

Ҷ. ШАРИФОВ, У. БУРҲОНОВ

ГЕОМЕТРИЯ

9

Китоби дарсӣ барои синфи 9-уми
муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

Нашри сеюм

**Вазорати маориф ва илми
Ҷумҳурии Тоҷикистон
тасдиқ кардааст**

**ДУШАНБЕ
МАОРИФ
2023**

ТДУ (УДК) 514 (075)+371.671+373

ТКБ (ББК) 22.151 (Я72)+74.262

Ш-30

Ш-30. Шарифов Ҷ., Бурҳонов У. **Геометрия.** Китоби дарсӣ барои синфи 9-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ. – Нашри сеюм. – Душанбе: “Маориф”, 2023. –112 сах.

Хонандагони азиз!

Китоб манбаи донишу маърифат аст. Аз он баҳравар шавед ва онро тоза нигоҳ доред! Кӯшиш кунед, ки соли таҳсили оянда ҳам ин китоб ҳамин гуна зебову ороста дастраси хонандагони дигар гардад ва онҳо низ аз он истифода баранд.

Ҷадвали истифодаи китоб

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли таҳсил	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали сол	Охири сол
1					
2					
3					
4					
5					

ISBN 978-99985-39-43-3

© МАОРИФ, 2023

Моликияти давлат

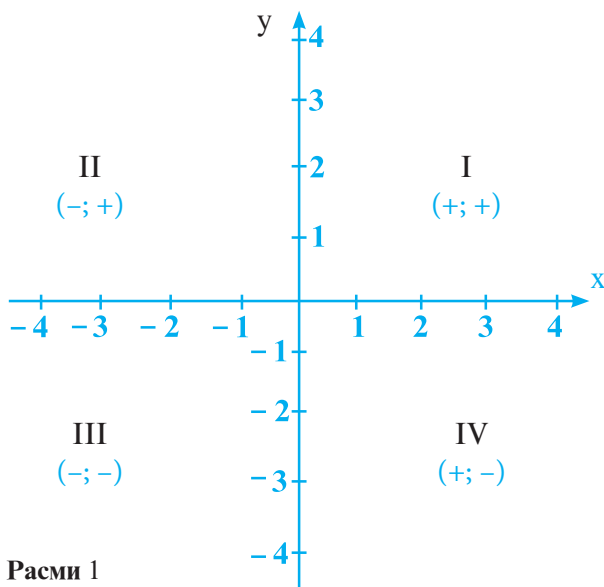
ФАСЛИ I. КООРДИНАТАҲОИ ДЕКАРТӢ ДАР ҲАМВОРӢ

§ 1.1. Ҳамвории координатӣ

1. Мафҳуми ҳамвории координатӣ

Дар ҳамворӣ аз нуқтаи O ду хатти рости x ва y -и бо ҳам перпендикулярро мегузаронем (расми 1). Хатти рости x чун қоида ба таври уфуқӣ ва хатти рости y ба таври амудӣ ҷойгир карда мешаванд.

Порчаи воҳидиеро интихоб карда, дар тири x аз нуқтаи O ба тарафи рост ва чап, дар тири y аз нуқтаи O ба тарафи боло ва поён порчаҳои баробарро мегузарем. Дар хатти рости x аз нуқтаи O ба тарафи рост ададҳои мусбат ва ба тарафи чап ададҳои манфиро ҷойгир мекунем. Хатти рости x тири абсисса ном дорад. Дар хатти рости y аз нуқтаи O ба тарафи боло ададҳои мусбат ва ба тарафи поён ададҳои манфиро мегузарем. Хатти рости y тири ордината ном дорад (расми 1).



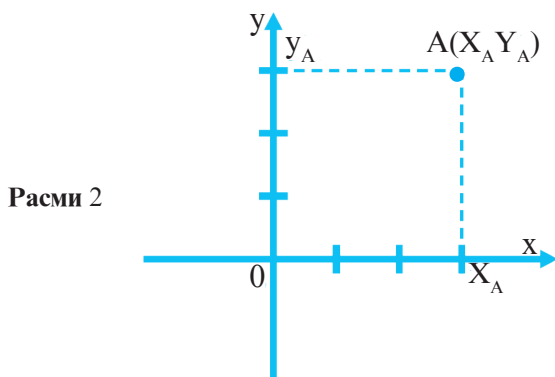
Ин ду тир ҳамворию ба чор қисм тақсим мекунад. Ҳар кадоми онҳо чоряк ном дорад (Чорякҳои I, II, III ва IV дар расми 1).

Ҳамворие, ки ба воситаи тирҳои координатӣ ба чор чоряк тақсим карда шудааст, ҳамвории координатӣ номида мешавад. Нуқтаи O , ки буриши тирҳои абсисса ва ордината мебошад, ибтидои координатаҳо ном дорад. Ҳамвории координатиро аксаран ҳамвории (x, y) меноманд. Дар таърихи илми математика олими фаронсавӣ Рене Декарт (1596-1650) аввалин шуда, мафҳуми ҳамвории координатиро дохил кардааст.

Аз ин рӯ, ба хотири ин олим ҳамвории координатиро гоҳе ҳамвории декартӣ низ меноманд.

Агар дар ҳамвории координатӣ ягон нуқтаи A -ро қайд кунему аз ин нуқта то тире абсисса (x) перпендикуляр фурурем, асоси перпендикуляр ба кадом ададе, ки мувофиқ ояд, абсиссаи нуқтаи A мебошад. Агар аз нуқтаи A ба тире ордината (y) перпендикуляр гузаронем, асоси ин перпендикуляр ба ададе мувофиқ меояд, ки он координатаи нуқтаи A ном дорад.

Агар адади x_A - абсисса ва адади y_A - ординатаи нуқтаи A бошад, мегӯянд, ки нуқтаи A дорои координатаҳои x_A ва y_A мебошад (расми 2). Ибораи «нуқтаи A бо координатаҳои x_A ва y_A » чунин ишора карда мешавад: $A(x_A, y_A)$.



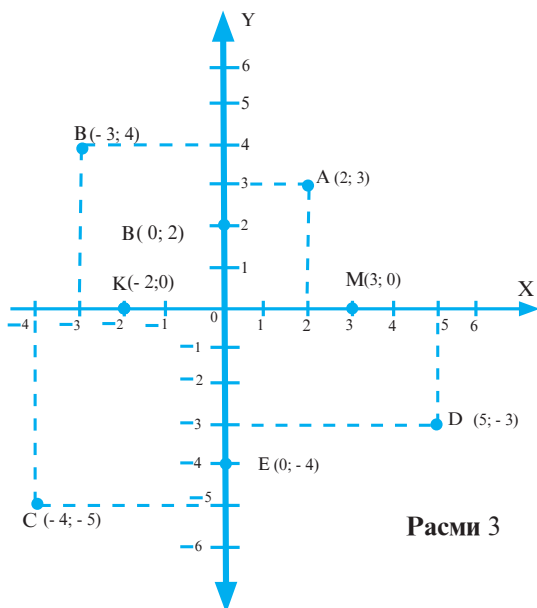
Ҳамвори координатиро системаи координатаҳо низ ном мебаранд.

Масъалаи 1. Дар ҳамвори координатӣ нуқтаҳои зеринро тасвир намоед:

$A(2; 3)$, $B(-3; 4)$, $C(-4; 5)$ ва $D(5; -3)$.

Ҳал. Дар расми 3 нуқтаи $A(2; 3)$ дар чоряки якум тасвир ёфтааст. Аз тири x нуқтаи ба адади 2 мувофиқро ёфта, аз он хатти рост ба тири x перпендикуляр месозем. Дар тири y нуқтаи ба адади 3 мувофиқро ёфта, аз он ба тири y перпендикуляр мегузаронем. Буриши ҳар ду перпендикуляр нуқтаи $A(2; 3)$ мебошад. Нуқтаҳои $B(-3; 4)$, $C(-4; -5)$ ва $D(5; -3)$ низ ҳамин тавр сохта мешаванд.

Нуқтаи намуди $M(x; 0)$ дар тири x меҳобад. Дар расми 3 нуқтаҳои $M(3; 0)$ ва $K(2; 0)$ дар тири абсисса ҷойгиранд. Нуқтаи намуди $P(0; y)$ дар тири ордината меҳобад. Дар расми 3 нуқтаҳои $P(0; 2)$ ва $E(0; 4)$ аз мисоли чунин нуқтаҳоянд. Нуқтаи $O(0; 0)$ ибтидои системаи координата мебошад.



Расми 3

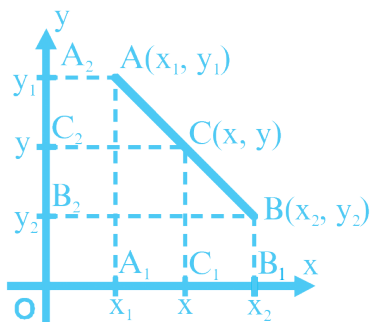
Супориш. 1) Нуқтаҳои $A (- 3; 6)$, $B (- 2; - 4)$, $C (4; - 3)$, $D (- 8; 2)$, $P (7; 0)$, $E (0; 5)$, $M (- 5; 0)$, $F (0; - 6)$ -ро дар ҳамвори координатӣ тасвир намоед.

2) Куллаҳои чоркунча нуқтаҳои $A (3; - 2)$, $B (- 4; 5)$, $C (- 3; 3)$, $D (-2; 5)$ мебошанд. Чоркунчаи $ABCD$ -ро дар ҳамвори координатӣ тасвир намоед. Кадом тарафҳои чоркунча тирҳои координатаҳоро мебуранд? Координатаҳои нуқтаҳои буришро ёбед.

§ 1.2. Координатаҳои миёнаҷойи порча

Дар расми 4 нӯғҳои порчаи AB нуқтаҳои $A (x_1; y_1)$ ва $B (x_2; y_2)$ мебошанд.

Нуқтаи $C (x; y)$ дар миёнаҷойи порчаи AB воқеъ аст. Аз ҳар се нуқта ба тирҳои x ва y перпендикуляр мегузаронем.



Расми 4

Нуқтаи C_1 миёнаҷойи порчаи A_1B_1 ва нуқтаи C_2 миёнаҷойи порчаи A_2B_2 мебошад. Аз ин ҷо $|x-x_2| = |x-x_1|$ ва $|y-y_2| = |y-y_1|$ мешавад. Ҳар кадоме аз ин муодилаҳоро дар ҳолати $x_1 \neq x_2$ ва $y_1 \neq y_2$ ҳал менамоем:

$$x-x_1 = -(x-x_2) \text{ ва } y-y_1 = -(y-y_2);$$

$$2x = x_1 + x_2 \text{ ва } 2y = y_1 + y_2;$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ва } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ҳамин тариқ, нуқтаи C -и миёнаҷойи порчаи AB дорои чунин координатаҳост:

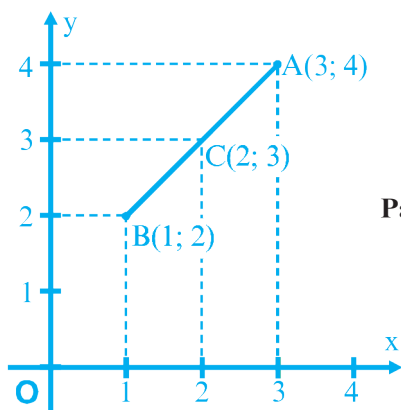
$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Формулаҳои $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ва $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ дар ҳолати $x_1 = x_2$ ва $y_1 = y_2$ низ дурустанд. Дар ин ҳолат ё порчаи AB ба тири x ё порчаи AB ба тири y параллел мебошад.

