x_i, \bar{y}_i^{*}\right)$, ки координатаҳояшон аз ҷадвали коррелятсионии 1 муайян карда шудааст, дар атрофи графики функсияи нишондиҳандагӣ ҷойгир шудаанд (Расми 13.7). Дар ин ҳолат вобастагии коррелятсионии Y аз X бо функсияи нишондиҳандагии

$$\bar{y}^{*} = b \cdot a^{x}. \tag{13.31}$$

муайян карда шуда, вобастагии коррелятсионии X аз Y бо функсияи нишондиҳандагии

$$\bar{x}^{*} = d \cdot c^{y}. \tag{13.32}$$

муайян карда мешавад.



Расми 13.7

Ҳарду тарафи баробарии (13.31)-ро логарифмиронида ҳосил мекунем:

$$\lg \bar{y}^{*} = \lg a \cdot x + \lg b.$$

Муодилаи ҳосилшударо бо муодилаи регрессияи хаттӣ (13.8) муқоиса намуда, дидан мумкин аст, ки $\lg \overline{y}^{*}$ ва x, бо параметрҳои $\lg a$ ва $\lg b$, вобастагии коррелятсионии хаттӣ доранд. Бинобар ин системаи муодилаҳои нормалӣ, барои муайян намудани $\lg a$ ва $\lg b$ чунин намуд дорад:

$$\begin{cases} \lg a \cdot \sum_{i=1}^{l} n_{x_i} \cdot x_i + \lg b \cdot \sum_{i=1}^{l} n_{x_i} = \sum_{i=1}^{l} \lg \overline{y}_i^{*} \cdot n_{x_i}; \\ \lg a \cdot \sum_{i=1}^{l} n_{x_i} \cdot x_i^2 + \lg b \cdot \sum_{i=1}^{l} n_{x_i} \cdot x_i = \sum_{i=1}^{l} n_{x_i} \cdot x_i \cdot \lg \overline{y}_i^{*}. \end{cases} \tag{13.33}$$

Системаи (13.33) – ро ҳал намуда, $\lg a$ ва $\lg b$- ро ёфта, пас параметрҳои a ва b- ро ёфтан мумкин аст.

Айнан ҳамин тавр мулоҳизаронӣ намуда, барои муайян намудани параметрҳои муодилаи (13.32), системаи муодилаҳои нормалии зеринро ҳосил намудан мумкин аст:

$$\begin{cases} \lg c \cdot \sum_{j=1}^{k} n_{y_j} \cdot y_j + \lg d \cdot \sum_{j=1}^{k} n_{y_j} = \sum_{j=1}^{k} n_{y_j} \cdot \lg \overline{x}_j^{*}; \\ \lg c \cdot \sum_{j=1}^{k} n_{y_j} \cdot y_j^2 + \lg d \cdot \sum_{j=1}^{k} n_{y_j} \cdot y_j = \sum_{j=1}^{k} n_{y_j} \cdot y_j \cdot \lg \overline{x}_j^{*}. \end{cases} \tag{13.34}$$

Системаи (13.34)-ро ҳал намуда, $\lg c$ ва $\lg d$-ро ёфта, пас параметрҳои c ва d-ро ёфтан мумкин аст.

§ 5. КОЭФФИТСИЕНТИ КОРРЕЛЯТСИЯ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

Чӣ хеле, ки дар боло қайд шуда буд, масъалаи аввали таҳлили коррелятсионӣ аз муайян намудани муодилаи регрессия иборат бошад, масъалаи дуюмаш аз муайян намудани дараҷаи алоқамандии бузургиҳо иборат мебошад.

Барои муайян намудани дараҷаи алоқамандии бузургиҳо мафҳуми *коэффитсиенти коррелятсия* дохил карда шудааст.

Коэффитсиенти коррелятсияи (r) бузургиҳои X ва Y гуфта, миёнаи геометрии коэффитсиентҳои регрессияи ин бузургиҳоро меноманд, яъне

$$r = \pm\sqrt{\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y}}\,. \qquad (13.35)$$

Аломатҳои $\pm$ дар назди решаи квадратӣ нишон медиҳанд, ки коэффитсиенти коррелятсия аломати коэффитсиенти регрессияро дорад, яъне r мусбат мешавад, агар $\rho_{y/x}$ ва $\rho_{x/y}$ мусбат бошанд, ва баракс, r манфӣ мешавад, агар $\rho_{y/x}$ ва $\rho_{x/y}$ манфӣ бошанд.

Агар формулаҳои (13.16) ва (13.20) – ро ба инобат гирем, он гоҳ барои коэффитсиенти коррелятсия ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (13.36)$$

Пас, (13.17) – ро ба инобат гирифта, ҳосил мекунем:

$$r = \frac{\mu}{\sigma_x \cdot \sigma_y}\,. \qquad (13.37)$$

Дар навбати худ коэффитсиенти регрессияро бо ёрии коэффитсиенти коррелятсия ифода намудан мумкин аст. Барои ин ифодаи (13.18) – ро каме тағйир дода, ҳосил мекунем:

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,.$$

Дар ин ҷо баробарии (13.37) – ро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\rho_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,. \qquad (13.38)$$

Ба ҳамин монанд аз баробариҳои (13.21) ва (13.37) ҳосил намудан мумкин аст, ки

$$\rho_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \qquad (13.39)$$

Баробариҳои (13.38) ва (13.39) – ро ба инобат гирифта, муодилаи регрессияи хаттии Y аз X (13.14)-ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\bar{y}^{*} - \bar{y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \bar{x}\right). \qquad (13.40)$$

Муодилаи (13.19) бошад, намуди

$$\bar{x}^{*} - \bar{x} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \bar{y}\right). \qquad (13.41)$$

- ро мегирад.

Коэффитсиенти корреляциия хосиятҳои зеринро дорад:

1^0. Қимати мутлақи коэффитсиенти корреляциия аз 1 зиёд намешавад, яъне

$$|r| \le 1, \quad ё \quad -1 \le r \le 1.$$

2^0. Агар $r = \pm 1$ бошад, он гоҳ байни бузургиҳои X ва Y вобастагии функсионалии хаттӣ вуҷуд дорад.

3^0. Агар $r = 0$ бошад, он гоҳ дар байни бузургиҳои X ва Y вобастагии коррелятсионӣ вуҷуд надорад.

Аз хосиятҳои овардашуда ба чунин хулоса омадан мумкин аст: *то чӣ андозае, ки қимати мутлақи коэффитсиенти кореляцсия* $|r|$ *ба 1 наздик бошад, то ҳамон андоза қувваи алоқамандии бузургиҳои X аз Y зиёд мебошад.* Бо дигар сухан то чӣ андозае, ки $|r|$ ба 1 наздик бошад, то ҳамон андоза қиматҳои y_i ба хати рости регрессияи Y аз X ва қиматҳои x_i ба хати рости регрессияи X аз Y наздиктар ҷойгир мешаванд.

Дар охир як тарзи дигари ёфтани коэффитсиенти коррелятсия ва муодилаи регресияи хаттиро дида мебароем.

Бигузор, системаи ду бузургиҳои тасодуфӣ X ва Y дода шуда аст. Фарз мекунем, ки дар натиҷаи n санҷиш n нуқтаи $M_i(x_i, y_i)$, $i=\overline{1,n}$ ҳосил шудааст, ки дар байни онҳо нуқтаҳои якхела низ метавонанд бошанд. Коэффитсиенти коррелятсияи ин системаи бузургиҳои тасодуфиро меёбем.

Аз қонуни ададҳои калон бармеояд, ки ҳангоми кифоя калон будани n мо метавонем дар формулаҳои ёфтани бузургиҳои σ_X^2, σ_Y^2 ва C_{XY} интизориятҳои математикии $M(X)$ ва $M(Y)$ -ро бо қимати миёнаи арифметикии бузургиҳои тасодуфии X ва Y иваз намоем, яъне баробариҳои тақрибии зерин ҷой доранд:

$$\left.\begin{array}{c} M(X) \approx \bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \qquad M(Y) \approx \bar{y} = \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}, \\ \sigma_X^2 \approx \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2, \qquad \sigma_Y^2 \approx \dfrac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots +_n^2}{n} - \bar{y}^2, \\ C_{XY} \approx \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{n} - \bar{x}\bar{y}. \end{array}\right\} \quad (13.42)$$

Дар асоси ин баробарихо коэффитсиенти коррелятсияро бо формулаи

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad (13.43)$$

меёбем. Агар

$$|r_{XY}|\sqrt{n-1} \geq 3 \qquad (13.44)$$

бошад(гипотезаи алоқа), он гоҳ алоқаи байни бузургиҳои тасодуфии X ва Y ба дараҷаи кофӣ эҳтимолият дорад. Агар алоқаи байни X ва Y мавҷуд бошад, он гоҳ наздикшавии хаттии $\overline{y}_x^*$ аз x бо ёрии формулаи регрессияи хаттӣ

$$\overline{y}_x^* = ax + b \qquad (13.45)$$

дода мешавад, ки дар ин ҷо $a = \frac{r_{XY}\sigma_Y}{\sigma_X}$, $b = \overline{y} - a\overline{x}$ аст.

Наздикшавии хаттии $\overline{x}_y^*$ аз y бо формулаи регрессияи хатии

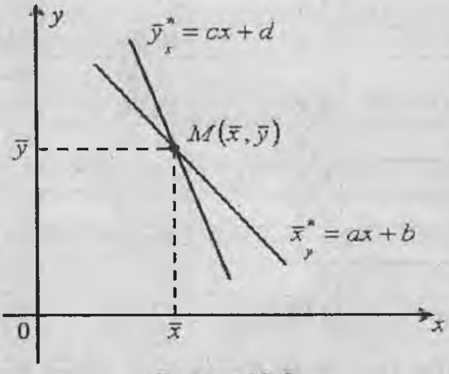
$$\overline{x}_y^* = cy + d \qquad (13.46)$$

дода мешавад, ки дар ин ҷо $c = \frac{r_{XY}\sigma_X}{\sigma_Y}$, $d = \overline{x} - c\overline{y}$ мебошад.

Бояд қайд кард, ки $\overline{y}_x^* = ax + b$ ва $\overline{x}_y^* = cy + d$ хатҳои гуногунанд.

Барои сохтани муодилаҳои регрессияи хаттӣ

1. Аз рӯи ҷадвали ибтидоӣ барои X, Y бузургиҳои $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_X, σ_Y, C_{XY}, r_{XY}-ро ҳисоб мекунем.
2. Гипотезаро оиди мавҷудияти алоқа байни X ва Y месанҷем(нобаробарии (13.44)).



Расми 13.8

3. Муодилаҳои регрессия (13.45) ва (13.46)-ро тартиб дода, графики онҳоро месозем(расми 13.8).

Мисол. Аз рӯи натиҷаҳои мушоҳида, ки дар ҷадвали зерин оварда шудааст, коэффитсиенти коррелятсия r_{xy} -ро ёфта, муодилаҳои хатҳои регрессияро тартиб диҳед ва графики онҳоро созед.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	2	2,1	2,4	2,6	2,8	2,9	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,6	5
Y	10	9,8	9,6	9,4	9,2	8	7,6	7,4	7	6,8	6,4	6,1	5,4	5,2	5

Ҳал. Барои осонии ҳисоб ҷадвали ёрирасони зеринро тартиб медиҳем:

i	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	2	10	4	100	20
2	2,1	9,8	4,41	96,04	20,58
3	2,4	9,6	5,76	92,16	23,04
4	2,6	9,4	6,76	88,34	24,44
5	2,8	9,2	7,84	84,64	25,76
6	2,9	8	8,41	64	23,2
7	3	7,6	9	57,76	22,8
8	3,2	7,4	10,24	54,76	23,68
9	3,4	7	11,56	49	23,8
10	3,6	6,8	12,96	46,24	24,48
11	3,8	6,4	14,44	40,96	24,32
12	4	6,1	16	37,21	24,4
13	4,2	5,4	17,64	29,16	22,68
14	4,6	5,2	21,16	27,04	23,92
15	5	5	25	25	25
Σ	49,6	112,9	175,18	892,31	352,1

Аз сатри охирони ин ҷадвал дида мешавад, ки

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 49{,}6; \quad \sum_{i=1}^{15} y_i = 112{,}9; \quad \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 175{,}18; \quad \sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 892{,}31; \quad \sum_{i=1}^{15} x_i y_i = 352{,}1$$

аст. Мувофиқи формулаҳои (13.42) бузургиҳои матлубро меёбем:

$$\bar{x} = \frac{49,6}{15} \approx 3,3067; \quad \bar{y} = \frac{112,9}{15} \approx 7,5267.$$

$$\sigma_x^2 = \frac{175,18}{15} - (3,3067)^2 = 11,6787 - 10,9343 = 0,7444, \ \sigma_x = \sqrt{0,7444} \approx 0,8628.$$

$$\sigma_y^2 = \frac{892,31}{15} - (7,5267)^2 = 59,4873 - 56,6512 = 2,8361, \ \sigma_y = \sqrt{2,8361} \approx 1,6841.$$

$$C_{xy} = \frac{352,1}{15} - 3,3067 \cdot 7,5267 = 23,4733 - 24,8885 = -1,4152.$$

$$r_{xy} = \frac{-1,4152}{0,8628 \cdot 1,6841} \approx \frac{-1,4152}{1,4530} \approx -0,9740.$$

Гипотезаи мавҷудияти алоқаи байни бузургиҳои тасодуфӣ, яъне шарти (13.44) -ро месанҷем:

$$|r_{xy}|\sqrt{n-1} = 0,9743 \cdot \sqrt{14} = 0,9740 \cdot 3,7417 \approx 3,6444 > 3.$$

Ин нобаробарӣ нишон медиҳад, ки алоқаи бузургиҳои тасодуфии X ва Y ба андозаи кифоя асоснок аст.