Масъалаи 2. Координатаҳои нуқтаи $B(x; y)$ -ро ёбед, агар нуқтаи $A(3; 4)$ маълум буда, миёнаҷойи порчаи AB нуқтаи $C(2; 3)$ бошад.

Ҳал. Аз формулаи $x_c = \frac{x_A + x_B}{2}$ ва $y_c = \frac{y_A + y_B}{2}$ меёбем:
 $2 = \frac{3 + x}{2}$ ва $3 = \frac{4 + y}{2}$. Аз ин ҷо $x = 1, y = 2$.

Ҷавоб: $B(1; 2)$ (расми 5).



Расми 5

Супориш. 1) Координатаҳои миёнаҷойи порчаи PM -ро ёбед, агар $P(-4; 5)$ ва $M(8; 3)$ бошад.

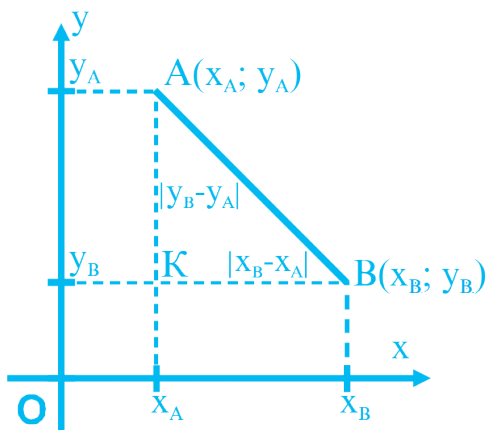
2) Қуллаҳои параллелограми $ABCD$ нуқтаҳои $A(1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(3; 2)$ мебошанд. Координатаҳои қуллаи чорум D ва нуқтаи буриши диагоналҳоро ёбед.

Нишондод. Аввал координатаҳои миёнаҷойи порчаи AC -ро ёбед, ки он нуқтаи буриши диагоналҳо мебошад.

3) Координатаҳои нуқтаи $A(x; y)$ -ро ёбед, агар $M(-2; 3)$ миёнаҷойи порчаи AB буда, $B(6, -4)$ бошад.

§ 1.3. Масофаи байни ду нуқта

Дар расми 6 нуқтаҳои $A(x_A, y_A)$ ва $B(x_B, y_B)$ тасвир ёфтаанд. Барои ёфтани масофаи байни ин ду нуқта порчаи AB -ро сохта, аз нуқтаҳои A ва B ба тирҳои ордината ва абсисса перпендикуляр мегузаронем.



Расми 6

Секунҷаи AKB , секунҷаи росткунҷа мебошад. Катетҳои $KB = |x_B - x_A|$ ва $AK = |y_B - y_A|$ мебошанд (расми 6).

Мувофиқи теоремаи Пифагор ҳосил мекунем:

$$AB^2 = KB^2 + AK^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Аз ин ҷо $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ ё

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Ин формулаи масофаи байни ду нуқта мебошад.

Масъалаи 3. Дар тири ордината нуқтаеро ёбед, ки аз нуқтаҳои $A(4; 3)$ ва $B(2; 5)$ дар масофаи баробар воқеъ бошад.

Маълум: $A(4; 3)$ ва $B(2; 5)$,

$AC = BC$, C дар тири y (расми 7).

Матлуб: $C(0, y)$.

Ҳал. 1) $AC^2 = (0 - 4)^2 + (y - 3)^2$.

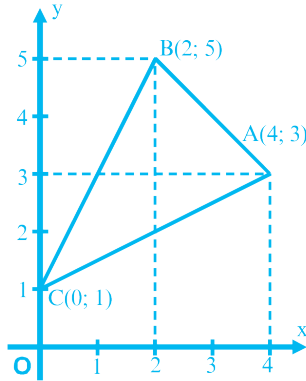
2) $BC^2 = (0 - 2)^2 + (y - 5)^2$.

3) Аз $AC^2 = BC^2$ мебарояд, ки

$$(0 - 4)^2 + (y - 3)^2 = (0 - 2)^2 + (y - 5)^2 \text{ ё}$$

$16 + y^2 - 6y + 9 = 4 + y^2 - 10y + 25$, ё ки $10y - 6y = 4$. Аз ин ҷо $y = 1$.

Ҷавоб: $C(0; 1)$.



Расми 7

Супориш. 1) Нуқтаҳои $A(-3; -2)$, $B(-4; 2)$, $C(1; 3)$ қуллаҳои секунҷаи ABC мебошанд. Дарозии тарафҳои секунҷаи ABC -ро ёбед.

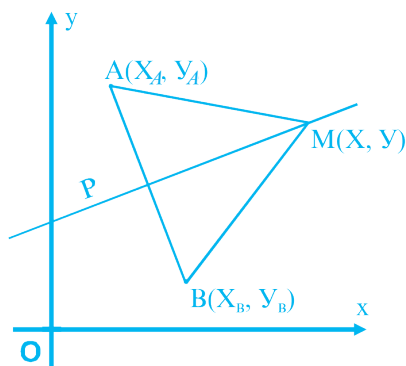
2) Дар супориши 1) медианаҳои секунҷаи ABC -ро ёбед.

3) Дар супориши 1) дарозии тарафҳои секунҷаеро ёбед, ки қуллаҳои миёнаҳои тарафҳои секунҷаи ABC бошад.

§ 1.4. Муодилаи хатти рост

Теорема. Агар a , b , c - ададҳои ихтиёрӣ бошанд, он гоҳ муодилаи $ax + by + c = 0$ муодилаи хатти рост бо координатаҳои декартии x ва y мебошад.

Исбот. Бигузур p – хатти рости ихтиёрӣ дар ҳамвори координатӣ бошад (расми 8). Хатти рости $AB \perp p$ – ро месозем ва аз нуқтаи M , $MA = MB$ -ро мегузaronем.



Расми 8

Бигузур $M(x; y)$, $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ бошанд.

$$AM^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \text{ ва}$$

$$BM^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2.$$

Аз $AM^2 = BM^2$ ҳосил мекунем:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2,$$

$$2(x_B - x_A)x + 2(y_B - y_A)y + (x_A^2 + y_A^2 - x_B^2 - y_B^2) = 0.$$

$2(x_B - x_A) = a$, $2(y_B - y_A) = b$, $x_A^2 + y_A^2 - x_B^2 - y_B^2 = c$ ишора мекунем. Дар натиҷа, $ax + by + c = 0$ ҳосил мешавад, яъне хатти ростии p дорой муодилаи $ax + by + c = 0$ будааст.

Масъалаи 4. Муодилаи хатти ростеро нависед, ки аз нуқтаҳои $A(-3; 4)$ ва $B(2; 0)$ мегузарад.

Маълум: $A(-3; 4)$ ва $B(2, 0)$.

Матлуб: $ax + by + c = 0$.

Ҳал. Агар хатти ростии $ax + by + c = 0$ аз нуқтаҳои додашуда гузарад, координатаҳои ин нуқтаҳо муодиларо қонеъ менамоянд.

Аз ин ҷо

$$\begin{cases} a(-3) + b \cdot 4 + c = 0 \\ a \cdot 2 + b \cdot 0 + c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3a + 4b + c = 0 \\ c = -2a \end{cases}$$

Қимати c -ро дар баробарии якум гузошта, ҳосил мекунем:

$$-3a + 4b - 2a = 0, \quad 4b = 5a, \quad b = \frac{5}{4} \cdot a.$$

Қиматҳои $c = -2a$ ва $b = \frac{5}{4} \cdot a$ -ро дар муодилаи $ax + by + c = 0$ гузошта, меёбем:

$$ax + \frac{5}{4} \cdot ay - 2a = 0 \quad \text{ё} \quad 4x + 5y - 8 = 0.$$

Ҷавоб: $4x + 5y - 8 = 0$.

Супориш. 1) Оё хатти рости $x + 2y + 5 = 0$ аз нуқтаҳои $A(-3; -1)$, $B(-7; 1)$, $C(1; -3)$ ва $D(2; 4)$ мегузарад?

2) Муодилаи хатти рости аз нуқтаҳои $A(0, 3)$ ва $B(2, 4)$ гузарандаро нависед.

§ 1.5. Координатаҳои нуқтаи буриши ду хатти рост

Бигузур ду хатти рости $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ дода шуда бошанд ва нуқтаи $A(x; y)$, нуқтаи буриши онҳо бошад. Азбаски ҳар ду хатти рост аз нуқтаи $A(x; y)$ мегузаранд, координатаҳои ин нуқта ҳар ду муодиларо қонеъ мекунонад. Ҳар ду муодиларо ҳамчун система ҳал карда, координатаҳои буришро меёбанд.

Масъалаи 5. Нуқтаи буриши хатҳои рости $4x - y - 3 = 0$ ва $2x + y - 9 = 0$ -ро ёбед.

Маълум: $4x - y - 3 = 0$ ва $2x + y - 9 = 0$.

Матлуб: $A(x; y)$ - нуқтаи буриш.

$$\text{Ҳал.} \quad \begin{cases} 4x - y = 3, \\ 2x + y = 9. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x = 12, \\ 2x + y = 9. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ 2 \cdot 2 + y = 9. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 5. \end{cases}$$

Ҷавоб: $A(2; 5)$.

Масъалаи 6. Исбот кунед, ки хатҳои рости $y = kx + b_1$ ва $y = kx + b_2$ дар ҳолати $b_1 \neq b_2$ будан параллеланд.

Исбот. Бигузур нуқтаи $M(x_1; y_1)$ нуқтаи буриши хатҳои рост бошад, он гоҳ:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b_1, \\ y_1 = kx_1 + b_2 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} b_1 = y_1 - kx_1, \\ b_2 = y_1 - kx_1, \end{cases} \quad \text{аз ин ҷо } b_1 = b_2.$$

Аз ин бармеояд, ки фарзи мо нодуруст буда, хатҳои рост параллеланд.

Қайд. Барои фаҳмидани он ки хатҳои рости $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ параллел мешаванд ё не, ҷой доштани шарт $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ -ро санҷидан лозим аст.

Масъалаи 7. Оё хатҳои рости $2x + 3y + 5 = 0$ ва $4x + 6y + 8 = 0$ параллеланд?

Ҳал. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ва $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Аз ин ҷо, ҳар ду хатти рост параллеланд.

Супориш. 1) Нуқтаҳои буриши хатти рости $3x + 2y - 5 = 0$ -ро бо хатҳои рости $4x + 5y - 9 = 0$ ва $2x + 5y + 4 = 0$ ёбед.

2) Кадоме аз ҷуфти хатҳои рости додашуда параллеланд:

$$\begin{array}{ll} 10x + 4y + 13 = 0, & 2x + 3y + 8 = 0, \\ -3x + 4y + 8 = 0, & -5x - 2y + 8 = 0. \end{array}$$

Масъалаҳои тадқиқотӣ

1. Ҳолатҳои ҷойгиршавии хатти рости $ax + by + c = 0$ -ро нисбат ба системаи координатаҳо муайян намоед.

Низоми тадқиқот.

1) Ҳолати $a = 0$ ва $b \neq 0$.

2) Ҳолати $b = 0$ ва $a \neq 0$.

3) Ҳолати $c = 0$.

4) Шарҳи се ҳолати аввал бо мисолҳои мушаххас.

2. Ҳолатҳои ҷойгиршавии ду хатти ростро тадқиқ намоед.

Низоми тадқиқот.

1) Ҳолати ҳал доштани системаи муодилаҳо.

2) Ҳолати ҳал надоштани системаи муодилаҳо.

3) Ҳолати ҳалли бешумор доштани системаи муодилаҳо.

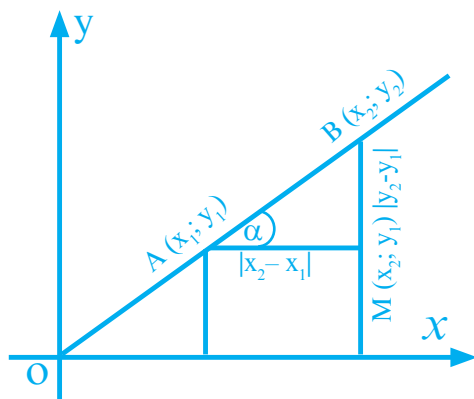
4) Тасвири хатҳои рост барои се ҳолати аввал ба воситаи мисолҳои мушаххас.

§ 1.6. Коэффициенти кунҷии хатти рост

Хатти рости $ax + by + c = 0$ -ро дар ҳолати $b \neq 0$ будан, дар шакли $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ менависем. Агар $k = -\frac{a}{b}$ ва $p = -\frac{c}{b}$ бошад, ҳосил мекунем: $y = kx + p$.

Маъноии геометрии коэффициент (k)-ро тадқиқ менамоем. Бигузор хатти рости $y = kx + p$ аз нуқтаҳои $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ гузарад. Координатаҳоро дар муодила гузошта, ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + p \\ y_2 = kx_2 + p \end{cases} \rightarrow y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \text{ ё } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Расми 9

Дар секунҷаи AMB (расми 9) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$.

Аз ин ҷо $k = \operatorname{tg} \alpha$,

α – кунҷи байни хатти рост ва равиши мусбати тирӣ абсисса мебошад.

k – коэффициент кунҷии хатти рости $y = kx + p$ ном дорад.

Масъалаи 8. Коэффициенти кунҷии хатти рости $2x - 2y + 7 = 0$ -ро ёфта, графикашро созед.

Маълум: $2x - 2y + 7 = 0$.

Матлуб: k ва график.

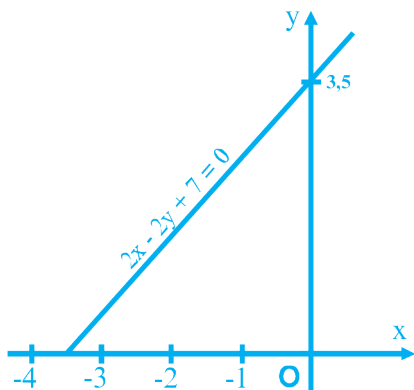
Ҳал. Муодилаи $2x - 2y + 7 = 0$ -ро узв ба узв ба 2 тақсим мекунем:

$$x - y + 3,5 = 0,$$

$$y = x + 3,5.$$

Аз ин ҷо $k = 1$ ё $\operatorname{tg}\alpha = k = 1$, $\alpha = 45^\circ$.

Барои сохтани худӣ хатти рост дар муодилаи $y = x + 3,5$; $x = 0$ гузошта, $y = 3,5$ -ро ҳосил мекунем. Акнун аз нуқтаи $(0; 3,5)$ дар таҳти кунҷи $\alpha = 45^\circ$ хатти рост мегузаронем (расми 10).



Расми 10

Супориш. 1) Хатти рости $3x - \sqrt{3}y + 6 = 0$ -ро созед.

2) Агар хатти рост аз нуқтаҳои А (4; 5) ва В (8; 10) гузарад, коэффитсиенти кунҷиро ёбед ва муодилаи хатти ростро тартиб диҳед.

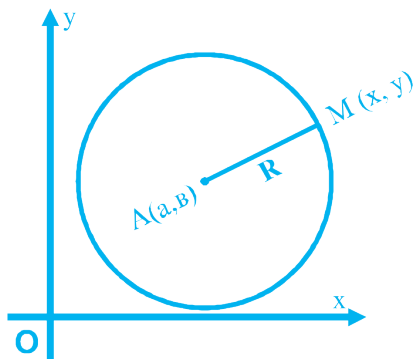
3) Коэффитсиенти кунҷии хатти рост $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ буда, он аз нуқтаи М (2; 0) мегузарад. Хатти ростро созед ва муодилаашро тартиб диҳед.

§ 1.7. Муодилаи давра

Масъала. Дар расми 11 давра бо маркази $A(a;b)$ ва яке аз нуктаҳои $M(x;y)$ дода шудааст. Агар радиуси давра R бошад, муодилаи давра тартиб дода шавад.

Маълум: $A(a;b)$ - марказ, R - радиус, $M(x;y)$ - нуктаи давра.

Матлуб: Муодилаи давраи $A(R)$ -ро тартиб диҳед.



Расми 11

Ҳал. Аз расми 11 маълум аст, ки $AM=R$ мебошад. Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$AM^2 = R^2 \text{ ё } (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Инак, муодилаи $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ муодилаи давраи марказаш $A(a; b)$ бо радиуси R мебошад. Агар маркази давра ибтидои координатаҳо (нуктаи $O(0; 0)$) бошад, муодила шакли зайлро мегирад:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Масъалаи 9. Муодилаи давраи марказаш $A(3; 4)$ -ро, ки аз нуктаи $M(6; 2)$ мегузарад, тартиб диҳед.

Ҳал. Дар муодилаи $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, $a = 3$, $b = 4$, $x = 6$ ва $y = 8$ мегузорем:

$$\begin{aligned}(6 - 3)^2 + (8 - 4)^2 &= R^2, \\ R^2 &= 9 + 16 = 25, R = 5.\end{aligned}$$

Аз ин чо $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ муодилаи давраи матлуб мебошад.

Масъалаи 10. Муодилаи $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ муодилаи давра мебошад. Радиус ва маркази ин даврано ёбед.

Ҳал. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) - 4 - 1 - 20 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 25 = 0.$

Аз ин чо $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$, $a = -2$, $b = 1$, $R = 5$.

Нуқтаи $A (-2; 1)$ маркази давра, радиусаш $R = 5$ аст.

Супориш. 1 Оё давраи $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ аз нуқтаҳои $M (5; 5)$, $P (-1; -3)$, $D (4; 3)$ мегузарад?

2) Муодилаи давраи марказаш $(5, 6)$ ва аз нуқтаи $(0, 18)$ гузарандаро тартиб диҳед.

3) Марказ ва радиуси давраи муодилааш $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ -ро ёбед ва даврано созед.

Масъалаи тадқиқотӣ

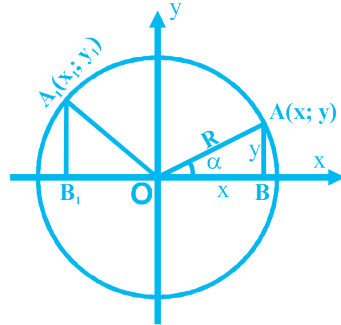
Ҳолатҳои ҷойгиршавии хатти рост ва даврано тадқиқ намоед.

Низоми тадқиқот

- 1) Хатти рост ва давра якдигарро мебуранд.
- 2) Хатти рост расандаи давра мебошад.
- 3) Хатти рост даврано намебурад.
- 4) Ба воситаи расмҳо ва мисолҳои мушаххас нишон додани ҳолатҳои ҷойгиршавии хатти рост ва давра.

§ 1.8. Функцияҳои тригонометрӣ барои кунҷҳои аз 0° то 180°

Давраи марказаш дар ибтидои системаи координатаҳо $O(0; 0)$ ва радиусаш R -ро месозем (расми 12). Аз моили $OA=R$, перпендикуляри $AB=y$ ва проеқсияи $OB=x$ истифода бурда меёбем:



Расми 12

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}, \sin \alpha = \frac{y}{R}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \text{ ва } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Агар нуқтаи A вазъияти $A_1(x_1; y_1)$ -ро ишғол намояд, ба ҷойи α кунҷи $180^\circ - \alpha$ гирифта мешавад.

Дар ин ҳолат, $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-OB}{R} = -\frac{x}{R} = -\cos \alpha$, яъне

- 1) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$;

- 2) $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{A_1B_1}{R} = \frac{AB}{R} = \frac{y}{R} = \sin \alpha$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;

- 3) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$,

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$$

- 4) $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$,

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Масъалаи 11. Қиматҳои функцияҳои тригонометриро барои кунҷи 120° муайян намоед.

Ҳал. 1) $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$;

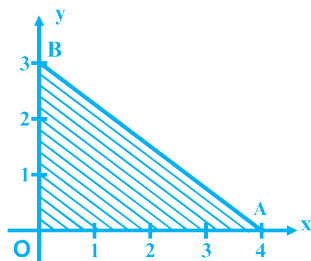
3) $\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{ctg} 120^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

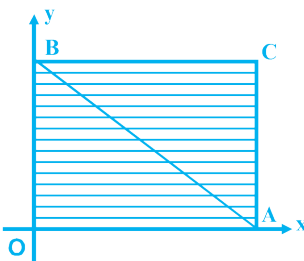
Супориш. 1) Қиматҳои функсияҳои тригонометриро барои кунҷи 150° ёбед. 2) Қиматҳои функсияҳои тригонометриро барои кунҷи 135° муайян намоед.

Масъалаҳо

1. Координатаҳои қуллаҳои секунҷа ва росткунҷа дар расмҳои 13 ва 14 ёбед, агар: а) $OA = 4$, $OB = 3$; б) $OA = a$, $OB = b$ бошад. Дарозии порчаи AB ва масоҳати фигураҳоро ҳисоб кунед.