Аввал муодилаи регрессияи Y -ро нисбат ба X тартиб медиҳем:

$$\bar{y}_x^* - \bar{y} = \frac{r_{xy}\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \Rightarrow \bar{y}_x^* - 7,5267 = \frac{-0,9743 \cdot 1,6841}{0,8625}(x - 3,3067),$$

$$\bar{y}_x^* - 7,5267 = -1,9024(x - 3,3067) \Rightarrow \bar{y}_x^* - 7,5267 = -1,9024x + 6,2907,$$

$$\bar{y}_x^* = -1,9024x + 13,8174. \qquad (13.47)$$

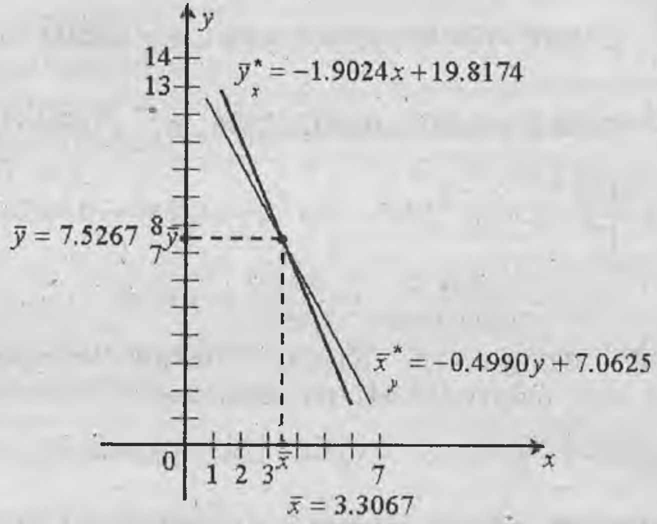
Акнун муодилаи регрессияи X -ро нисбат ба Y тартиб медиҳем:

$$\bar{x}_y^* - \bar{x} = \frac{r_{xy}\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}) \Rightarrow \bar{x}_y^* - 3,3067 = \frac{-0,9743 \cdot 0,8625}{1,6841}(y - 7,5267),$$

$$\bar{x}_y^* - 3,3067 = -0,4990(y - 7,5267) \Rightarrow \bar{x}_y^* - 3,3067 = -0,4990y + 3,7558,$$

$$\overline{x}^{*}_{y} = -0{,}4990y + 7{,}0625 . \qquad (13.48)$$

Дар ҳамвории координатӣ хатҳои рости (13.47), (13.48) – ро месозем (расми 13.9):



Расми 13.9

§ 6. МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА

1. **Коррелятсияи хаттӣ.** Дар масъалаҳои 1-2 бо бузургии тасодуфии дученакаи (X, Y) n санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар намуди ҷадвали зерин оварда шудааст. Ҷадвали коррелятсиониро сохта, муодилаҳои регрессия Y аз X ва X аз Y ёфта шавад.

1.

X \ Y	-312,5	-295,5	-278,5	-261,5	-244,5	-227,5	-210,5
55,5	–	–	–	–	–	1	4
60,5	–	–	–	–	4	5	–
65,5	–	–	–	9	11	–	–
70,5	–	–	24	9	–	–	–

75,5	–	7	1	–	–	–	–
80,5	3	–	–	–	–	–	–

2.

$X \backslash Y$	437	471	505	539	573	607	641
55,5	4	1					
60,5		8	1				
65,5			16	4			
70,5				21	12		
75,5					6	2	
80,5						1	2

2. Коррелятсияи ғайрихаттӣ. Дар масъалаҳои 3-4 бо бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y), n санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар намуди ҷадвали зерин оварда шудааст. Ҷадвали коррелятсиониро сохта, муодилаи регрессия Y аз X ёфта шавад.

3.

$X \backslash Y$	-3,4	0,4	0,8	3,2	4,8
-2					1
-1		1			
0	1				
1			1		
2				1	

Ҷавоб: $\overline{y}^* = -1,93 - 0,28x + 1,54x^2$

4.

$X \backslash Y$	3,25	3,50	5,25	8
2				1
4	–		1	
6		1		
12	1	—	—	—

Ҷавоб: $\overline{y}^* = 2 + 12/x$.

БОБИ XIV. МИСОЛ ВА МАСЪАЛАҲО

БОБИ I

1.1. Дар қисми ҳарбии мудофиаи зиддиҳавоӣ бо воситаи радиолокатсионӣ ҳадафи ҳавоӣ муайян карда мешавад. Натиҷаи санҷиш мавқеи ҳадаф (инъикоси импулс аз ҳадаф) дар экран мебошад. Экран шакли доираи радиусаш ба 10 см баробар ва марказаш ба ибтидои системаи координатии росткунҷаи декартӣ ҳамҷояро дорад. Ҳодисаҳои

A={ Ҳадаф дар чоряки якуми экран ҷойгир аст };

B={ Ҳадаф дар дохили доираи радиусаш 5 ва марказаш бо маркази экран ҳамҷоя ҷойгир аст };

C={ Ҳадаф дар дохили доираи радиусаш 2,5 см ва марказаш дар нуқтаи аз ибтидои координата ба 5 см ба самти манфии тири OX лағжонидашуда ҷойгир аст }. Оё ҳодисаҳои A ва B, A ва C ҳамҷояаанд?

1.2. Бо воситаи техникии махсус самт φ ва суръати ϑ шамол муайян карда мешавад. Маълум, ки воситаи техникӣ суръати шамолро аник муайян намуда, самти онро бо саҳеҳии 2^0 муайян карда метавонад. Оё ҳодисаҳои

$A=\{(\vartheta, \varphi)\,|\,\vartheta < 12$ км/с, $\varphi = 343^0\,35^1\}$,

$B=\{(\vartheta, \varphi)\,|\,\vartheta=15,5$ км/с, $340^0 \le \varphi < 350^0\}$,

$C=\{(\vartheta, \varphi)\,|\,\vartheta \ge 3,25$км/с, $48^0 \le \varphi \le 51^0\}$-ро мушоҳида намудан мумкин аст?

1.3. Дар қутти 4 кураи сафед ва 6 кураи сиёҳ мавҷуд аст. Бо чанд тарзҳои гуногун аз ин қуттӣ 2 кураи сафед ва 3 кураи сиёҳ гирифтан мумкин аст.

1.4. Бо чанд тарзҳои гуногун аз байни 6 нафар номзадҳо раиси корхона ва ҷонишини ӯро интихоб намудан мумкин аст.

1.5. Аз рақамҳои 1,2,3,4 чанд-то адади дурақама тартиб додан мумкин аст.

1.6. Дар гурӯҳ 30 донишҷӯй таҳсил менамоянд, ки 18 нафарашон писарҳо буда, 12 нафарашон духтарҳо мебошанд. Ба назди тахтаи синф ду нафар даъват мешаванд. Эҳтимолияти он, ки ҳардуи онҳо писарҳоянд, ёфта шавад.

1.7. Ададҳои 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9-ро дар қогазҳои чоркунҷаи якхела навишта, онҳоро омехта менамоянд ва ихтиёрӣ паси ҳам се қоғазро мегиранд. Эҳтимолияти он, ки адади аз ин се рақам тартибёфта аз 987 калон аст ёфта шавад.

1.8. Донишҷӯ аз 40 билети дар имтиҳон пешниҳодшаванда 36 тояшро тайёр намуд. Дар имтиҳон донишҷӯ тасодуфан 1 билетро мегирад. Эҳтимолияти онро, ки билети тайёрнокардаи донишҷӯ мебарояд, муайян кунед.

1.9. Асбоби зарурӣ аз 4 қисми якхела сохта мешавад. Барои сохтани чунин асбоб 10-то қисмҳои якхела оварданд, ки 6-тояш сифатнок мебошад. Аз байни қисмҳои овардашуда тасодуфан 5-тояшро гирифта (якто иловагӣ) асбобро сохтанӣ шуданд. Эҳтимолияти сохта шудани асбобро муайян кунед.

1.10. Шахсе пеш аз тираж, як билети спортлотои «6 аз 45»-ро пур намуд. Эҳтимолияти он, ки ин шахс R рақамро дуруст муайян намудааст ёфта шавад(R=5, 6).

1.11. Дар қуттӣ 20 дона себ, 30 дона нок ва 40 дона шафтолу мавҷуд аст. Аз қуттӣ ба таври ихтиёрӣ як дона мева гирифта шуд. Эҳтимолияти онро ёбед, ки он себ намебошад.

1.12. Дар қуттӣ 100 дона тухм мавҷуд аст, ки 5 донааш сифати паст дорад. Тасодуфан як дона тухм гирифта мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки тухми интихобшуда пастсифат аст.

1.13. Муштарӣ ду рақами охирони телефонро фаромӯш кардааст ва медонад, ки онҳо гуногун мебошанд. Ӯ ин рақамҳоро тасодуфан мегирад. Эҳтимолияти дуруст гирифта шудани рақами телефонро ёбед.

1.14. Дар зарфи 10л об дошта расо якто микроби касалиовар афтодааст. Аз ин сатил як пиёла об гирифтанд. Эҳтимолияти ба ин пиёла афтодани микробро ёбед (ҳаҷми як пиёла об 200см^3).

1.15. Дар анбори мағоза 12 дона маҳсулотҳои якхела мавҷуд аст, ки 4-тояш дар фабрикаи №1, 5-тояш дар фабрикаи №2 ва 3-тояш дар фабрикаи №3 истеҳсол шудааст. Фурӯшанда аз анбор тасодуфан 2 дона маҳсулотро гирифта, ба харидор пешниҳод менамояд. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳарду маҳсулоти пешниҳодшуда дар фабрикаи №2 истеҳсол шудаанд.

1.16. Дар ҳамвори тӯри квадратҳои тарафаш 8см кашида шудааст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки доираи партофташудаи радиусаш 1см ягон тарафи квадратро намебурад.

1.17. Дар дохили эллипси $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ давраи $x^2+y^2=4$ ҷойгир аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки нуқтаи ба эллипс партофташуда ба ҳалқаи байни эллипс ва доира меафтад.

1.18. Аз дохили давраи радиусаш 5 ба таври ихтиёрӣ як нуқта интихоб карда шудааст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ин нуқта аз марказ дар масофаи на зиёдтар аз 1,5 воҳид ҷойгир мешавад.

1.19. Дар натиҷаи чандин санҷиш маълум карданд, ки аз 300 ниҳоли шинонандашуда 260-тояш месабзад. Эҳтимолияти сабзидани ниҳолро ёбед. Агар 2000 ниҳол нишонда шавад, пас чандтояш месабзад?

1.20. Дар натиҷаи чандин мусобиқаҳои спортӣ маълум гашт, ки аз 300 тири холикардашуда 288 -тояш ба нишон мерасад. Эҳтимолияти расидан ба нишонро ёбед. Аз 500 тир чандтояш ба нишон мерасад?

БОБИ II

2.1. Ду мӯҳраи бозӣ (шашхол) партофта мешавад. Этимолияти руй додани ҳодисаҳои зеринро ҳисоб кунед:

A={ Дар ҳарду мӯҳра холҳои ҷуфт пайдо мешавад };

B={ Дар як мӯҳра холи тоқ ва дар мӯҳраи дигар холи ҷуфт пайдо мешавад };

C={ Суммаи холҳои дар ҳарду мӯҳра пайдошуда тоқ мешавад }.