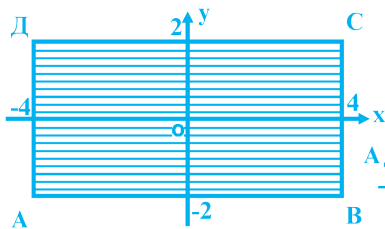


Расми 13.

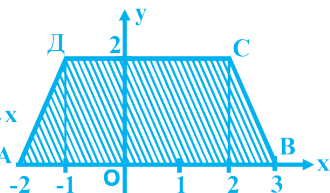


Расми 14.

2. Дар расмҳои 15 ва 16 координатаҳои қуллаҳои фигураҳои тасвиршударо ёфта, масоҳати онҳоро ҳисоб кунед.

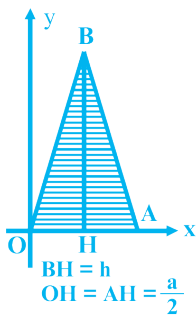


Расми 15.

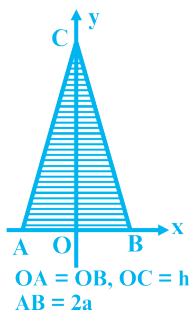


Расми 16.

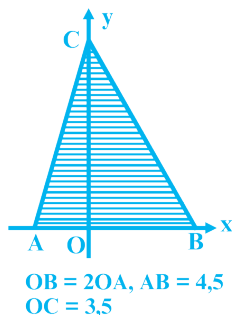
3. Координатаҳои қуллаҳои фигураҳои дар расмҳои 17, 18, 19 тасвиршударо пайдо карда, периметр ва масоҳати онҳоро ёбед.



Расми 17.

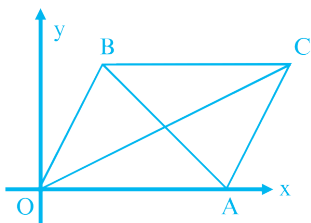


Расми 18.

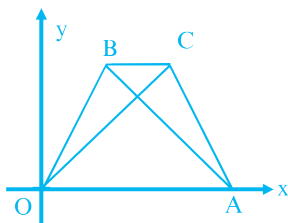


Расми 19.

4. Дар расмҳои 20 ва 21 координатаҳои қуллаҳои параллелограмм ва трапетсияро ёбед. Дарозии диагоналҳо, периметр ва масоҳати фигураҳоро ҳисоб намоед, агар $OA = a$, $OB = b$ ва $OC = d$ бошад.



Расми 20.



Расми 21.

5. Периметр ва масоҳати секунҷаи ABC -ро ёбед, агар: $A (4;0)$, $B (0; -5)$, $C (-3,0)$ бошад.

6. Исбот кунед, ки нуқтаи $D (2; 2)$ аз нуқтаҳои $A (6; 1)$, $B (5; -6)$ ва $C (-1; 2)$ дар дурии баробар воқеъ аст.

7. Исбот кунед, ки секунҷаи ABC баробарпахлу мебошад. Масоҳати ин секунҷаро ҳисоб кунед, агар: а) $A (0; 1)$, $B (1; -4)$, $C (5; 2)$;

б) $A (-4; 1)$, $B (-2; 4)$, $C (0; 1)$ бошад.

8. Нуқтаи C миёнаҷойи порчаи AB мебошад. Ҷадвали зеринро дар дафтратон кашида, ҷойҳои холиро пур кунед.

A	(3; 5)		(0; 2)	(1; 3)	(a;b)
B	(7; 8)	(-3; 5)			
C		(1;4)	(3; -5)	(0; 0)	(0; 0)

9. Исбот кунед, ки чоркунҷаи $ABCD$ росткунҷа аст, масоҳат ва диагоналҳояшро ёбед, агар: а) $A (4; 1)$, $B (3; 5)$, $C (-1; 4)$, $D (0; 0)$; б) $A (-3; -1)$, $B (1; -1)$, $C (1; -3)$, $D (-3; -3)$ бошад.

10. Муодилаи ҳатти рости аз нуқтаҳои $A (4; 5)$ ва $B (3; -2)$ гузарандаро тартиб диҳед ва графикаи онро созед.

11. Муодилаи ҳатти рости аз нуқтаҳои $O (0; 0)$ ва $M (4; 4)$ гузарандаро тартиб дода, ҳатти ростро созед.

12. Оё ҳатти рости $2x + 5y - 17 = 0$ аз нуқтаҳои $A (1; 3)$, $B (6; 1)$, $C (2; 2)$ мегузарад?

13. Нуқтаҳои буриши ҳатти рости $2x + 5y - 10 = 0$ -ро бо тирҳои координата ёбед.

14. Нуқтаҳои буриши ҳатҳои рости: а) $4x + 3y - 6 = 0$ ва $2x + y - 4 = 0$; б) $2x + 6y - 8 = 0$ ва $5x + 7y = 12$ -ро ёбед.

15. Ҳатҳои ростеро тасвир кунед, ки бо муодилаҳои: а) $y = 3$, б) $x = 2$, в) $y = -4$, г) $x = 7$ дода шуда бошанд.

16. Коэффитсиенти кунҷии ҳатти ростро ёбед, агар:

а) $3x + 6y - 12 = 0$, б) $10x + 2y + 7 = 0$, в) $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ бошад.

17. Коэффитсиенти кунҷии хатти ростеро ёбед, ки аз нуқтаҳои а) М (5; 6) ва Р (7; 8); б) М (2; -6) ва Р (-3; -4) мегузарад.

18. Давраро аз рӯйи муодилаи додашудааш созед:

а) $x^2 + y^2 = 9$, б) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, в) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

19. Нуқтаҳои А (3; -4), В (1; 0), С (0; 5), О (0; 0), Е (0; 1) дар кадом давраи бо муодилаҳои зерин додашуда меҳобанд?

а) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$, б) $x^2 + y^2 = 25$, в) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

20. Муодилаи давраи марказаш ибтидои координата ва радиусаш $r = 2,5$ -ро нависед.

21. Давраи $x^2 + y^2 = 25$ тирҳои координатаро дар кадом нуқтаҳо мебурад?

22. Муодилаи давраи марказаш нуқтаи А ва радиусаш r -ро нависед, агар: а) А (0; 5), $r = 3$; б) А (-1; 2), $r = 2$; в) А (-3; -7), $r = 0,5$; г) А (4; -3), $r = 10$ бошад.

23. Муодилаи давраи марказаш ибтидои координатаҳо ва аз нуқтаи В (-1; 3) гузарандаро тартиб диҳед.

24. Муодилаи давраи марказаш А (0; 6) ва аз нуқтаи М (-3; 2) гузарандаро нависед.

25. Муодилаи давраи диаметраш АВ-ро нависед, агар: а) А (-3; 5), В (7; -3), б) А (4; 3), В (2; -1) бошад.

26. Координатаҳои марказ ва радиуси давраро ёбед, агар:

а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$; б) $(x+3)^2 + (y-0,5)^2 = 3$;

в) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 7$; г) $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 11$ бошад.

27. Вазъияти ҷойгиршавии хатти рост ва давраро аз муодилаҳои зерин муайян кунед:

а) $y = 2$, $x^2 + y^2 = 9$; г) $x = 0$, $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 26$;

б) $y = 2$, $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; д) $y = 3$, $x^2 + y^2 = 9$;

в) $x = 4$, $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 1$; е) $x = 3$, $x^2 + y^2 = 1$.

28. Нуқтаҳои буриши хатҳои рост ва давраро ёбед, агар:

а) $x^2 + y^2 = 25$, $2x + 3y - 18 = 0$;

б) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$, $3x + 5y = 32$ бошад.

29. Нуқтаҳои буриши давраҳои бо муодилаҳои зерин додашударо ёбед: а) $(5-x)^2+(4+y)^2=49$, $(4-x)^2+(y-2)^2 = 2$;

б) $(x-5)^2+(y+7)^2 = 1$, $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 10$.

30. Исбот кунед: секунҷае, ки қуллаҳоиаш дар нуқтаҳои А (3; 0), В (0; 3), С (-3; 0) мавҷуд аст, ба давраи $x^2+y^2= 9$ дарункашида мебошад. Масоҳати секунҷаи АВС-ро ёбед.

31. Ифодаҳои зеринро сода намоед:

а) $\frac{\cos(90^\circ - \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha)}{2 \cos(180^\circ - \alpha)}$;

б) $\sin \alpha - \cos(90^\circ - \alpha) - \cos \alpha - \cos(180^\circ - \alpha)$;

в) $\sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ + \sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ$.

32. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\frac{\sin 30^\circ + \sin 150^\circ}{\cos 120^\circ - \cos 60^\circ}$; б) $\frac{\operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{ctg} 135^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 150^\circ}$;

в) $\cos 70^\circ \cdot \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 70^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 120^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 120^\circ$.

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Таърифи ҳамвории координатиро баён намоед.
2. Координатаҳои миёнаҷойи порчаро бо кадом формулаҳо муайян менамоянд?
3. Формулаи масофаи байни ду нуқтаро нависед.
4. Муодилаи давраи аз ибтидои координатаҳо гузарандаро нависед.
5. Муодилаи давраи марказаш $A(a;b)$ -ро бо радиуси R нависед.
6. Муодилаи умумии хатти ростро нависед.
7. Муодилаи хатти ростро нависед, ки аз нуқтаҳои (а; 0) ва (0; b) мегузарад.
8. Хатти рости $y=kx$ аз кадом чорякҳо мегузарад?
9. Коэффитсиенти кунҷии хатти рости $ax + by + c = 0$ -ро ёбед.
10. Нуқтаи буриши ду хатти ростро чӣ тавр меёбанд?
11. Вазъияти ҷойгиршавии ду хатти ростро нишон диҳед.
12. Ҳолатҳои ҷойгиршавии ду давраро тасвир намоед.

13. Ҳолатҳои ҷойгиршавии хатти рост ва давраро нишон диҳед.

14. Таърифи функсияҳои тригонометриро барои кунҷҳои аз 0° то 180° баён намоед.

15. Ба чӣ баробар будани $\cos(180^\circ - \alpha)$, $\sin(180^\circ - \alpha)$ ва $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$ -ро нишон диҳед.

16. Муодилаи хатти ростеро нависед, ки аз ибтидои координатаҳо гузашта, дар ҷоракҳои II ва IV ҷойгир аст.

ФАСЛИ II. ВЕКТОРҲО

§ 2.1. Мафҳуми вектор

1. Мафҳуми вектор. Қимати мутлақ ва самти вектор

Шумо то кунун бо бузургиҳои дарозӣ, кунҷ, масоҳат ва ғайра шинос шудед. Бузургиҳои номбурда фақат бо қимати ададияшон ифода карда мешаванд.