2.2. Дар як қуттӣ 5 кураи сафед ва 8 кураи сиёҳ бурда, дар қуттии дигар 7 кураи сафед ва 5 кураи сиёҳ ҳаст. Тасодуфан аз қуттии якум 4 кура ва аз қуттии дуюм 3 кура гирифта мешавад. Эҳтимолияти руй додани ҳодисаҳои зеринро ҳисоб кунед:

A={ Ҳамаи кураҳои гирифташуда сафед мебошанд };

B={ Танҳо се кураи сафед мебарояд };

C ={ Ақаллан як кураи сафед мебарояд }.

2.3. Дар қуттӣ 11 биленти лотарея ҳаст, ки 6- тояш бурднок мебошад. Аз қуттӣ тасодуфан 4 билет гирифта мешавад. Эҳтимолиятҳои руй додани ҳодисаҳои зеринро ёбед:

а) дар байни билетҳои гирифташуда танҳо 1 билети бурднок ҳаст ;

б) дар байни билетҳои гирифташуда акаллан 1 билети бурднок ҳаст

2.4. Эҳтимолияти дар давоми рӯзи корӣ вайрон нашудани як дастгоҳ ба 0,9 баробар аст. Эҳтимолияти дар давоми рӯзи корӣ вайрон нашудани ду дастгоҳро ҳисоб кунед

2.5. Дар қуттӣ 20 дона кура мавҷуд аст, ки аз онҳо 12 донааш сафед ва 8 донааш сиёҳ мебошад. Пайи ҳам аз қуттӣ ду дона кура гирифта мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки кураи дуюм сафед аст.

2.6. Дар қуттӣ 3 кураи сафед ва 3 кураи сиёҳ мавҷуд аст. Аз қуттӣ ду маротиба яктогӣ кура мегиранд ва онҳоро барнамегардонанд. Эҳтимолияти пайдошавии кураи сафедро ҳангоми санҷиши дуюм ёбед, агар ҳангоми санҷиши якум кураи сиёҳ гирифта шуда бошад.

2.7. Як даста қартаи бозӣ 36 дона дорад. Аз он бо навбат ихтиёрӣ ду қарта гирифта мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки дуюм маротиба шоҳ гирифта мешавад, агар бори аввал шоҳ гирифта шуда бошад .

2.8. Дар қуттӣ 2 кураи сафед ва 3 кураи сиёҳ мавҷуд аст. Аз қуттӣ паси ҳам ду кура гирифта мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳардуи онҳо сафед мебошанд.

2.9. Эҳтимолияти он, ки аз дастаи 36 карта дошта паси ҳам ду шоҳ гирифта мешавад ба чанд баробар аст?

2.10. Ду шахсе ба нишон тир холӣ мекунанд. Эҳтимолияти банишонрасии ҳар як тир барои шахси якум ва дуюм мувофиқан ба 0,8 ва 0,7 баробаранд. Эҳтимолияти дар як вақт ба нишон расидани тири ҳарду шахсро ёбед.

2.11. Дар ду қуттӣ деталҳо мавҷуданд. Эҳтимолияти стандартӣ будани детали қуттии якум ба 0,8 ва дуюм 0,9 баробар аст. Эҳтимолияти онро, ки детали ихтиёрии аз қуттии дилхоҳ гирифташуда стандартӣ аст, ёбед.

2.12. Назоратчӣ 50 дона маҳсулотҳои истехсолшударо санчида, дар байни онхо 6 дона маҳсулоти нуксондорро муайян намуд. Аз ин маҳсулотҳои истехсолшуда тасодуфан 2 дона маҳсулот гирифта мешавад. Эҳтимолияти онро, ки ҳарду маҳсулоти гирифташуда нуқсондор мебарояд, муайян кунед.

2.13. Чор корхона новобаста аз якдигар кор мекунанд. Эҳтимолияти нақшаро барзиёд иҷро намудани ҳар як корхона ба 0,9 баробар аст. Эҳтимолиятҳои рӯй додани ҳодисаҳои зеринро муайян кунед:

а) Ду корхона нақшаро барзиёд иҷро менамоянд;

б) Танхо корхонаҳои якум ва дуюм нақшаро барзиёд ичро менамоянд;

в) Зиёда аз ду корхона нақшаро барзиёд ичро менамоянд.

2.14. Дар қуттӣ 100 дона маҳсулоти навъи якум ва 10 дона маҳсулоти навъи дуюм мавчуд аст. Аз қуттӣ тасодуфан пай дар пай, яктогӣ 3 маротиба маҳсулот гирифта мешавад. Маҳсулотҳои гирифташуда ба қуттӣ баргардонида намешаванд. Эҳтимолиятҳои рӯй додани ҳодисаҳои зеринро муайян кунед:

а) ҳамаи маҳсулотҳои гирифташуда навъи якум мебошанд;

б) дар байни маҳсулотҳои гирифташуда ақаллан як маҳсулоти навъи якум мавчуд аст.

2.15. Дар қуттӣ 20 кураи сафед ва 10 кураи сиёҳ мавчуд аст. Пасиҳам 4 кура гирифта шуд (ҳар як кураи гирифташуда пеш аз гирифтани кураи дигар ба қуттӣ баргардондашуда кураҳо омехта мешаванд). Эҳтимолияти он, ки дар байни 4 кураи гирифташуда ду кураи сафед мавчуд аст ёбед.

2.16. Ду шахс ба як нишон тир холӣ мекунанд. Эҳтимолияти ба нишонрасии шахси якум 0,85 ва шахси дуюм 0,95 аст. Эҳтимолияти ба нишон расидани ақалан яке аз онҳоро ёбед.

2.17. Дар байни 50 дона махсулотҳои истехсолшудаи завод 10 дона маҳсулоти нуксондор ҳаст. Аз ин маҳсулотҳо тасодуфан 3 дона гирифта мешавад. Эхтимолияти онро ёбед, ки дар байни махсулотҳои гирифташуда акаллан як маҳсулоти бенуқсон ҳаст.

2.18. Ҳангоми ба нишон тир холӣ кардан эҳтимолияти соҳиби 10 хол шудан ба 0,3 ва 9 хол шудан ба 0,4 баробар аст. Эҳтимолияти он, ки ҳангоми як маротиба тир холӣ кардан соҳиби на камтар аз 9 хол мешаванд, ба чанд баробар аст?

2.19. Дар ҳар яке аз ду қуттиҳо 20-тогӣ кураҳои сурх ва 9-тогӣ кураҳои сафед мавчуданд. Аз қуттии якум тасодуфан 1 кура гирифта ба қуттии дуюм гузошта мешавад. Пас аз ин аз қуттии дуюм тасодуфан 1 кура гирифта мешавад. Эҳтимолияти онро, ки кураи сафед мебарояд, муайян кунед.

2.20. Дар қуттии якум 20 лампаи радио мавҷуданд, ки 18 тои он стандартӣ аст. Дар қуттии дуюм бошад 10 лампаи радио мавҷуд аст, ки 9 тояш стандартӣ аст. Аз қуттии дуюм ихтиёран як лампаро гирифта ба қуттии якум гузоштанд. Эҳтимолияти онро ёбед, ки лампаи ихтиёрии аз қуттии якум гирифташуда стандартӣ аст.

БОБИ III

3.1. Эҳтимолияти рӯйдиҳии ҳодисаи A ба 0,7 баробар аст. Чанд маротиба озмоиш гузаронидан лозим аст, ки адади эҳтимолноктарини рӯйдиҳии ҳодиса ба 30 баробар шавад?

3.2. Барои вайрон шудани объект зарур аст, ки 3 снаряд ба нишон расад. Агар эҳтимолияти расидан ба нишон барои ҳар як снаряд ба 0.7. баробар бошад, пас шумораи эҳтимолноктарини снарядҳоро, ки барои вайрон кардани объект зарур аст, ёбед.

3.3. Назоратчӣ маҳсулотҳои истеҳсолшудаистодаро новобаста аз якдигар, бо эҳтимолияти 0,8 месанҷад. Эҳтимолияти он, ки аз 100 маҳсулоти истеҳсолшуда 81-тояш санҷида мешавад, тақрибан муайян карда шавад.

3.4. Шаш тир холӣ карда шудааст. Эҳтимолияти расидани ҳар як тир ба нишон, ба 0,6 баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки 4 тир ба нишон мерасад.

3.5. Як дона шашхол 8 маротиба партофта мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ду маротиба 6 холӣ пайдо мешавад.

3.6. Эҳтимолияти ба нишон расидан дар ҳар як тирпарронӣ ба 0,8 баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳангоми 100 тирпарронӣ расо 75 маротиба тир ба нишон мерасад.

3.7. Эҳтимолияти ба нишон расидани тири тирандоз ба 0,8 баробар аст. Эҳтимолияти ба нишон расидани ақаллан як тирро, ҳангоми 6 тирпарронӣ ёбед.

3.8. Ба нишон 7 тир холӣ карда мешавад. Эҳтимолияти ба нишон расидани ҳар як тир ба 0,2 баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки шумораи тирҳои ба нишон расида, на камтар аз 2 ва на зиёдтар аз 4 мешавад.

Дар масъалахои **3**.9-**3**.12 дар ҳар яке аз n санҷишҳои новобаста ҳодисаи A бо эҳтимолияти доимии р рӯй медиҳад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳодисаи A дар ин санҷишҳо:

а) расо k маротиба; б) камтар аз m ва зиёда аз l маротиба;

г) камтар аз h маротиба рӯй медиҳад.

3.9. n=500; p=0,40; k=220; m=240; l=210; h= 235.

3.10. n=520; p=0,45; k=240; m=260; l=230; h= 255.

3.11. n=540; p=0,50; k=260; m=280; l=250; h= 275.

3.12. n=560; p=0,55; k=280; m=300; l=270; h= 300.

Дар масъалаҳои **3.13-3.16** дар стансияи телефонӣ нодуруст пайвастшавии хатҳои телефон бо эҳтимолияти p ба амал меояд. Эҳтимолияти онро ёбед, ки дар байни n пайвасткуниҳо:

а) расо k нодуруст пайвастшавӣ;

б) камтар аз m нодуруст пайвастшавӣ ҷой дорад.

3.13. n=300; p=0,02; k=2; m=3. **3**.14. n=400; p=0,02; k=3; m=4.

3.15. n=500; p=0,01; k=4; m=5. **3**.16. n=600; p=0,01; k=2; m=3.

Дар масъалаҳои **3**.17-**3**.20 дар ҳар яке аз n санҷишҳои новобаста ҳодисаи A бо эҳтимолияти доимии p рӯй медиҳад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки қимати мутлақи фарқи зуддии нисбии рӯйдиҳии ин ҳодиса k/n аз эҳтимолияти р камтар аз $\varepsilon_1 > 0$ ($\varepsilon_2 > 0$) мешавад.

3.17. n=600; p=0,85; ε_1=0,0045; $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$.

3.18. $n=700$; $p=0,75$; $\varepsilon_1=0,0055$; $\varepsilon_2=2\varepsilon_1$.

3.19. $n=800$; $p=0,65$; $\varepsilon_1=0,0065$; $\varepsilon_2=2\varepsilon_1$.

3.20. $n=900$; $p=0,55$; $\varepsilon_1=0,0075$; $\varepsilon_2=2\varepsilon_1$.

БОБИ IV

Дар масъалахои 4.1-4.4 ҷадвали тақсимоти бузургии тасодуфии X дода шудааст:

4.1.

x_i	0	1	2	3	4	6
p_i	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1

4.2.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

4.3.

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4

4.4.

X	-0,1	0	0,1	0,4
p	0,3	0,15	0,3	0,25

а) Интизорияти математикӣ, дисперсия ва ва тамоили миёнаи квадратии онро ёбед;

б) Функсияи тақсимоти ин бузургии тасодуфӣ $F(x)$ -ро сохта, графикашро кашед.

Дар масъалаҳои 4.5- 4.12 функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии X дода шудааст. Ёфта шавад:

а) эҳтимолияти аз порчаи $[x_1, x_2]$ қимат қабул кардани X;

б) функсияи зичии тақсимоти X;

в) интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратии X;

г) графики функсияи тақсимот ва зичии тақсимот.

4.5. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x \le -1 \text{ бошад;} \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{4}, \text{ агар } -1 < x \le 3 \text{ бошад;}, \\ 1, \text{ агар } x > 3 \text{ бошад.} \end{cases}$ $x_1 = 0;\ x_2 = 2.$

4.6. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x < 1 \text{ бошад;} \\ \frac{x-1}{4}, \text{ агар } 1 \le x \le 5 \text{ бошад;} \\ 1, \text{ агар } x > 5 \text{ бошад.} \end{cases}$ $x_1 = 2;\ x_2 = 4.$

4.7. $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi} arctgx$, агар $-\infty < x < +\infty$ бошад. $x_1 = 0;\ x_2 = 1.$

4.8. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x \le -1 \text{ бошад;} \\ \frac{x}{3}+\frac{1}{3}, \text{ агар } -1 < x \le 2 \text{ бошад;} \\ 1, \text{ агар } x > 2 \text{ бошад.} \end{cases}$ $x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 1{,}5.$

4.9. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x \le 2 \text{ бошад;} \\ \frac{x}{2}-1, \text{ агар } 2 < x \le 4 \text{ бошад;} \\ 1, \text{ агар } x > 4 \text{ бошад.} \end{cases}$ $x_1 = 2{,}5;\ x_2 = 3{,}5.$

4.10. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x \le 0 \text{ бошад;} \\ \sin x, \text{ агар } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \text{ бошад;} \\ 1, \text{ агар } x > \frac{\pi}{2} \text{ бошад.} \end{cases}$ $x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = \frac{\pi}{3}.$

4.11. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x < 2 \text{ бошад;} \\ 1-\frac{8}{x^3}, \text{ агар } x \ge 2 \text{ бошад.} \end{cases}$ $x_1 = 2{,}5;\ x_2 = 3{,}5.$

4.12. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x < 0 \text{ бошад;} \\ \frac{x^2}{4}, \text{ агар } 0 \le x \le 2 \text{ бошад;} \\ 1, \text{ агар } x > 2 \text{ бошад.} \end{cases}$ $x_1 = 1;\ x_2 = 1{,}5.$

Дар масъалаҳои 4.13-4.20 функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии X дода шудааст. Ёфта шавад:
а) эҳтимолияти аз порчаи $[x_1, x_2]$ қимат қабул кардани X;
б) функсияи тақсимоти X;
в) интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратии X;
г) графики функсияи тақсимот ва зичии тақсимот.

4.13. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x \le 0 \text{ ва } x > \pi \text{ бошад;} \\ \frac{1}{2}\sin x, \text{ агар } 0 < x \le \pi \text{ бошад;}. \end{cases}$ $\quad x_1 = \frac{\pi}{4}; \ x_2 = \frac{\pi}{3}$.

4.14. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x < 0 \text{ бошад;} \\ \frac{x}{2}, \text{ агар } 0 \le x \le 2 \text{ бошад;} \\ 0, \text{ агар } x > 2 \text{ бошад.} \end{cases}$ $\quad x_1 = 0{,}5; \ x_2 = 1{,}5$.

4.15. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x < 0 \text{ бошад;} \\ 0{,}5(x^2 - x), \text{ агар } 0 \le x \le 4 \text{ бошад;} \\ 0, \text{ агар } x > 4 \text{ бошад.} \end{cases}$ $\quad x_1 = 1; \ x_2 = 3$.

4.16. $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, агар $-\infty < x < +\infty$ бошад. $\quad x_1 = 0; \ x_2 = 4$.

4.17. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x < -\frac{\pi}{2} \text{ бошад;} \\ 0{,}5\cos x, \text{ агар } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ бошад;} \\ 0, \text{ агар } x > \frac{\pi}{2} \text{ бошад.} \end{cases}$ $\quad x_1 = 0; \ x_2 = \frac{\pi}{4}$.

4.18. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x \le 0 \text{ бошад;} \\ \cos x, \text{ агар } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \text{ бошад;} \\ 0, \text{ агар } x > \frac{\pi}{2} \text{ бошад.} \end{cases}$ $\quad x_1 = \frac{\pi}{6}; \ x_2 = \frac{\pi}{3}$.

4.19. $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \text{ агар } |x|<1 \text{ бошад}; \\ 0, \text{ агар } |x|\geq 1 \text{ бошад}. \end{cases}$ $x_1=-0{,}5;\ x_2=0{,}5$.

4.20. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \text{ агар} |x|<1 \text{ бошад}; \\ 0, \text{ агар} |x|\geq 1 \text{ бошад}. \end{cases}$ $x_1=-0{,}75;\ x_2=0{,}75$

БОБИ V

5.1. Дар гурӯҳи аз 6 асбобҳои якхела иборатбуда 4 асбоби бенуқсон мавҷуд аст. Аз ин гурӯҳ тасодуфан 3 асбоб гирифта мешавад. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дискретии X - шумораи асбобҳои бенуқсон дар байни асбобҳои гирифташударо тартиб диҳед.

5.2.Се тирандоз ба як нишон яктогӣ тир холӣ мекунанд. Эҳтимолиятҳои ба нишон расидани тири тирандози якум, дуюм ва сеюм мувофиқан ба 0,5; 0,6 ва 0,4 баробар аст. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дискретии X - шумораи тирҳои ба нишон расидаро тартиб диҳед.

5.3. Интизорияти математикӣ, дисперсия ва тамоили миёнаи квадратии бузургии тасодуфии бо қонуни биномиалӣ тақсимшударо ёбед, агар

1) $n=600,\ p=0{,}4$; 2) $n=50,\ q=0{,}2$ бошад.

5.4. Эҳтимолияти он ки тирандоз, ҳангоми як маротиба тир холӣ намудан, ба нишон мерасад ба 0,8 баробар аст. Ба тирандоз то хато рафтани тираш тир дода мешавад. Талаб карда мешавад: а) қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дискретии X -шумораи тирҳои ба тирандоз додашуда тартиб дода шавад; б) адади эҳтимолноктарини шумораи тирҳои ба тирандоз додашуда муайян карда шавад.

5.5. Санҷишҳои пай дар паи новобастаи эътимоднокии панҷ асбобҳо гузаронида мешаванд. Эҳтимолияти эътимоднок баромадани ҳар як асбоб ба 0,8 баробар аст. Асбоби навбатӣ танҳо дар он ҳолате санҷида мешавад, ки агар асбоби аз он пеш санҷидашуда эътимоднок баромада бошад. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии дискретии x -шумораи асбобҳои санҷидашударо тартиб диҳед.

5.6. Қимати миёнаи шумораи дархостҳо, ки дар як дақиқа ба СТШ(стансияи телефонии шаҳрӣ) дохил мешаванд расо ба 120 баробар аст. Эҳтимолияти рӯй додани ҳодисаҳои зеринро ёбед: А = ҳдар давоми ду сония ба СТШ ягон дархост дохил намешавад}, В =ҳдар давоми ду сония ба СТШ камтар аз 2 дархост дохил мешавад}.

5.7. Шумораи ҳиссачаҳои элементарӣ, ки аз тарафи асбоби бақайдгирӣ муайян карда мешавад бузургии тасодуфӣ буда, қонуни тақсимоти Пуассонро бо қимати миёнаи n ҳиссача дорад. Ҳар як ҳиссачаи бақайдгирифташаванда метавонад бо эҳтимолияти p заряднок ва бо эҳтимолияти $1-p$ безаряд бошад. Қонуни тақсимоти шумораи ҳиссачаҳои заряднокро муайян намуда, қимати миёна ва дисперсияи ин тақсимотро ёбед.

5.8. Қимати миёнаи дархостҳо ба таксӣ, ки ба пункти диспетчерӣ дар давоми як дақиқа дохил мешаванд расо ба се баробар аст. Эҳтимолияти онро, ки дар давоми 2 дақиқа: а) 4 дархост; б) камтар аз 4 дархост; в) на камтар аз 4 дархост дохил мешаванд ёфта шавад.

5.9. Эҳтимолияти ба самолёт расидани тири аз милтиқ парронидашуда ба 0,001 баробар аст. Аз милтиқ ба сӯи самолёт 3000 тир холӣ карда мешавад. Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии X- шумораи он тирҳоеро, ки ба самолёт мерасад, муайян кунед.

5.10. Панҷ калиди гуногун мавҷуданд, ки танҳо бо яке аз онҳо қулфи лозимиро кушодан мумкин аст. Бузургии тасодуфии x ин шумораи калидҳои санҷидашуда ҳангоми кушодани қулф аст. Қонуни тақсимоти X тартиб дода шавад, агар маълум бошад, ки калиди санҷидашуда дар санҷишҳои оянда и кушодани қулф: а) иштирок накунад; б) иштирок кунад.

5.11. Бузургии тасодуфии X бо ҷадвали тақсимоти зерин дода шудааст:

X	-2	0	1	3
P	0,1	0,5	0,3	0,1

Қонунҳои тақсимоти бузургиҳои тасодуфии X^2 ва $3X$ - ро тартиб дода, интизорияти математикӣ ва дисперсияи онҳоро ҳисоб кунед.

5.12. Қонунҳои тақсимоти бузургиҳои тасодуфии новобастаи X ва $У$ дода шудаанд:

X	2	4	6	8
P	0,4	0,2	0,1	0,3

$У$	0	1	2
P	0,5	0,25	0,25

Қонуни тақсимоти фарқи онҳоро тартиб дода иҷрошавии хосиятҳои интизорияти математикӣ: $M(X-У)=M(X)-M(Y)$ ва дисперсия: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$- ро санҷед.

5.13.Қонуни тақсимоти бузургии тасодуфии X- шумораи пойафзоли нуқсондори гирифташударо тартиб диҳед, интизорияти математикӣ ва тамоили миёнаи квадратии бузургии тасодуфии $2X+3$-ро ҳисоб кунед, агар аз гурӯҳи пойафзолҳое, ки 2 фоизашон нуқсондор аст 3 ҷуфт пойафзол гирифта шуда бошанд.

5.14. Бузургии тасодуфии дискретии X танҳо се қиматҳои имконпазир дорад: $x_1=1$, x_2 ва x_3, ки $x_1<x_2<x_3$ аст. Эҳтимолиятҳои он, ки X қиматҳои x_1 ва x_2-ро қабул менамояд мувофиқан ба 0,3 ва 0,2 баробаранд. Қонуни тақсимоти X-ро ёбед, агар маълум бошад, ки $M(X)=2,2$ ва $D(X)=0,76$ аст.

5.15. Қиматҳои имконпазири бузургии тасодуфии $X: x_1=1, x_2=2, x_3=3$ маълум буда, $M(X)=2,3$ ва $M(X^2)=5,9$ аст. Қонуни тақсимоти X -ро ёбед.

5.16. Дар порчаи $[a,b]$ тасодуфан ягон нуқта қайд карда мешавад. Эҳтимолияти он, ки ин нуқта дар нимаи рости порча ҷойгир мешавад, ёфта шавад.

5.17. Бигузор бузургии тасодуфии X бо қонуни нормалии параметрҳояш $a=30$ ва $\sigma=5$ тақсим шуда бошад. Эҳтимолияти он, ки $|X-30|<4$ аст, ёфта шавад.

5.18. Эҳтимолияти онро ёбед, ки бузургии тасодуфии қонуни тақсимоташ нормалӣ бо параметрҳои $a=M(X)=8$ ва $\sigma=2$ аз интервали $(-2,10)$ қимат қабул мекунад.

5.19. Бузургии тасодуфии X бо қонуни тақсимоти зерин дода шудааст:

X	2	3	5
P	0,1	0,4	0,5

Моментҳои ибтидоии тартиби якум, дуюм ва сеюми ин бузургии тасодуфиро ёбед.

5.20. Бузургии тасодуфии дискретии X бо қонуни тақсимоти зерин дода шудааст:

X	3	5
P	0,2	0,8

Моментҳои ибтидоӣ ва марказии тартиби якум, дуюм, сеюм ва чоруми ин бузургии тасодуфиро ёбед.

5.21. Бузургии тасодуфии дискретии X бо қонуни тақсимоти зерин дода шудааст:

X	2	4	6	8
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Моментҳои ибтидоӣ ва марказии то тартиби чорумро ёбед.

5.22. Бузургии тасодуфии дискретии x бо қонуни тақсимоти зерин дода шудааст:

X	0	2	4
P	0,3	0,5	0,2

Моментҳои ибтидоӣ ва марказии то тартиби чорумро ёбед. Дурустии баробарии $\mu_3=\nu_3-3\nu_1\cdot\nu_2+2\nu_1^3$ - ро санҷед.

5.23. Бузургии тасодуфии дискретии X бо қонуни тақсимоти зерин дода шудааст:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Моментҳои ибтидоӣ ва марказии то тартиби чорумро ёбед. Дурустии баробарии $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3 \cdot \nu_1 + 6\nu_1^2 \nu_2 - 3\nu_1^4$ - ро санҷед.