Дар физика бузургии масса ҳам бо қимати ададияш ифода меёбад. Дар амалияи қору зиндагӣ бо бузургиҳои дучор гаштан мумкин аст, ки ғайр аз қимати ададӣ боз самти муайян доранд. Дар физика бузургиҳои суръат ва қувва ғайр аз қимати ададӣ боз самти муайян доранд.

Бузургиҳои, ки бо қимати ададӣ ва самташон муайян карда мешаванд, бузургиҳои векторӣ ном доранд.

Таъриф. Порчаи самтдорро вектор меноманд.

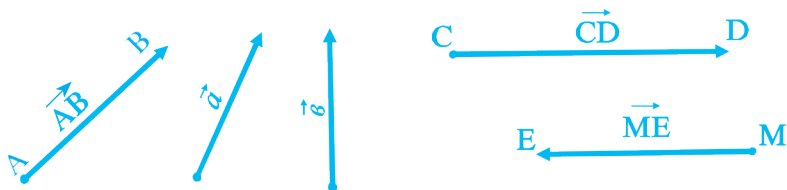
Калимаи «вектор» аз забони юнонӣ гирифта шуда, маънояш «кашидан» мебошад.

Векторро бо як ҳарфи хурди алифбои юнонии дар болояш хатчаи самтдор гузошташуда ё бо ду ҳарфи калони дар болояшон хатчаи самтдор гузошташуда (яке ибтидо, дигаре интиҳои вектор аст), ишора мекунанд.

Масалан: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , ё \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{EM} ва ғайра.

Навишти « \vec{a} », - «вектори a » хонда мешавад.

Векторро ба шакли порчае, ки дар охираш тирча гузошта шудааст, тасвир менамоянд (расми 22).



Расми 22

Таъриф. Бузургии мутлақ (ё модули вектор) гуфта, да-

розии порчаеро меноманд, ки векторро тасвир менамояд. Бузургии мутлақи вектори \vec{a} , бо $|\vec{a}|$ ишора карда мешавад.

Таъриф. Вектореро, ки бузургии мутлақаш ба сифр баробар аст, вектори сифрӣ меноманд.

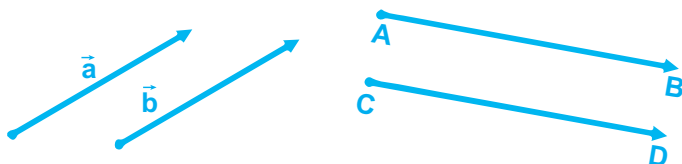
Дар векторҳои сифрӣ ибтидо ва интиҳои порча якҷо мешаванд. Навиштҳои \vec{O} , \vec{AA} , \vec{BB} маънои вектори сифрро доранд.

2. Ҳолатҳои ҷойгиршавии ду вектор

Ду вектор ба монанди нурҳо се ҳолати ҷойгиршавӣ доранд.

1) Векторҳои ҳамсамт.

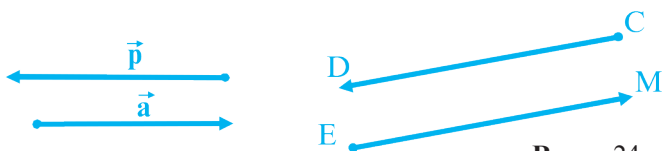
Векторҳои \vec{a} ва \vec{b} , \vec{AB} ва \vec{CD} (дар расми 23) ҳамсамтанд.



Расми 23

2) Векторҳои муқобилсамт.

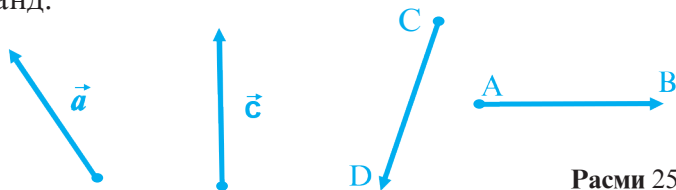
Дар расми 24 векторҳои \vec{p} ва \vec{a} , \vec{EM} ва \vec{CD} муқобилсамт мебошанд.



Расми 24

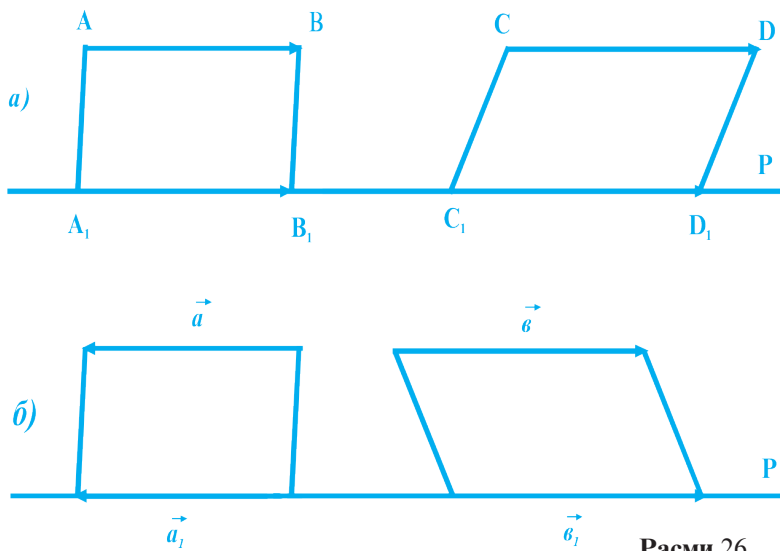
3) Векторҳои гуногунсамт.

Дар расми 25 векторҳои \vec{a} ва \vec{c} , \vec{AB} ва \vec{CD} гуногунсамт мебошанд.



Расми 25

Векторҳои ҳамсамт ва муқобилсамтро ба як хатти рост кӯчонидан мумкин аст (расми 26 а, б).



Расми 26

Таъриф. Векторҳои ҳамсамт ва муқобилсамтро векторҳои коллинеарӣ меноманд.

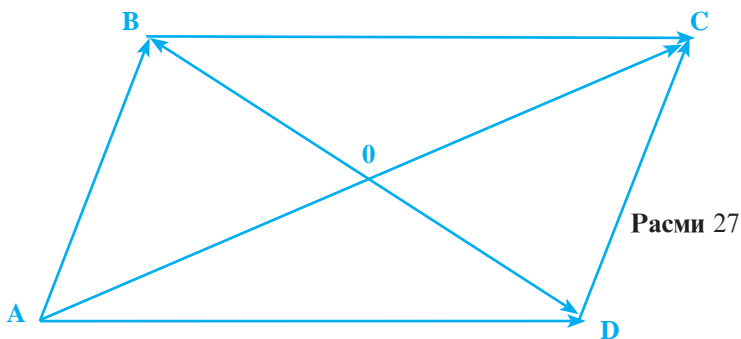
Калимаи «коллинеарӣ» дар забони тоҷикӣ маънои «ҳамхат»-ро дорад. Ба таври дигар, векторҳоеро, ки ба як хатти рост кӯчонидан мумкин аст, векторҳои ҳамхат ё коллинеарӣ меноманд.

3. Векторҳои баробар. Векторҳои муқобил

Таъриф. Векторҳое, ки бузургии мутлақи баробар дошта, ҳамсамт мебошанд, векторҳои баробар номида мешаванд.

Ба таври дигар, ду вектори дорои дарозии баробар ва самтҳои ҳамсояро баробар меноманд. Агар векторҳои \overrightarrow{AB} ва \overrightarrow{CD} баробар бошанд, чунин менависанд: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Масъалаи 1. Дар расми 27 параллелограмми ABCD тасвир ёфтааст. Кадом векторҳо баробаранд?



Ҳал. Дар параллелограмми ABCD векторҳои зерин мавҷуданд:

$\overline{AB}, \overline{DC}, \overline{BA}, \overline{CD}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{DA}, \overline{CB}, \overline{AA}, \overline{BB}, \overline{CC}, \overline{DD}, \overline{AC}, \overline{CA},$
 $\overline{DB}, \overline{BD}, \overline{AO}, \overline{OA}, \overline{CO}, \overline{OC}, \overline{DO}, \overline{OD}, \overline{OB}, \overline{BO}, \overline{OO}$, ҳамагӣ 25 вектор.

Аз онҳо векторҳои зерин баробаранд:

$$\overline{AA} = \overline{BB} = \overline{CC} = \overline{DD} = \overline{OO};$$

$$\overline{AB} = \overline{DC}; \quad \overline{BA} = \overline{CD};$$

$$\overline{AD} = \overline{BC}; \quad \overline{DA} = \overline{CB};$$

$$\overline{AO} = \overline{OC}; \quad \overline{OA} = \overline{CO};$$

$$\overline{DO} = \overline{OB}; \quad \overline{OD} = \overline{BO}.$$

Супориши 1. Дар расми 28 трапетсияи ABCD тасвир ёфтааст. Векторҳои баробарро нависед. Кадом векторҳо ҳамсамт ва кадом векторҳо коллинеариянд?

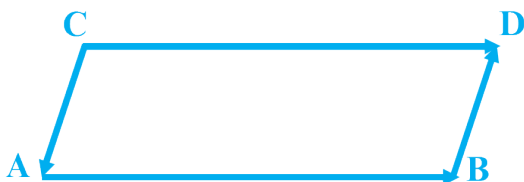
Супориши 2. Дар расми 27 кадом векторҳо: а) ҳамсамт, б) муқобилсамт, в) гуногунсамт, д) коллинеарӣ мебошанд?

Таъриф. Ду векторе, ки бузургии мутлақи баробар (дарозии баробар) ва самти муқобил доранд, векторҳои муқобил номида мешаванд.

Дар расми 27, векторҳои \overline{AB} ва \overline{BA} , \overline{AD} ва \overline{DA} , \overline{DC} ва \overline{CD} , \overline{CB} ва \overline{BC} , \overline{AO} ва \overline{OC} ,

\overrightarrow{OB} ва \overrightarrow{OD} ва ғайра векторҳои муқобил мебошанд. Навишти $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ -ро чунин меҳонанд: «Векторҳои \overrightarrow{AB} ва \overrightarrow{BA} муқобиланд». Бояд қайд кард, ки ба воситаи параллелкӯчонӣ векторҳои баробарро якҷо кардан мумкин аст. Дар расми 29 векторҳои \overrightarrow{CD} ва \overrightarrow{AB} баробаранд. Параллелкӯчониҳои \overrightarrow{CA} онҳоро якҷо менамояд.

Супориши 3. Дар расми 27 кадом параллелкӯчонӣ векторҳои: а) \overrightarrow{AD} ва \overrightarrow{BC} , б) \overrightarrow{AB} ва \overrightarrow{DC} -ро якҷо менамояд?



Расми 29

4. Сохтани вектори ба вектори додашуда баробар

Масъалаи 2. Вектори \vec{a} ва нуқтаи О дода шудаанд. Аз нуқтаи додашуда вектори \overrightarrow{OA} ба вектори \vec{a} баробарро созад.

Маълум: \vec{a} ва нуқтаи О.