БОБИ VI

6.1. Бузургии тасодуфии дискретии X бо қонуни тақсимоти зерин дода шудааст:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Нобаробарии Чебишевро истифода бурда, ба эҳтимолияти иҷро шудани нобаробарии $|X - M(X)| < \sqrt{0,4}$ баҳо диҳед.

6.2. Дар шабакаи барқӣ бо тарзи параллелӣ 20 чароғ пайваст карда шудааст. Эҳтимолияти он, ки дар муддати вақти T, чароғ фурӯзон меистад ба 0,8 баробар аст. Нобаробарии Чебишевро истифода намуда, ба эҳтимолияти он, ки қимати мутлақи фарқи байни шумораи чароғҳои фурӯзон ва қимати миёнаи он дар муддати вақти T: а) аз се кам; б) на камтар аз се мешавад, баҳо диҳед.

6.3. Қимати миёнаи вазни маҳсулот ба 50 г. баробар аст. Бо ёрии нобаробарии Чебишев ба эҳтимолияти он, ки вазни маҳсулоти тасодуфан гирифташуда аз 90 г. кам мешавад, аз поён баҳо диҳед.

6.4. Қимати миёнаи суръати шамол дар як минтақаи муайяни замин ба 20м/с, баробар аст. Бо ёрии нобаробарии Чебищев ба эҳтимолияти он, ки дар як мушоҳидаи тасодуфии дар ин минтақа гузаронидашуда, суръати шамол аз 80м/с хурд мебарояд, аз поён баҳо диҳед.

6.5. Шумораи рӯзҳои офтобӣ, дар давоми сол, дар як минтақаи муайян бузургии тасодуфӣ буда, интизорияти математикиаш ба 75 баробар аст. Бо ёрии нобаробарии Чебишев ба эҳтимолияти он, ки дар соли оянда, дар ин минтақа, шумораи рӯзҳои офтобӣ аз 150 кам мешавад, аз поён баҳо диҳед.

6.6. Қимати миёнаи суръати аввалаи снаряд ба 500 м/с баробар аст. Бо ёрии нобаробарии Чебишев ба эҳтимолияти он, ки ҳангоми парронидани снаряди навбатӣ суръати аввалаи он аз 800 м/с кам намешавад, аз боло баҳо диҳед.

6.7. Қимати миёнаи ҳарорат дар дохили хона ба 20^0C ва тамоили миёнаи квадратии он ба 2^0C баробаранд. Ба эҳтимолияти он, ки қимати мутлақи фарқи ҳарорати хона ва қимати миёнаи он аз 4^0C кам мешавад, аз поён баҳо диҳед.

6. 8. Эҳтимолияти таваллуд шудани духтар тақрибан ба 0,485 баробар аст. Ба эҳтимолияти он, ки қимати мутлақи фарқи шумораи духтарони дар байни 3000 навтаваллудшудагон буда, аз интизорияти математикиаш аз 55 кам мешавад, аз поён баҳо диҳед.

6. 9. Эҳтимолияти аз конвейер баромадани маҳсулоти аълосифат ба 0,6 баробар аст. Ба эҳтимолияти он, ки дар байни 600 маҳсулоти аз конвейер баромада аз 340 то 380 маҳсулоти аълосифат мавҷуд аст, баҳо диҳед. Баҳодиҳиро бо истифодабарии: а) Нобаробарии Чебишев; б) Формулаи интегралии Муавр -Лаплас иҷро намоед.

6.10. Танга 200 маротиба партофта мешавад. Нобаробарии Чебишевро истифода намуда, эҳтимолияти онро, ки фарқи зуддии нисбии пайдошавии рӯяи гербдори танга аз $\frac{1}{2}$ на зиёда аз 0,1 мешавад, ёбед. Ин эҳтимолиятро инчунин бо истифодабарии формулаи интегралии Муавр - Лаплас ёфта, бо эҳтимолияти ҳисобкардашуда муқоиса кунед.

6. 11. Қимати миёнаи харҷи шабонарӯзонаи энергияи барқӣ дар маҳали муайян ба 4000 квт/соат баробар аст. Ба эҳтимолияти он, ки дар шабонарӯзи оянда хароҷоти энергия дар ин маҳал аз 10000 квт/соат зиёд намешавад, баҳо диҳед.

6. 12. Эҳтимолияти ба поезд дер мондани мусофир ба 0,007 баробар аст. Ба эҳтимолияти он, ки аз 20000 мусофир аз 100 то 180- тои онҳо ба қатора дер мемонанд, баҳо дода шавад.

6. 13. Эҳтимолияти он, ки ба харидор пойафзоли андозаи 42-юм зарур аст, ба 0,25 баробар аст. Ба эҳтимолияти он, ки қимати мутлақи фарқи ҳиссаи харидорони пойафзоли андозаи 42-юм ва эҳтимолияти 0,25 аз 0,06 зиёд намешавад, баҳо дода шавад агар маълум бошад, ки 2500 харидор меояд.

6. 14. Миқдори обе, ки барои корҳои техникии корхона дар давоми як шабонарӯз зарур аст бузургии тасодуфӣ буда, интизорияти математикиаш ба $85м^3$ ва тамоили миёнаи квадратиаш ба $15м^3$ баробар аст. Аз чӣ сабаб барои баҳо додани эҳтимолияти он, ки дар шабонарӯзи оянда хароҷоти об аз $60м^3$ то $100м^3$ мешавад, нобаробарии Чебишевро истифода бурдан мумкин нест? Сарҳади тарафи рости ин фосиларо чӣ гунна бояд тағйир дод, ки истифодабарии нобаробарии Чебишев имконпазир гардад? Дар ҳолати охирин масъаларо ҳал кунед.

6. 15. Эҳтимолияти истеҳсол шудани маҳсулоти бенуқсон ба 0,8 баробар аст. Аз чӣ сабаб барои баҳо додани эҳтимолияти он, ки ҳиссаи маҳсулотҳои бенуқсон дар байни 4000 маҳсулоти истеҳсолшуда аз 0,78 то 0,83 мешавад, нобаробарии Чебишевро истифода намудан мумкин нест? Сарҳади рости ин фосиларо чунон тағйир диҳед, ки истифодабарии нобаробарии Чебишев имконпазир гардад ва дар ин ҳолат масъаларо ҳал кунед.

6. 16. Эҳтимолияти он, ки харидор аз мағоза мол мехарад ба 0,65 баробар аст. Аз чӣ сабаб барои баҳо додани эҳтимолияти он, ки аз 2000 харидорон шумораи харидкардаҳо дар ҳудуди аз 1260 то 1360 мешавад, нобаробарии Чебишевро истифода намудан мумкин нест? Масъаларо бо мувофиқ овардани тарафи чапи ин фосила ҳал намоед.

6. 17. Бигузор эҳтимолияти он, ки автомати бозиҳо ҳангоми партофтани як танга дуруст кор мекунад, ба 0,95 баробар бошад. Ба эҳтимолияти он, ки: а) ҳангоми партофтани 2500 танга қимати мутлақи фарқи зуддии нисбии ҳодисаи дуруст кор кардани автомат ва эҳтимолияти 0,95 на

зиёда аз 0,02 мешавад; б) ҳангом партофтани 2000 танга шумораи ҳолатҳои дуруст кор кардани автомат дар ҳудуди аз 1860 то 1940 мехобад, баҳо диҳед.

6. 18. Бигузор эҳтимолияти босифат баромадани асбоби санҷидашуда ба 0,95 баробар буда, n- миқдори асбобҳои якхелаи санҷидашуда бошад. Барои кадом қимати n бо эҳтимолияти на кам аз 0,98 тасдиқ кардан мумкин аст, ки қимати мутлақи фарқи зуддии нисбии асбобҳои босифат ва 0,95 аз 0,01 зиёд намешавад.

6. 19. Барои парки автобусҳо қимати миёнаи шумораи автобусҳое, ки пас аз як моҳи истифодабарӣ барои таъмир фиристода мешаванд ба 5 баробар аст. Ба эҳтимолияти он, ки дар охири моҳ парки автобусҳо камтар аз 15 автобусро ба таъмир мефиристонад баҳо дода шавад, агар: а) дар бораи дисперсия ягон маълумот набошад; б) агар дисперсия ба 4 баробар бошад.

6.20. Шӯъбаи назорати техникӣ сифати 900 маҳсулоти тасодуфан гирифташударо месанҷад. Эҳтимолияти сифатнок баромадани ҳар як маҳсулот ба 0,9 баробар аст. Бузургии тасодуфии X -шумораи маҳсулотҳои сифатнок дар байни ин 900 маҳсулот мебошад. Интервали хурдтарини нисбат ба $M(X)$ симметриро, ки бо эҳтимолияти на кам аз 0,9544 бузургии тасодуфии X - ро дар бар мегирад, ёбед.

6.21. Дар ширкати суғуртакунӣ 10000 автомобил ба қайд гирифта шудааст. Эҳтимолияти шикастани ҳаргуна автомобил дар натиҷаи садама ба 0,006 баробар аст. Соҳиби ҳар як автомобили суғурташуда дар як сол 12 сомонӣ суғуртапулӣ медиҳад ва дар мавриди шикастани автомобил дар натиҷаи садама аз ширкат 1000 сомонӣ мегирад. Эҳтимолияти ҳодисаи А=ҳдар охири сол ширкат аз кори кардааш зарар мебинад} – ро ёбед.

БОБИ VII

Дар масъалаҳои 7.1-7.6 қимати миёнаи дархостҳо, ки ба стансияи телефонии автоматӣ дар як дақиқа дохил мешавад ба λ баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки дар t дақиқа ба стансияи телефонии автоматӣ: а) k дархост; б) камтар аз k дархост; в) на камтар аз k дархост дохил мешавад:

7.1. $\lambda=4$; t=3; k=4. 7.2. $\lambda=3$; t=4; k=5.

7.3. $\lambda=2$; t=3; k=4. **7.4.** $\lambda=3$; t=2; k=3.

7.5. $\lambda=3$; t=2; k=5. **7.6.** $\lambda=2$; t=5; k=2.

Дар масъалаҳои **7**.7-**7**.10 вақти миёнаи дархостҳо ба таксӣ, ки дар 2 дақиқа ба пункти идоракунӣ дохил мешавад, ба λ баробар аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки дар t дақиқа ба пункти идоракунии таксӣ: а) k дархост; б) камтар аз k дархост; в) на камтар аз k дархост дохил мешавад:

7.7. λ=8; t=2; k=5. 7.8. λ=10; t=4; k=3.

7.9. λ=6; t=5; k=6. **7.10.** λ=7; t=3; k=2.

Дар масъалаҳои **7**.11-**7**.16 аппаратура аз n элемент иборат аст, ки ҳар яки онҳо дар муддати вақти t ба эҳтимолияти p аз кор мебарояд. Эҳтимолияти онро ёбед, ки дар муддати вақти t:

а) k элемент; б) ақаллан як эламент;

в) на зиёда аз k элемент аз кор мебарояд:

7.11. n=900; p=0,001; k=5. **7.12.** n=800; p=0,002;. k=4.

7.13. n=1000; p=0,0001; k=2. **7.14.** n=700; p=0,001; k=3.

7.15. n=1100; p=0,0001; k=4. **7.16.** n=1200; p=0,001; k=5.

Дар масъалаҳои **7**.17-**7**.20 ба устохонаи таъмирӣ, ки се нафар коргар дорад, ба ҳисоби миёна дар як соат п дархост дохил мешавад. Вақти миёнаи иҷро намудани дархост Т соат мебошад. Муайян карда шавад: а) миқдори миёнаи дархостҳое, ки дар интизори иҷрошавӣ мебошанд; б) вақти миёнаи интизории дархост.

7.17. $n=3$; $T=0,5$. 7.18. $n=5$; $T=0,25$. 7.19. $n=6$; $T=0,75$. 7.20. $n=8$; $T=0,25$.

БОБИ VIII

Дар масъалаҳои 8.1 - 8.4 ҷадвали тақсимоти бузургии тасодуфии дученакаи дискретии (X,Y) дода шуда аст.

Ёфта шавад: а) қонунҳои тақсимоти бешарти компонентаҳои он; б) қонуни тақсимоти шартии X ба шарте, ки Y қимати y_1- ро қабул намудааст; в) қонуни тақсимоти шартии Y ба шарте, ки X қимати x_2- ро қабул намудааст.

8.1.

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0,05	0,06	0,02	0,01
2	0,10	0,04	0,08	0,03
3	0,20	0,15	0,12	0,14

8.2.

$X \backslash Y$	10	20	30	40
10	1/12	1/10	1/8	1/6
20	1/20	1/15	1/10	1/5
30	1/60	1/40	1/20	2/120

8.3.

$X \backslash Y$	3	5	7
1,5	0,05	0,15	0,02
2,5	0,10	0,03	0,01
3,5	0,12	0,08	0,06
4,5	0,20	0,10	0,08

8.4.

$X \backslash Y$	-2	-1	0
2	0,02	0,01	0,06
4	0,08	0,10	0,20
6	0,12	0,10	0,05
8	0,15	0,03	0,08

Дар масъалаҳои **8**.5- **8**.9 функсияи тақсимоти бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y) дода шудааст.

Ёфта шавад: а) функсияи зичии тақсимоти дученака; б) доимии C; в) эҳтимолияти афтодани нуқтаи тасодуфан партофташудаи (X,Y) ба дохили росткунҷаи бо хатҳои

$x = x_1,\ x = x_2,\ y = y_1,\ y = y_2$ маҳдуд.

8.5. $F(x,y)=\begin{cases} C\cdot \sin x\cdot \sin y & \text{агар } 0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2, \\ 0 & \text{агар } x<0 \text{ ё } y<0. \end{cases}$

$x_1 = \pi/4,\ x_2 = \pi/2,\ y_1 = \pi/4,\ y_2 = \pi/3.$

8.6. $F(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{C}\left(1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}\right) & \text{агар } x\ge 0,\ y\ge 0, \\ 0 & \text{агар } x<0 \text{ ё } y<0. \end{cases}$

$x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ y_1 = 5,\ y_2 = 7.$

8.7. $F(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{C}\left(1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}\right) & \text{агар } x\ge 0,\ y\ge 0, \\ 0 & \text{агар } x<0 \text{ ё } y<0. \end{cases}$

$x_1 = 6,\ x_2 = 8,\ y_1 = 10,\ y_2 = 12.$

8.8. $F(x,y)=\begin{cases} C\cdot\left(1-e^{-4x}\right)\left(1-e^{-2y}\right) & \text{агар } x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{агар } x<0 \text{ ё } y<0. \end{cases}$

$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ y_1 = 2,\ y_2 = 4.$

8.9. $F(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{C}\cdot\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-4y}\right) & \text{агар } x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{агар } x<0 \text{ ё } y<0. \end{cases}$

$x_1 = 3,\ x_2 = 5,\ y_1 = 4,\ y_2 = 8.$

Дар масъалаҳои **8.**10- **8.**14 функсияи зичии тақсимоти бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y) дода шудааст. Доимии C –ро муайян намуда, интизориятҳои математикӣ ва дисперсияҳои X ва Y –ро ҳисоб кунед:

8.10. $f(x,y)=\frac{C}{\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+5y^2\right)}$ 11. $f(x,y)=Ce^{-x^2-2xy-4y^2}$.

8.12. $f(x,y)=C\cdot\cos x\cos y,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}.$

8.13. $f(x,y)=\begin{cases} C\cdot xye^{-x^2-y^2} & \text{агар } x>0, y>0, \\ 0 & \text{агар } x<0, y<0. \end{cases}$

8.14. $f(x,y)=\begin{cases} C\cdot(x+y) & \text{агар } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, \\ 0 & \text{дар дигар холатхо.} \end{cases}$

8.15. Бузургии тасодуфии бефосилаи (X,Y) дар дохили секунҷаи росткунҷаи қуллаҳояш $0(0;0)$, $A(0;8)$, $B(8;0)$ мунтазам тақсим шудааст. Функсияи зичии тақсимоти он ва функсияҳои зичии тақсимоти шартии компонентаҳои он ёфта шаванд.

8.16. Бузургии тасодуфии бефосилаи (X,Y) дар дохили росткунҷаи маркази симметриаш ибтидои координатаҳо ва тарафҳояш ба тирҳои координатӣ параллел будаи андозаҳояш мувофиқан ба 4 ва 6 баробар буда, мунтазам тақсим шудааст. Функсияи зичии тақсимоти он ва функсияҳои зичии тақсимоти шартии компонентаҳои он ёфта шаванд.

8.17. Бузургии тасодуфии бефосилаи (X,Y) дар дохили трапетсияи қуллаҳояш $A(-6;0)$, $B(-3;4)$, $C(3;4)$, $D(6;0)$ мунтазам тақсим шудааст. Функсияи зичии тақсимоти он ва функсияҳои зичии тақсимоти шартии компонентаҳои он ёфта шаванд.

8.18. Бузургии тасодуфии бефосилаи (X,Y) дар дохили квадрати тарафаш a ва диагоналҳояш ба тирҳои координатӣ ҳамҷоя мунтазам тақсим шудааст. Функсияи зичии тақсимоти он ва функсияҳои зичии тақсимоти шартии компонентаҳои он ёфта шаванд.

8.19. Бузургии тасодуфии бефосилаи (X,Y) ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои $\alpha_X = 0; \alpha_Y = 1; \ \sigma_X = 1; \ \ \sigma_Y = 2$ итоат менамояд. Эҳтимолияти аз росткунҷаи $(-1;1)$, $(2;4)$, $(2;3)$, $(-1;3)$ қимат қабул кардани ин бузургии тасодуфиро ёбед, агар X ва Y новобаста бошанд.

8.20. Бузургии тасодуфии бефосилаи (X,Y) ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои $\alpha_X = \alpha_Y = 0; \ \sigma_X = \sigma_Y = 1$ итоат менамояд. Эҳтимолияти аз секунҷаи қуллаҳояш $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ қимат қабул намудани ин бузургии тасодуфиро ёбед, агар X ва Y новобаста бошанд.

БОБИ IX

Дар масъалаҳои **9.**1- **9.**8 тақсимоти интихоб дода шудааст: а) полигони зудиҳо ва зудиҳои нисбиро созед;

б) функсияи эмпирикии тақсимотро сохта, графики онро кашед.

9.1.

x_i	3	6	8	10
n_i	2	4	3	5

9.2.

x_i	2	5	6	8
n_i	10	15	20	10

9.3.

x_i	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
n_i	5	10	15	20	25	12	8	5

9.4.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
n_i	4	5	12	20	30	8	6	5

9.5.

x_i	3	6	9	12	15	18	21	24
n_i	5	6	8	30	20	12	5	4

9.6.

x_i	1,2	2,4	4,8	9,6	10,6	11,6	12,6	13,6
n_i	1	1	2	6	20	12	6	2

9.7.

x_i	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7
n_i	6	10	14	20	25	15	10	5

9.8.

x_i	15,5	15,6	15,7	15,8	15,9	16,0	16,1	16,2
n_i	2	4	4	10	20	6	3	1

Дар масъалаҳои **9.**9 – **9.**16 гистограммаҳои зудиҳо ва зудиҳои нисбиро барои тақсимоти интихоби додашуда созед.

9.9.

Рақами фосила	1	2	3	4	5	6
Фосилаҳои хусусӣ	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 26	26 - 30	30–34
Суммаи зудиҳои вариантаҳои фосила	5	7	10	20	4	4

9.10.

Рақами фосила	1	2	3	4	5	6
Фосилаҳои хусусӣ	3 - 5	5- 7	7 - 9	9 - 11	11- 13	13–15
Суммаи зудиҳои вариантаҳои фосила	1	1	4	2	1	1

9.11.

Рақами фосила	1	2	3	4	5	6
Фосилаҳои хусусӣ	(-4)-(-1)	(-1)-2	2 - 5	5 - 8	8 - 11	11-14
Суммаи зудиҳои вариантаҳои фосила	2	3	8	6	6	5

9.12.

Рақами фосила	1	2	3	4	5	6
Фосилаҳои хусусӣ	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30-35
Суммаи зудиҳои вариантаҳои фосила	20	15	10	5	3	2

9.13.

Рақами фосила	1	2	3	4	5	6
Фосилаҳои хусусӣ	7 - 9	9 - 11	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17-19
Суммаи зудиҳои вариантаҳои фосила	3	3	4	6	6	9

9.14.

Рақами фосила	1	2	3	4	5	6
Фосилаҳои хусусӣ	15- 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40-45
Суммаи зудиҳои вариантаҳои фосила	50	30	20	10	6	4

9.15.

Рақами фосила	1	2	3	4	5
Фосилаҳои хусусӣ	1-6	6-11	11-16	16-21	21-26
Суммаи зудиҳои вариантаҳои фосила	6	9	24	7	4

9.16.

Рақами фосила	1	2	3	4	5	6	7
Фосилаҳои хусуси	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
Суммаи зудиҳои вариантаҳои фосила	5	7	8	42	18	5	5

БОБИ X

Дар масъалаҳои 10.1 – 1.4 тақсимоти омории бузургии тасодуфии X дода шудааст. Миёнаи оморӣ $\bar{x}$, дисперсияи оморӣ D^* ва дисперсияи омории ислоҳшуда D_u^*- ро ҳисоб кунед:

10.1.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	2	4	8	20	16	7	9	6

10.2.

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80
n_i	3	5	10	15	20	10	8	6

10.3.

x_i	100	200	300	400	500	600	700	800
n_i	1	2	3	4	5	3	2	1

10.4.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
n_i	5	8	10	12	14	9	7	6

Дар масъалаҳои **10.5 -10.8** бузургии тасодуфии X ба қонуни тақсимоти биномиалӣ итоат менамояд. Ҷадвали тақсимоти омории X дода шудааст. Баҳои нуқтагии параметри номаълуми p- ро бо усули: 1) моментҳо; 2) ба ҳақиқат монанди калонтарин муайян кунед:

10.5.

x_i	1	2	3	4	5
n_i	6	3	2	2	2

10.6.

x_i	2	3	4	5	6
n_i	5	2	1	1	1

10.7.

x_i	4	5	6	7	8
n_i	10	8	6	3	3

10.8.

x_i	10	20	30	40	50
n_i	12	10	6	1	1

Дар масъалаҳои **10.9-10.12** бузургии тасодуфии X ба қонуни тақсимоти Пуассон итоат менамояд. Ҷадвали тақсимоти омории X дода шудааст. Баҳои нуқтагии параметри номаълуми λ - ро бо усули: 1) моментҳо; 2) ба ҳақиқат монанди калонтарин муайян кунед:

10.9.

x_i	0	1	2	3	4
n_i	400	300	100	100	100

10.10.

x_i	3	5	7	9	11
n_i	50	100	500	300	50

10.11.

x_i	4	6	8	10	12
n_i	500	300	100	50	50

10.12.

x_i	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5
n_i	600	100	100	150	50

Дар масъалаҳои **10.13-10.16** бузургии тасодуфии X ба қонуни тақсимоти нормалӣ итоат менамояд. Ҷадвали тақсимоти омории X дода шудааст. Баҳои нуқтагии параметрҳои номаълуми a ва σ- ро бо усули: 1) моментҳо; 2) ба ҳақиқат монанди калонтарин муайян кунед:

10.13.

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3
n_i	10	15	25	20	14	6

10.14.

x_i	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3	2,5
n_i	20	30	50	40	10	10

10.15.

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	28	47	81	23	19	12

10.16.

x_i	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5
n_i	18	20	36	24	12	10

Дар масъалаҳои **10.**17-**10.**20 аломати маҷмӯи генералӣ X ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (a,σ) итоат менамояд, ки қимати σ маълум буда, қимати a номаълум мебошад. Бо эҳтимолияти бовариноки α барои қимати a фосилаи боваринок созед, агар миёнаи интихоб $\bar{x}$ ва ҳаҷми интихоб n дода шуда бошанд:

10.17. $\alpha = 0{,}95$; $\sigma = 3$; $\bar{x} = 8{,}2$; $n = 16$;

10.18. $\alpha = 0{,}95$; $\sigma = 4$; $\bar{x} = 12{,}4$; $n = 25$;

10.19. $\alpha = 0{,}99$; $\sigma = 5$; $\bar{x} = 14{,}5$; $n = 16$;

10.20. $\alpha = 0{,}99$; $\sigma = 6$; $\bar{x} = 20{,}5$; $n = 25$.