Матлуб: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

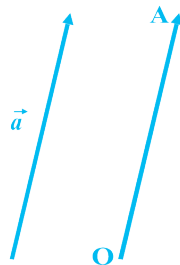
Низоми сохтан:

1) Тасвири \vec{a} ва нуқтаи О.

2) Сохтани нури ОА-и ба вектори \vec{a}

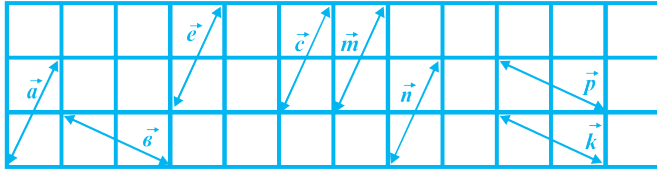
ҳамсамт.

3) Сохтани $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



Расми 30

Супориш. 1) Ду вектори гуногунсамти \vec{a} ва \vec{b} дода шудаанд. Аз нуқтаи маълуми А векторҳои ба онҳо баробарро созад. 2) Кадом векторҳои расми 31 ҳамсамт, кадомашон баробар ва кадомашон муқобил мебошанд.



Расми 31

Масъалаҳои амалӣ

1. Дар хатти рост се нуқтаи А, В, С-ро тавре гузоред, ки нуқтаи А дар байни нуқтаҳои В ва С хобад. Кадом векторҳо ҳамсамт ва кадом векторҳо муқобилсамт мебошанд? Ҷамагӣ чанд вектор ҳосил шуд?

2. Дар секунҷаи ABC кадом векторҳо мавҷуданд, агар AA_1 , BB_1 ва CC_1 медианаҳо бошанд?

3. Секунҷаи ABC-ро созед, векторҳои AB, AC ва BC -ро ба ягон нуқтаи M кӯчонед.

4. Векторҳои \overline{AB} , \overline{CD} ва \overline{EM} -ро тарзе созед, ки: 1) \overline{AB} , \overline{CD} ва \overline{EM} коллинеарӣ бошанд. 2) \overline{AB} , \overline{CD} ва \overline{EM} ғайриколлинеарӣ бошанд. 3) \overline{AB} ва \overline{CD} коллинеарӣ буда, \overline{AB} ва \overline{EM} ғайриколлинеарӣ бошанд.

5. Шашкунҷаи мунтазамро созед. Дар он кадом векторҳо баробаранд?

6. Ду вектори \vec{a} ва \vec{b} -ро тавре созед, ки: а) дарозии баробар дошта, ҳамсамт бошанд; б) дарозии баробар дошта, муқобилсамт бошанд.

7. Иббот кунед, ки вектори дилхоҳ ба худаш баробар аст: $\vec{a} = \vec{a}$.

8. Иббот кунед, ки агар O миёнаҷойи порчаи AB бошад, он гоҳ

$$\overline{AO} = \overline{OB}, \overline{OA} = \overline{BO}, \overline{OA} \neq \overline{AB} \text{ мешавад.}$$

9. Кадоме аз бузургиҳои зерин бузургиҳои векториянд: суръат, масса, суръатнокӣ (шитоб), вақт, ҳарорат, ҳаҷм, қувва, масофа.

10. Дар квадрат: а) ду тарафи ҳамсоя; б) ду тарафи муқобил; в) ду диагонал векторҳои баробар шуда метавонанд?

11. Дар ромб: а) ду тарафи ҳамсоя; б) ду тарафи муқобил; в) ду диагонал векторҳои муқобил шуда метавонанд?

12. Дар давра ду диаметри перпендикулярро созед. Дар расми ҳосилшуда чанд вектори баробар, муқобил ва перпендикуляр мавҷуд аст?

§ 2.2. Амалҳо бо векторҳо

1. Координатаҳои вектор

Бигузур нуқтаи $A(X_A; Y_A)$ ибтидо ва нуқтаи $B(X_B; Y_B)$ интиҳои вектори \overline{AB} бошад. Вектори \overline{AB} дорои координатаҳои $X_B - X_A$ ва $Y_B - Y_A$ буда, чунин навишта мешавад:

$$\overline{AB} = (X_B - X_A; Y_B - Y_A).$$

Вектори сифрӣ бо координатаҳои чунин навишта мешавад:

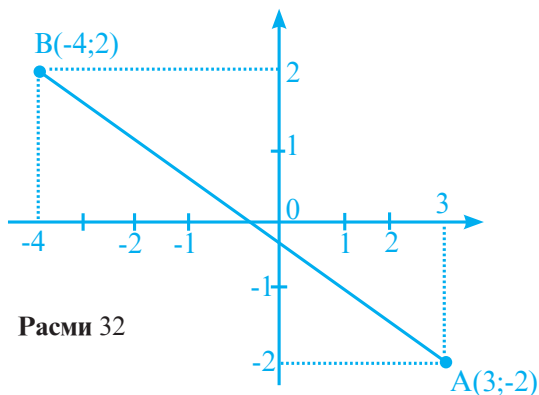
$$\vec{O} = (0; 0).$$

Дарозии вектори \overline{AB} ё бузургии мутлақи вектори \overline{AB} баробар аст ба

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}.$$

Масъалаи 1. Агар $A(3; -2)$ ва $B(-4; 2)$ бошад, координатаҳои \overline{AB} ва $|\overline{AB}|$ -ро ёбед.

Маълум: $A(3; -2)$ ва $B(-4; 2)$ (расми 32).



Расми 32

Ҳал: $\overline{AB} = (-4 - 3; 2 + 2) = (-7; 4)$; $|\overline{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$.

Супориш: 1) Координатаҳои \overline{AB} ва $|\overline{AB}|$ -ро ёбед, агар а) А (4;5), В (8;8); б) А (2;8), В(-1;12) ва В) А (3;4) В(15;9) бошад.

2) Вектори \overline{OM} ва бузургии мутлақи онро ёфта, дар системаи координатаҳо тасвир намоед:

а) О (0;0) ва М(3;4);

б) О (0;0) ва М (6;8)

в) О (0;0) ва М(-3;4);

г) О (0;0) ва М(-3;-4).

Теорема. Векторҳои баробар координатаҳои мувофиқи баробар доранд. ИСБОТИ ИН ТЕОРЕМАРО БА ВОСИТАИ ПАРАЛЛЕЛ-КЎЧОНӢ ИЧРО НАМОЕД.

Инак, агар $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ва $\vec{b} = (b_1; b_2)$ буда, $\vec{a} = \vec{b}$ бошад, он гоҳ $a_1 = b_1$ ва $a_2 = b_2$ мешавад.

Масъалаи 2. Се нуқтаи А (1;1), В(-1;0), С (0; 1) дода шу-
дааст.

Нуқтаи D(x; y)-ро тарзе ёбед, ки $\overline{AB} = \overline{CD}$ шавад.

Маълум: А (1;1), В(-1; 0), С (0;1), $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Маълум: D (x;y).

Ҳал. $\overline{AB} = (-1 - 1; 0 - 1) = (-2; -1)$; $\overline{CD} = (x - 0; y - 1) = (x; y - 1)$.

Аз баробарии ин векторҳо бармеояд, ки

$x = -2$; $y - 1 = -1$; $y = 0$.

Ҷавоб: D(-2;0).

2) Дар масъалаи 2 нуқтаи D (x; y)-ро тарзе ёбед, ки $\overline{AB} = \overline{BD}$ бошад.

2. Ҷамъи векторҳо

Таъриф. Суммаи векторҳои $\vec{a} = (x_A; y_A)$ ва $\vec{b} = (x_B; y_B)$ гуфта, чунин вектори \vec{c} -ро меноманд, ки координатаҳои ҷамъи онҳо ин аст:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_A; y_A) + (x_B; y_B) = (x_A + x_B; y_A + y_B).$$

Дар геометрия се тарзи чамъи векторҳо мавҷуд аст: 1) чамъи векторҳо ба воситаи координатаҳо; 2) қоидаи секунҷагии чамъи векторҳо; 3) қоидаи параллелограмм.

а) Қоидаи секунҷагии чамъи векторҳо

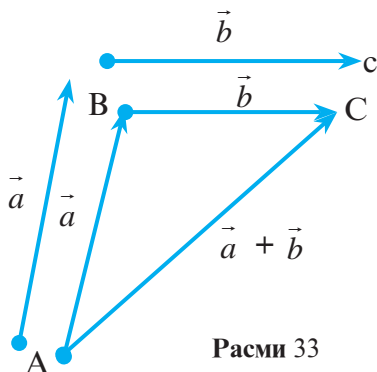
Масъалаи 3. Суммаи векторҳои \vec{a} ва \vec{b} -ро созед.

Маълум: \vec{a} ва \vec{b} .

Матлуб: \vec{a} ва \vec{b} .

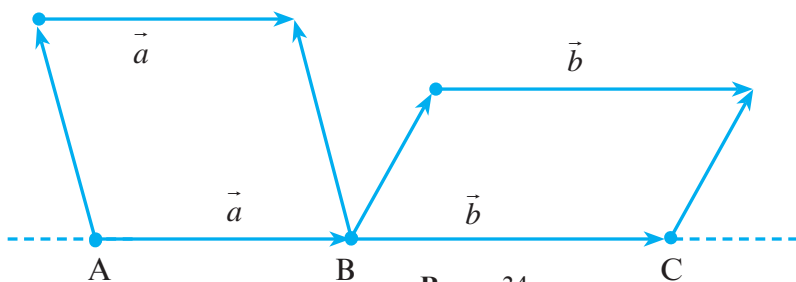
Низоми сохтан:

- 1) Интихоби векторҳои \vec{a}, \vec{b} ва нуқтаи А (расми 33).
- 2) Сохтани $\overline{AB} = \vec{a}$.
- 3) Сохтани $\overline{BC} = \vec{b}$.
- 4) Сохтани \overline{AC} .



Расми 33

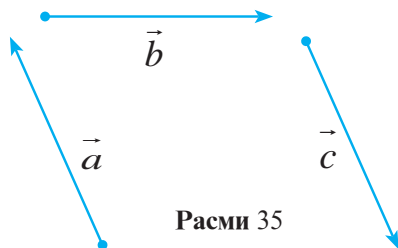
Матлуб. $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ё $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Агар векторҳои \vec{a} ва \vec{b} ҳамсамт бошанд, векторҳои \vec{a}, \vec{b} ва $\vec{a} + \vec{b}$ дар як хатти рост меҳобанд (расми 34).



Расми 34

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

Супориш. Векторҳои дар расми 35 тасвирёфтаи \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} -ро чамъ кунед.



Расми 35

б) Қоидаи параллелограмм.

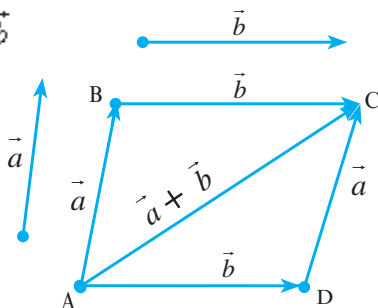
Масъалаи 4. Векторҳои \vec{a} ва \vec{b} дода шудаанд. $\vec{a} + \vec{b}$ -ро созед.