Дар масъалаҳои **10.**21-**10.**26 аломати маҷмӯи генералӣ X ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (a,σ) итоат менамояд, ки қимати σ маълум буда, қимати a номаълум мебошад. Бо эҳтимолияти бовариноки α ҳаҷми хурдтарини интихоб n ёфта шавад, ки фарқи баҳои a аз миёнаи интихоб (саҳеҳии баҳои a) ба ε баробар шавад:

10.21. $\varepsilon = 0{,}2$; $\sigma = 0{,}8$; $\alpha = 0{,}95$; 10.22. $\varepsilon = 0{,}3$; $\sigma = 1{,}4$; $\alpha = 0{,}99$;

10.23. $\varepsilon = 0{,}4$; $\sigma = 1{,}5$; $\alpha = 0{,}95$; 10.24. $\varepsilon = 0{,}1$; $\sigma = 0{,}6$; $\alpha = 0{,}99$;

10.25. $\varepsilon = 0{,}3$; $\sigma = 2{,}6$; $\alpha = 0{,}95$; 10.26. $\varepsilon = 0{,}25$; $\sigma = 4$; $\alpha = 0{,}95$.

БОБИ XI

Дар масъалаҳои **11.**1-**11.**4 бузургии тасодуфии X ба қонуни тақсимоти нормалӣ бо параметрҳои (a, σ) итоат менамояд, ки қимати a номаълум буда, σ^2 маълум мебошад. Дар натиҷаи бо бузургии тасодуфии X гузаронидани n санҷишҳои новобаста миёнаи омории $\bar{x}$ ҳосил шудааст. Бо дараҷаи аҳамиятнокии α гипотезаи асосии $H_0: a = a_0$ тафтиш карда шавад.

11.1. $\sigma^2 = 4$, $n = 10$, $\bar{x} = 55$, $\alpha = 0{,}05$, $a_0 = 53$;

11.2. $\sigma^2 = 16$, $n = 20$, $\bar{x} = 65$, $\alpha = 0{,}01$, $a_0 = 67$;

11.3. $\sigma^2 = 25$, $n = 40$, $\bar{x} = 80$, $\alpha = 0{,}05$, $a_0 = 80$;

11.4. $\sigma^2 = 4$, $n = 25$, $\bar{x} = 3$, $\alpha = 0{,}01$, $a_0 = 5$.

Дар масъалаҳои 11.5-11.8 бо бузургии тасодуфии $X \in N(a, \sigma)$ n санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, миёнаи оморӣ $\bar{x}$ ва дисперсияи омории ислоҳшудаи он D_u^* ҳисоб карда шудааст. Бо дараҷаи аҳамиятнокии α гипотезаи $H_0: a = a_0$ тафтиш карда шавад.

11.5. $n = 25$, $\bar{x} = 71$, $D_u^* = 5$, $\alpha = 0{,}01$, $a_0 = 75$;

11.6. $n = 30$, $\bar{x} = 75$, $D_u^* = 3$, $\alpha = 0{,}01$, $a_0 = 73$;

11.7. $n = 35$, $\bar{x} = 25$, $D_u^* = 8$, $\alpha = 0{,}05$, $a_0 = 25$;

11.8. $n = 40$, $\bar{x} = 35$, $D_u^* = 9$, $\alpha = 0{,}05$, $a_0 = 38$.

Дар масъалаҳои **11.**9 – **11.**12 бо бузургии тасодуфии $X \in N(a, \sigma)$ n санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, дар асоси ин санҷишҳо дисперсияи омории ислоҳшуда D_u^* ҳисоб карда шудааст. Бо дараҷаи аҳмиятнокии α гипотезаи асосии $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ тафтиш карда шавад.

11.9. $n = 25$, $D_u^* = 4$, $\alpha = 0{,}05$, $\sigma_0^2 = 6$;

11.10. $n = 30$, $D_u^* = 9$, $\alpha = 0{,}01$, $\sigma_0^2 = 10$;

11.11. $n = 25$, $D_u^* = 8$, $\alpha = 0{,}05$, $\sigma_0^2 = 8$;

11.12. $n = 30$, $D_u^* = 5$, $\alpha = 0{,}05$, $\sigma_0^2 = 3$.

Дар масъалаҳои 11.13-11.16 бо бузургиҳои тасодуфии $X \in N(a_1, \sigma_1)$ ва $Y \in N(a_2, \sigma_2)$ мувофиқан n_1 ва n_2 санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, миёнаҳои омории онҳо $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ ҳисоб корда шудаанд. Дисперсияҳои ин бузургиҳои тасодуфӣ σ_1^2 ва σ_2^2 маълум буда, интизориятҳои математикиашон номаълум мебошанд. Гипотезаи асосии $H_0: a_1 = a_2$ бо дараҷаи аҳамиятнокии α тафтиш карда шавад.

11.13. $n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $\bar{x} = 50$, $\bar{y} = 52$, $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_2^2 = 6$, $\alpha = 0{,}05$.
11.14. $n_1 = 16$, $n_2 = 30$, $\bar{x} = 41$, $\bar{y} = 40$, $\sigma_1^2 = 9$, $\sigma_2^2 = 8$, $\alpha = 0{,}01$.

11.15. $n_1 = 40$, $n_2 = 45$, $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 5$, $\sigma_1^2 = 6$, $\sigma_2^2 = 9$, $\alpha = 0{,}01$.
11.16. $n_1 = 35$, $n_2 = 36$, $\bar{x} = 10$, $\bar{y} = 8$, $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_2^2 = 9$, $\alpha = 0{,}05$.

Дар масъалаҳои 11.17 – 11.20 дар байни n маҳсулоти санҷидашуда m маҳсулоти нуқсондор қайд карда шудааст. Оё бо дараҷаи аҳамиятнокии α тасдиқ намудан мумкин аст, ки эҳтимолияти истеҳсол шудани маҳсулоти нуқсондор p_0 мебошад.
11.17. $n = 1000$, $m = 50$, $\alpha = 0{,}01$, $p_0 = 0{,}01$;
11.18. $n = 800$, $m = 40$, $\alpha = 0{,}05$, $p_0 = 0{,}03$;
11.19. $n = 600$, $m = 30$, $\alpha = 0{,}01$, $p_0 = 0{,}04$;
11.20. $n = 400$, $m = 20$, $\alpha = 0{,}05$, $p_0 = 0{,}05$.

Дар масъалаҳои 11.21 – 11.24 аз маҷмӯи генералии бузургии тасодуфии X маҷмӯи интихобии ҳаҷмаш n ҷудо карда шуда, қатори вариатсионӣ сохта шудааст. Бо дараҷаи аҳамиятнокии α гипотеза дар бораи он, ки маҷмӯи генералӣ тақсимоти Пуассонро дорад, тафтиш карда шавад.

11.21.

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
n_i	2	11	12	22	18	4	4	1	1

$n = 75$, $\alpha = 0{,}01$.

11.22.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	5	14	15	25	17	4	4	3

$n = 87$, $\alpha = 0{,}05$.

11.23.

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n_i	9	18	19	29	21	8	8	7	5

$n = 124$ $\alpha = 0{,}01$

11.24.

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
n_i	6	15	16	26	18	5	5	4

$n = 95$, $\alpha = 0{,}05$.

БОБИ XII

12.1. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ вобастагии ҳаҷми умумии кори иҷрокардаи идораи сохтумон аз кори якрӯзаи 3 бригадаҳои коркардаистодаи идораи сохтумон муайян карда шавад, агар барои ҳар як бригада 3 мушоҳида гузаронида шуда бошад. Натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар ҷадвали зерин оварда шудаанд:

i / j	1	2	3
Ракамии тартибии омил / *Ракамии тартибии мушохида*	A_1	A_2	A_3
1	90	100	140
2	100	110	150
3	120	130	160

12.2. Дар ҳар яке аз се саҳми омил 4 мушоҳидагӣ гузаронида шудааст. Натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар ҷадвали зерин оварда шудаанд:

i / j	1	2	3
Ракамии тартибии омил / *Ракамии тартибии мушохида*	A_1	A_2	A_3
1	41	42	32
2	42	44	34
3	46	46	40
4	47	48	42

Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ гипотеза дар бораи баробарии интизориятҳои математикии гурӯҳҳо(саҳмҳо) тафтиш карда шавад, агар маълум бошад, ки маҷмӯҳои интихобӣ аз тақсимоти нормалии дисперсияи доимӣ дошта ҷудо карда шудаанд.

12.3. Дар ҳар яке аз шаш саҳми омил 4 мушоҳидаҳо гузаронида шудааст. Натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар ҷадвали зерин оварда шудаанд:

i / j	1	2	3	4	5	6
Ракамии тартибии омил / *Ракамии тартибии мушохида*	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	99	81	84	83	80	70
2	53	77	58	83	84	79
3	64	71	70	72	120	89
4	89	87	54	70	84	100

Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0,05$ гипотеза дар бораи баробарии интизориятҳои математикии гурӯҳҳо (сатҳо) тафтиш карда шавад, агар маълум бошад, ки маҷмӯъҳои интихобӣ аз тақсимоти нормали дисперсияи доимӣ дошта ҷудо карда шудаанд.

12. 4. Бо дараҷаи аҳамиятнокии $\alpha = 0,05$ таъсири ду намуди дастгоҳ ва се намуди ашёи хом ба сифатнокии маҳсулоти истеҳсолшаванда муайян карда шавад. Натиҷаҳои мушоҳидаҳои гузаронидашуда дар ҷадвали зерин оварда шудаанд.

Намуди дастгоҳ (саҳми омили А)	Намуди ашёи хом (саҳми омили B)	B_1	B_2	B_3
	i / j	1	2	3
A_1	1	20	60	90
A_2	2	30	70	100

12. 5. Дар ҳар яке аз се саҳми омил 4 мушоҳидагӣ гузаронида шудааст. Натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар ҷадвали зерин оварда шудаанд.

i / j	1	2	3
Раками тартибии омил / *Раками тартибии мушохида*	A_1	A_2	A_3
1	51	52	42
2	52	54	44
3	56	56	50
4	57	58	52

Бо дарачаи аҳамиятнокии $\alpha = 0{,}05$ гипотеза дар бораи баробарии интизориятҳои математикии гурӯҳҳо (саҳмҳо) тафтиш карда шавад, агар маълум бошад, ки маҷмӯҳои интихобӣ аз тақсимоти нормалии дисперсияи доимӣ дошта, ҷудо карда шудаанд.

12. 6. Дар ҳар яке аз шаш саҳми омил 4 мушоҳидаҳо гузаронида шудааст. Натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар ҷадвали зерин оварда шудаанд:

j \ i	1	2	3	4	5	6
Рақами тартибии мушохида \ *Рақами тартибии омил*	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	89	71	74	73	70	60
2	43	67	48	73	74	69
3	54	61	60	62	110	79
4	79	77	44	60	74	90

Бо дарачаи аҳамиятнокии а) $\alpha = 0{,}05$; б) $\alpha = 0{,}01$ гипотеза дар бораи баробарии интизориятҳои математикии гурӯҳҳо (саҳмҳо) тафтиш карда шавад, агар маълум бошад, ки маҷмӯъҳои интихобӣ аз тақсимоти нормалии дисперсияи доимӣ дошта, ҷудо карда шудаанд.

БОБИ XIII

1. **Коррелятсияи хаттӣ.** Дар масъалаҳои 13.1-13.21 бо бузургии тасодуфии дученакаи (X,Y) n санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар намуди ҷадвали зерин оварда шудааст. Ҷадвали коррелятсиониро сохта, муодилаҳои регрессия Y аз X ва X аз Y ёфта шавад.

13.1.

X \ Y	437	471	505	539	573	607	641
-312,5	–	–	–	–	–	1	2
-295,5	–	–	–	–	5	2	–
-278,5	–	–	–	12	13	–	–
-261,5	–	–	5	13	–	–	–
-244,5	–	3	12	–	–	–	–
-227,5	1	5	–	–	–	–	–
-210,5	3	1	–	–	–	–	–

Ҷавоб: $y^* = -1,73x + 76,86;$ $x^* = -0,5y + 2,9$

13.2.

X \ Y	20	25	30	35	40	45
16	4	6	–	–	–	–
26	–	8	10	–	–	–
36	–	–	32	3	9	–
46	–	–	4	12	6	–
56	–	–	–	1	5	4

13.3.

X \ Y	1	3	5	7	9
0,1	2	2	–	–	–
0,3	2	7	10	–	–
0,5	–	2	17	7	–
0,7	–	–	4	3	2
0,9	–	–	–	–	2

Ҷавоб: $y^* = 0,076x + 0,072;$

13.4.

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	2	1	–	–	–	–
2	1	2	–	–	–	–
3	–	3	1	–	–	–
4	–	1	3	1	–	–
5	–	–	2	2	2	1
6	–	–	–	1	1	1

13.5.