Маълум: \vec{a} ва \vec{b} .

Матлуб: $\vec{a} + \vec{b}$.

Низоми сохтан:

- 1) Интихоби векторҳои \vec{a} , \vec{b} ва нуқтаи А (расми 36).
- 2) Сохтани $\overline{AB} = \vec{a}$.
- 3) Сохтани $\overline{AD} = \vec{b}$.
- 4) Сохтани $\overline{BC} = \overline{AD}$.
- 5) Сохтани $\overline{DC} = \overline{AB}$.
- 6) Сохтани \overline{AC} .

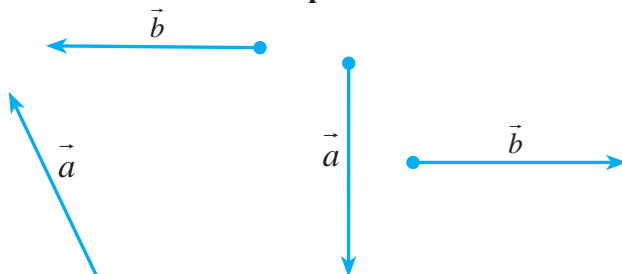


Расми 36

Матлуб: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \vec{a} + \vec{b}$.

Супориш. Аз рӯйи расми 37 (а,б) суммаи векторҳои \vec{a} ва \vec{b} -ро созед.

в) Хосиятҳои ҷамъи векторҳо



Расми 37

Суммаи векторҳо дорои хосиятҳои зерин мебошад:

- 1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 2) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
- 3) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 4) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Хосиятҳои суммаи векторҳо ро ба таври зайл низ навиштан мумкин аст:

- 1) $\overline{AB} + \vec{0} = \overline{AB}$;
- 2) $\overline{AB} + \overline{BA} = \vec{0}$;
- 3) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BC} + \overline{AB}$;
- 4) $\overline{AB} + (\overline{BC} + \overline{CD}) = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD}$.

Исботи ин хосиятҳо ро бо ёрии координатаҳо меорем.

Бигузур $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3)$ бошад.

- 1) $\vec{a} + \vec{0} = (x_1; y_1) + (0; 0) = (x_1 + 0; y_1 + 0) = (x_1; y_1) = \vec{a}$;
- 2) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (x_1; y_1) + (-x_1; -y_1) = (x_1 - x_1; y_1 - y_1) = \vec{0}$;
- 3) $\vec{a} + \vec{b} = (x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) = (x_2 + x_1; y_2 + y_1) = (x_2; y_2) + (x_1; y_1) = \vec{b} + \vec{a}$;
- 4) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (x_1; y_1) + [(x_2; y_2) + (x_3; y_3)] = (x_1; y_1) + (x_2 + x_3; y_2 + y_3) = (x_1 + (x_2 + x_3); (y_1 + (y_2 + y_3))) = ((x_1 + x_2) + x_3; (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) + (x_3; y_3) = [(x_1; y_1) + (x_2; y_2)] + (x_3; y_3) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Супориш. 1) Хосияти сеюми ҷамъи векторҳоро аз рӯйи қоидаи параллелограмм исбот намоед.

2) Хосияти чоруми ҷамъи векторҳоро аз рӯйи қоидаи секунҷагии ҷамъи векторҳо исбот намоед.

3) Агар $\vec{a} = (4; 3), \vec{b} = (-2; -3), \vec{c} = (6; 2)$ бошад:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} + \vec{c}$; в) $\vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ -ро ёбед.

3. Тарҳи векторҳо

а) Фарқи векторҳои $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ва $\vec{b} = (x_2; y_2)$ -ро ин тавр меёбанд:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (x_1; y_1) + (-x_2; -y_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$, яъне $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

б) Тарзи сохтани фарқи векторҳои \vec{a} ва \vec{b} .

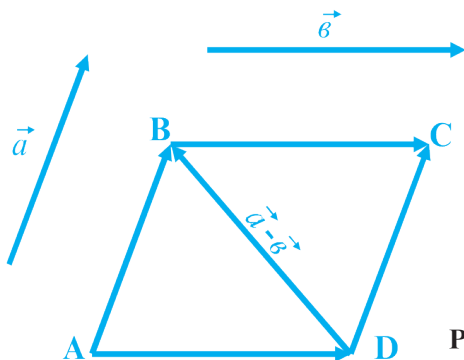
Низоми сохтан:

1) Интиҳоби векторҳои \vec{a}, \vec{b} ва нуқтаи A .

2) Сохтани $\overline{AB} = \vec{a}$.

3) Сохтани $\overline{AD} = \vec{b}$.

4) Сохтани \overline{DB} (расми 38).



Расми 38

ДиAGONALI калони параллелограмм $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, диагона-
ли хурдаш $\overline{DB} = \vec{a} - \vec{b}$ мебошад.

$$\vec{a} - \vec{b} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}.$$

Супориш. 1) Агар $\vec{a} = (5; 6)$ ва $\vec{b} = (3; 4)$ бошад, $\vec{a} - \vec{b}$ -ро ёбед.

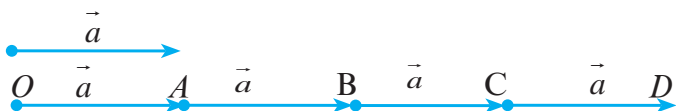
2) Векторҳои \vec{a} , \vec{b} дода шудаанд. Фарқи $\vec{a} - \vec{b}$ -ро бо қоидаи секунчагӣ созед.

Нишондод. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

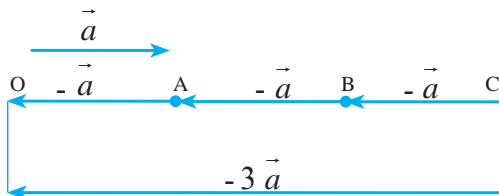
4. Зарби вектор ба адад

Таъриф. Ҳосили зарби вектори $\vec{a} = (x; y)$ ба адади λ векторест, ки координатаҳои λx ва λy мебошанд, яъне $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda(x; y) = (\lambda x; \lambda y)$.

Масъалаи 5. Вектори \vec{a} ва адади λ дода шудаанд, вектори $\lambda \cdot \vec{a}$ сохта шавад, агар: а) $\lambda = 4$; б) $\lambda = -3$ бошад.



Расми 39



Расми 40

Низомии сохтан:

- 1) Интихоби вектори \vec{a} .
- 2) Сохтани нури OA -и ба вектори \vec{a} ҳамсамт, агар $\lambda > 0$ бошад.
- 3) Сохтани нури OA -и муқобилсамти \vec{a} , агар $\lambda < 0$ бошад.
- 4) Сохтани $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{a}$, $\overline{CD} = \vec{a}$, агар $\lambda > 0$ бошад.
- 5) Сохтани $\overline{AO} = -\vec{a}$, $\overline{BA} = -\vec{a}$, $\overline{CA} = -\vec{a}$, агар $\lambda < 0$ бошад.

Матлуб: $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 4\vec{a}$ (расми 39).

$\overline{CO} = \overline{AO} + \overline{BA} + \overline{CB} = -\vec{a} - \vec{a} - \vec{a} = -3\vec{a}$ (расми 40).

Теорема. Бузургии мутлақи вектори $\vec{\lambda a}$ ба $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ баробар аст. Дар ҳолати $\lambda > 0$ ва $\vec{a} \uparrow \vec{o}$ будан, векторҳои \vec{a} ва $\vec{\lambda a}$ ҳамсамтанд. Дар ҳолати $\lambda < 0$ ва $\vec{a} \uparrow \vec{o}$ будан, векторҳои \vec{a} ва $\vec{\lambda a}$ муқобилсамтанд.

Исботи ин теорема мисли ҳалли масъалаи боло амалӣ карда мешавад.

4. Хосиятҳои зарби вектор ба адад

1) Барои ду адади дилхоҳи λ ва m :

$$(\lambda + m) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a}.$$

2) Барои ду вектори дилхоҳи \vec{a}, \vec{b} ва адади λ :

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}.$$

Ин хосиятҳоро мустақилона исбот намоед.

Супориш. 1) Агар λ ва \vec{a} маълум бошанд, $\lambda |\vec{a}|$ -ро ёбед:

а) $\lambda = 3, \vec{a} = (3; 4);$

в) $\lambda = -5, \vec{a} = (-6; 8);$

б) $\lambda = -2, \vec{a} = (-5; 12);$

г) $\lambda = \frac{1}{2}, \vec{a} = \left(\frac{3}{4}; 1\right).$

2) Векторҳои \vec{a} ва \vec{b} дода шудаанд. Вектори $2\vec{a} + 3\vec{b}$ -ро созед.

3) Агар $\vec{a} = (3; 4)$ ва $\vec{b} = (5; 12)$ бошад, вектори $5\vec{a} + 2\vec{b}$ ва $|5\vec{a} + 2\vec{b}|$ -ро ёбед.

5. Шарти коллинеарӣ будани ду вектор

Теорема. Агар векторҳои гайрисифрии \vec{a} ва \vec{b} коллинеарӣ бошанд, он гоҳ чунин адади λ мавҷуд аст, ки $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ мешавад.

Исбот. Агар векторҳои \vec{a} ва \vec{b} ҳамсамт бошанд, \vec{b} ва $\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)$ ҳамсамт буда, қиматҳои мутлақи баробар доранд.

$$\text{Пас, } \vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a}, \lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

Агар \vec{a} ва \vec{b} муқобилсамт бошанд, $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a}$ ва $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ мешавад.

Масъалаи 6. Иббот кунед, ки векторҳои $\vec{a} = (5; 6)$ ва $\vec{b} = (10; 12)$ коллинеарӣ мебошанд.

Ҳал. $\vec{b} = (10; 12) = (2 \cdot 5; 2 \cdot 6) = 2(5; 6) = 2 \cdot \vec{a}$; $\vec{b} = 2 \cdot \vec{a}$. Аз ин ҷо бармеояд, ки векторҳои \vec{b} ва \vec{a} коллинеарианд.

Агар векторҳои $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ва $\vec{b} = (x_2; y_2)$ коллинеарӣ бошанд, он гоҳ $\lambda = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ буда, $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ мебошад.

Супориш. 1) Иббот кунед, ки векторҳои $\vec{a} = (8; 6)$ ва $\vec{b} = (4; 3)$ коллинеарианд.

2) λ -ро ёбед, агар $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, $\vec{a} = (24; 32)$, $\vec{b} = (3; 4)$ бошад.

6. Зарби скалярии векторҳо

Таъриф. *Зарби скалярии векторҳои $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ва $\vec{b} = (x_2; y_2)$ гуфта, адади $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ -ро меноманд, яъне*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

Зарби скалярии $\vec{a} \cdot \vec{a}$ бо \vec{a}^2 ишора карда мешавад.