X \ Y	5	10	15	20	25	30	35	40
100	2	1	–	–	–	–	–	–
120	3	4	3	–	–	–	–	–
140	–	–	5	10	8	–	–	–
160	–	–	–	1	–	6	1	1
180	–	–	–	–	–	–	4	1

Чавоб: $y^* = 0,42x - 38,3$; $x^* = 1,92y + 100,9$.

13.6.

X \ Y	18	23	28	33	38	43	48
125	–	1	–	–	–	–	–
150	1	2	5	–	–	–	–
175	–	3	2	12	–	–	–
200	–	–	1	8	7	–	–
225	–	–	–	–	3	3	–
250	–	–	–	–	–	1	1

Чавоб: $y^* = 0,19x - 3,1$; $x^* = 3,69y + 66$.

13.7.

Y / X	5	10	15	20	25	30	35
100	–	–	–	–	–	6	1
120	–	–	–	–	–	4	2
140	–	–	8	10	5	–	–
160	3	4	3	–	–	–	–
180	2	1	–	1	–	–	–

Чавоб: $\bar{y}^* = -0{,}33x + 65{,}7$; $\bar{x}^* = -2{,}15y + 181{,}8$.

13.8.

Y / X	3	5	7	9	11	13
13	9	6	–	–	–	–
15	8	15	5	8	–	–
17	–	3	18	14	8	–
19	–	1	3	7	6	–
21	–	–	7	4	9	–
23	–	–	6	6	8	–
25	–	–	–	7	10	12
27	–	–	–	9	11	10

13.9.

Y / X	6	8	10	12	14	16
16	12	9	–	–	–	–
18	11	18	8	11	–	–
20	–	6	21	17	11	–
22	–	4	6	10	9	–
24	–	–	10	7	12	–
26	–	–	9	9	12	–
28	–	–	–	10	13	15
30	–	–	–	12	14	13

13.10.

$X \backslash Y$	10	12	14	16	18	20
20	16	13	–	–	–	–
22	15	22	12	15	–	–
24	–	10	25	21	15	–
26	–	8	10	14	13	–
26	–	–	14	21	16	–
30	–	–	13	13	16	–
32	–	–	–	14	17	19
34	–	–	–	16	18	17

2. Коррелятсияи ғайрихаттӣ. Дар масъалаҳои 13.11-13.20 бо бузургии тасодуфии дученакаи (X, Y) n санҷишҳои новобаста гузаронидашуда, натиҷаҳои мушоҳидаҳо дар намуди ҷадвали зерин оварда шудааст. Ҷадвали коррелятсиониро сохта, муодилаи регрессия Y аз X ёфта шавад.

13.11.

$X \backslash Y$	-1	-0,5	1,5	4,5	5	8,5
0	–	–	–	–	1	–
2	1	–	–	–	–	–
4	–	1	–	–	–	–
6	–	–	1	–	–	–
8	–	–	–	1	–	–
10	–	–	–	–	–	1

Ҷавоб: $y^{*} = 3{,}995 - 2{,}163x + 0{,}268x^2$.

13.12.

Y / X	6,8	8,5	10,2	10,5	11,8
2,18	–	–	–	–	1
3,73	1	–	–	–	–
3,74	–	–	1	–	–
3,84	–	–	–	1	–
4,45	–	1	–	–	–
5,67	1	–	–	–	–

Чавоб: $\overline{y}^{*} = 4,69 + 15,97/x$.

13.13.

Y / X	0	3	5	10	17
0	18	1	3	–	–
1	1	20	5	–	–
2	1	–	10	7	–
3	–	–	2	12	–
4	–	–	–	–	20

Чавоб: $y^{*} = 0,66x^{2} + 1,23x + 1,07$.

13.14.

Y / X	7	13	40	80	200
0	19	2	–	–	–
4	1	14	3	–	–
6	1	–	22	–	–
7	–	–	2	15	–
10	–	–	–	–	21

Чавоб: $y^{*} = 3,20x^{2} - 13,01x + 9,09$.

13.15.

Y / X	1	35	50
0	50	–	–
4	5	44	5
5	1	–	45

Чавоб: $y^* = 1,53x^2 + 1,95x + 1$

13.16.

Y / X	10	11	20	35	50
0	20	7	–	–	–
1	5	15	3	–	–
2	–	3	17	8	–
3	–	1	4	13	5
4	–	–	–	7	42

Чавоб: $y^* = 1,59x^2 + 3,33x + 9,4.$

13.17.

Y / X	200	300	400
7	41	1	–
8	7	52	8
9	–	1	40

Чавоб: $y^* = -1,52x^2 + 121,94x - 576,61.$

13.18.

Y / X	12	14	16	18
2	6	3	–	–
12	–	4	5	4
22	–	3	6	6
32	–	4	4	5
42	–	4	5	3
52	4	4	4	–

13.19.

Y / X	16	18	20	22
6	10	7	–	–
16	–	8	9	8
26	–	7	10	10
36	–	8	8	9
46	–	8	9	7
56	8	8	8	–

13.20.

Y / X	22	24	26	28
12	16	13	–	–
22	–	14	15	14
32	–	13	16	16
42	–	14	14	15
52	–	14	15	13
62	14	14	14	–

ЗАМИМА

Ҷадвали қиматҳои функсияи $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ **Ҷадвали 1**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3965	3951	3945	3639	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3188	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Ҳар амалия барои $x \geq 4$ қимати $\varphi(x)=0$ қабул карда мешавад.

Чадвали қиматҳои функсияи $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ **Чадвали 2**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0238	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2886	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6679	6729	6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9189	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	8488	9500	9512	9523	9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9792	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9910	9912	99915	99917	99920	9922	9924	9926	9928
2,7	9931	9933	9935	9937	9938	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9951	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	971	9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	9981	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986
3,2	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,3	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3.4	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9995
3,5	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997	9997
3,6	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998
3,7	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,9	9999			9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,0	0,999936			9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,5	0,999994			-	-	-	-	-	-	-
5,0	0,99999994			-	-	-	-	-	-	-

Дар амалия барои $x \ge 5$ кимати $\Phi(x)=1$ кабул карда мешавад.

Ҷадвали t - тақсимот(тақсимоти Стюдент) **Ҷадвали 3**

k \ γ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	098	0,99	0,999
1	1.000	1.376	1,963	3,078	6.314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,816	1,061	1,336	1,886	2.920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	756	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4.541	5,841	12,941
4	741	941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	727	920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	718	906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	711	896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	706	889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	703	883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	700	879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	5,587
11	697	876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	695	873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	694	870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	692	868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	691	866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	690	865	1,071	1,337	1.746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	689	863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	688	862	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
19	688	861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	687	860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	686	859	1,063	1,323	1.721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	686	858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	685	858	1,060	1,319	1.714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	685	857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	684	856	1,058	1,316	1.708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	684	856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	684	855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	683	855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	683	854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	683	854	1,055	1,310	1.697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	681	851	1,050	1,303	1.684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	679	848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	677	845	1,041	1,289	1.658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	674	842	1,036	1,282	1.645	1,960	2.326	2,576	3,291

Ҷадвали тақсимоти χ^2 **Ҷадвали 4**

k \ γ	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	7,34	9.52	11,03	13,36	15.51	18.17	20,1	26,1
9	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	9,34	11,78	13,44	15.99	18.31	21,2	23,2	29.6
11	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,5
14	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	14,34	17.32	19,31	22,3	25,0	28.3	30.6	37,7
16	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	16,34	19,51	21,6	24,8	27.6	31,0	33,4	40,8
18	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	18,34	21,7	23,9	27.2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38.9	46,8
22	21,3	24,9	27.3	30,8	33,9	37,7	40.3	48,3
23	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41.6	49,7
24	23,3	27.1	29,6	33,2	36.4	40.3	43,0	51,2
25	24,3	28,2	30,7	34,4	37.7	41,6	44,3	52,6
26	25,3	29.2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48.3	56,9
29	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49.6	58,3
30	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48.0	50.9	59,7

Чадвали 5

Чадвали F - таксимот(таксимоти Фишер) барои эхтимолияти $\gamma = 0{,}95$

k_2	k_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161.40	199.50	215.70	224,60	230.20	234.00	238.90	243.90	249,00	254,30
2	18.51	19.00	19.16	19,25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6.04	5,91	5,77	5.63
5	6.61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4.68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4.15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4.74	4.35	4,12	3.97	3.87	3.73	3.57	3,41	3.23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3.69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3.23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3.22	3.07	2.91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2.95	2.79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3.49	3,26	3.11	3.00	2.85	2.69	2,50	2.30
13	4.67	3,80	3,41	3,18	3.02	2.92	2.77	2.60	2,42	2.21
14	4,60	3.74	3,34	3,11	2.96	2.85	2.70	2.53	2,35	2.13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2.59	2.42	2,24	2,01
17	4.45	3,59	3.20	2,96	2,81	2,70	2.55	2.38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2.51	2,34	2,15	1,92
19	4,33	3,51	3,13	2,90	2,74	2.63	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2.71	2.60	2.45	2.28	2,08	1.84
21	4,32	3.47	3.07	2,84	2.68	2.57	2.42	2,25	2,05	1.81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2.20	2,00	1,76
24	4,26	3.40	3,01	2,78	2,62	2,51	2.36	2.18	1,98	1,73
25	4.24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2.34	2.16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2.98	2,74	2.59	2.47	2.32	2.15	1,95	1.69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2.57	2.46	2.30	2,13	1,93	1,67
28	4.20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2.29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4.17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2.27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2.84	2,61	2.45	2,34	2.18	2,00	1,79	1.51
60	4,00	3.15	2.76	2,52	2.37	2.25	2.10	1.92	1,70	1.39
120	3.92	3.07	2,68	2,45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1.94	1.75	1,52	1,00

Рўйхати адабиёт

1. Барабумов В.Е. и др. Справочник по математике для экономистов. –М. «Выс.шк.» ,1987. -336с.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. –М. «Наука» ,1986. -460с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. –М. «Наука» , 1964. -460с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М. «Выс.шк.», 1970.-240с.
5. Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. –М. «Выс.шк.», 1966. -420с.
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М. Наука,1965.-395с.
7. Ивашев-Мусатов.О.С. Теория вероятностей и математическая статистика. –М. «Наука». Гл.ред. физ.-мат. литература,1979. -257с.
8. Зубков А.М. и др. Сборник задач по теории вероятностей. –М. «Наука». Гл.ред. физ.-мат.литература,1989. -320с.
9. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика. –М. «Выс.шк.», 1998. -336с.
10. Карасёв А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. М. «Статистика», 1989. -229с.
11. Колемаев В.А. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. –М. «Выс.шк.» , 1991. -400с.
12. Мантуров О.В. и др. Толковый словарь математических терминов. –М. «Просвещение», 1965. -540с.
13. Прохоров А.В. Задачи по теории вероятностей. –М. «Наука».гл.ред. физ.-мат. литература, 1986. -328с.
14. Самандаров Э.Г. ва диг. Асосҳои назарияи эҳтимолият.-Душанбе. «Маориф», 1992. -192с.
15. Шерматов Н., Азизов Р.И. Курси мухтасари назарияи эҳтимо-лият ва статистикаи математикӣ. -Душанбе. 2000. -134с.
16. Шукуров Ҳ. Р. Курси мухтасари математикаи олӣ. -Душанбе. «Ховарон», 2006. -244с.

Садуллоев Р.И. Шукуров Ҳ.Р.

АСОСҲОИ НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ ВА ОМОРИ РИЁЗӢ

Муҳаррири техникӣ: **Эгамбердиев К.**
Муҳаррири ороиши: **Исоев А.**
Ҳуруфчини компютери **Шукуров Ф.**
Тарроҳ **Шукурова С.**

БИ 3815

Ба матбаа 27.12.08. супорида шуд. Ба чоп 12.01.09. имзо шуд.
Андозаи 60x84 1/16. Коғази офсетии №1. Чопи офсети.
Ҷузъи чопи шартӣ 21. ҷузъи нашрию ҳисоби 16,0
Адади нашр 600. Супориши №2 Нархи шартномавӣ

Муассисаи нашриявии «Ирфон»-и Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон 734018 ш.Душанбе кӯчаи Н.Қарабоев 17

Дар матбааи ҶДММ «Ховарон» ба табъ расидааг.
Суроға ш.Душанбе кӯчаи Ҷ.Расулов 6/1

20сам

Bernolli Jacob
1654-1705

Bayes Tomas
1702-1761

Laplace Pieere Simon
1749-1827

Poisson Simeon
1781-1840

Чебышев П.Л.
1821-1894

Колмогоров А.Н
1903-1987

ISBN 978-99947-63-36-8

9 789994 763368

«ИРФОН»