Теорема. *Баробарии $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ дуруст аст.*

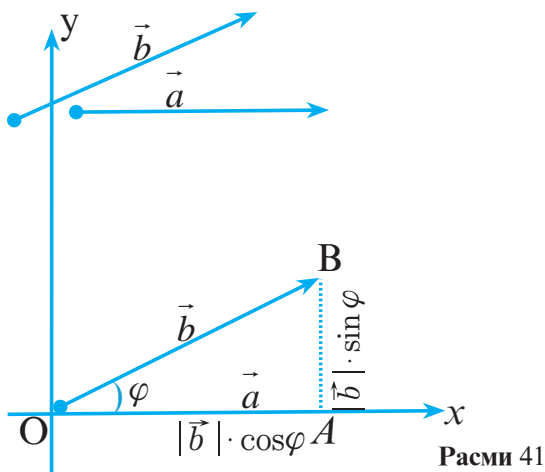
Иббот. Мувофиқи таъриф:

$$\vec{a} = (x; y), \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (x; y) \cdot (x; y) = x \cdot x + y \cdot y = x^2 + y^2 = |\vec{a}|^2,$$

яъне $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ аст.

Теорема. *Зарби скалярии векторҳо ба ҳосили зарби бузургии мутлақи ҳар кадоме аз ин векторҳо ва косинуси кунҷи байни онҳо баробар аст. Яъне $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.*

Исбот. Бигузор, \vec{a} ва \vec{b} ду вектори додашуда бошанд. Аз нуқтаи О векторҳои $\vec{OA} = \vec{a}$ ва $\vec{OB} = \vec{b}$ -ро мегузаронем. $\angle AOB = \varphi$.



Аз ин ҷо $\vec{OB} = \vec{b} = (|\vec{b}| \cdot \cos \varphi; |\vec{b}| \cdot \sin \varphi)$, $\vec{OA} = \vec{a} = (|\vec{a}|; 0)$;
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (|\vec{b}| \cdot \cos \varphi; |\vec{b}| \cdot \sin \varphi)(|\vec{a}|; 0) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi + 0 \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$
 $= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$.

Яъне, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.

Теорема. Агар векторҳои \vec{a} ва \vec{b} перпендикуляр бошанд, он гоҳ ҳосили зарби скалярияшон ба сифр баробар аст.

Маълум: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Мағлуб: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Исбот. Аз шарти перпендикулярӣ векторҳои \vec{a} ва \vec{b} бармеояд, ки $\varphi = 90^\circ$ аст. Пас $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$.

Масъалаи 7. Исбот кунед, ки суммаи квадратҳои диагонаҳои параллелограмм ба суммаи квадратҳои тарафҳояш баробар аст.

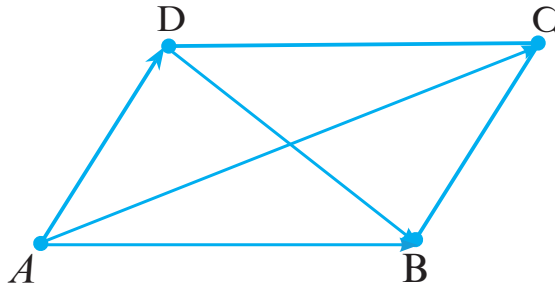
Маълум: ABCD – параллелограмм.

Матлуб: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Исбот. Дар расми 42:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \quad (2)$$



Расми 42

Баробариҳои (1) ва (2) -ро ба квадрат бардошта, чамъ мекунем:

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD};$$

$$\overrightarrow{DB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD};$$

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{DB}^2 = 2\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AD}^2.$$

Азбаски $\overrightarrow{AC}^2 = AC^2$, $\overrightarrow{DB}^2 = DB^2$, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$, $\overrightarrow{AD}^2 = AD^2$ аст, пас $AC^2 + DB^2 = 2AB^2 + 2AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Дар охир: $AC^2 + DB^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

Супориш. 1) Исбот кунед, ки агар d диагонали квадрат ва a тарафаш бошад, $d^2 = 2a^2$ аст.

2) Исбот кунед, ки агар дар ромб d_1 ва d_2 диагоналҳо буда, a тараф бошад, $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ аст.

3) Исбот кунед, ки агар дар росткунҷа d диагонал ва a, b тарафҳо бошанд, $d^2 = a^2 + b^2$ аст.

4) Зарби скалярии векторҳои \vec{a} ва \vec{b} -ро ёбед, агар

$\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (6; -2)$; $\vec{a} = (-3; -7)$, $\vec{b} = (2; 6)$ бошад.

5) Исбот кунед, ки векторҳои а) $\vec{a} = (4; 1)$ ва $\vec{b} = (1; -4)$;

б) $\vec{a} = (8; 2)$ ва $\vec{b} = (0, 5; -2)$ перпендикуляранд.

Кунчи байни векторҳои \vec{a} ва \vec{b} -ро бо формулаи зерин ҳисоб мекунаманд:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Агар $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ва $\vec{b} = (x_2; y_2)$ бошад, он гоҳ

$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Супориш. 1) Кунчи байни векторҳои $\vec{a} = (3; 4)$ ва $\vec{b} = (1; -3)$ -ро ёбед.

2) Кунчи байни векторҳои $\vec{a} = (3; 1)$ ва $\vec{b} = (1; -3)$ -ро ёбед.

7. Векторҳои воҳидӣ. Чудо кардани вектор ба векторҳои воҳидӣ

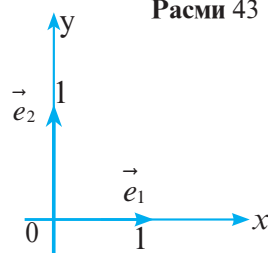
Таъриф. Векторе, ки дарозияш ба як баробар аст, вектори воҳидӣ ном дорад.

Вектори $\vec{e}_1 = (1; 0)$ вектори воҳидии тири абсисса ва вектори $\vec{e}_2 = (0; 1)$ вектори воҳидии тири ордината мебошад (расми 43).

Вектори дилхоҳи $\vec{a} = (x; y)$ -ро ин тавр ба векторҳои воҳидӣ чудо мекунаманд:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \nu \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 \\ \vec{a} &= x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 = x(1; 0) + y(0; 1) = \\ &= (x; 0) + (0; y) = (x; y). \end{aligned}$$

Аз ин ҷо $\nu = x$; $\mu = y$.



Масъалаҳо

1) Нуқтаҳои $A(0;1), B(1;0), C(1;2), D(2;1)$ дода шудаанд. Иббот кунед, ки векторҳои \overline{AB} ва \overline{CD} баробаранд.

2) Нуқтаҳои $A(3;0), B(0;4), C(3;4)$ қуллаҳои секунҷаи ABC мебошанд. Векторҳои $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ ва бузургии мутлақи онҳоро ёбед.

3) Дарозии вектори $\vec{a} = (5; m)$ ба 13 баробар аст. Адади m -ро ёбед:

4) Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ ва $|\vec{a} + \vec{b}|$ -ро ёбед, агар а) $\vec{a} = (1; -4), \vec{b} = (-4; 1)$; б) $\vec{a} = (2; 5), \vec{b} = (4; 3)$ бошад.

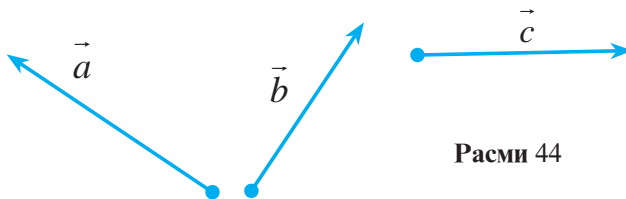
5) Дар параллелограмми $ABCD$ суммаи векторҳои зеринро ёбед:

- 1) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$; 2) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$;
3) $\overline{AB} + \overline{BC}$; 4) $\overline{AB} + \overline{BD}$.

6) Векторҳои \overline{AB} ва \overline{AC} дода шудаанд. Иббот кунед, ки $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{BC}$ аст.

7) Дар расми 44 векторҳои \vec{a}, \vec{b} ва \vec{c} дода шудаанд. Векторҳои зерин сохта шаванд:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 2) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; 3) $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Расми 44

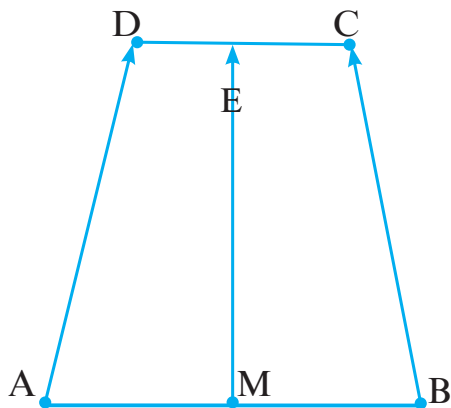
8) Векторҳои $\vec{a} = (3; 2)$ ва $\vec{b} = (0; -1)$ дода шудаанд. Вектори $-2\vec{a} + 2\vec{b}$ ва бузургии $|-2\vec{a} + 4\vec{b}|$ -ро ёбед.

9) Дарозии вектори $\lambda \cdot \vec{a}$ ба 5 баробар аст. λ -ро ёбед, агар:

а) $\vec{a} = (-6; 8)$; б) $\vec{a} = (3; -4)$ бошад.

10) Нуқтаи M миёнаҷойи порчаи AB мебошад. Агар O -нуқтаи ихтиёрӣ бошад, исбот кунед, ки $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OA})$ аст.

11) Нуқтаҳои M ва E миёнаҷойи порчаҳои AB ва CD мебошанд (Расми 45). Исбот кунед, ки $\vec{ME} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$ аст.



Расми 45

12) Векторҳои $\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{b} = (1; 1)$, $\vec{c} = (1; -2)$, $\vec{d} = (-2; -4)$ дода шудаанд. Кадоме аз ин векторҳо ҳамсамт ва кадомашон муқобилсамт мебошанд?

13) Векторҳои $\vec{a} = (1; 4)$ ва $\vec{b} = (-2; m)$ коллинеариянд. Қимати m -ро ёбед.

14) Кунҷи байни векторҳои $\vec{a} = (2; 2)$ ва $\vec{b} = \left(1; -\frac{1}{2}\right)$ -ро ёбед.

15) Агар $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ва кунҷи байни векторҳои \vec{a} ва \vec{b} 60° бошад, $|\vec{a} + \vec{b}|$ -ро ёбед.

16) Кунчи байни векторҳои \vec{a} ва $\vec{a} + \vec{b}$ -ро ёбед, агар $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ва кунчи байни векторҳои \vec{a} ва \vec{b} 30° бошад.

17) Нуқтаҳои $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(4;5)$ куллаҳои секунҷаи ABC мебошанд. Кунҷҳои секунҷаро ёбед.

18) Кунҷҳои секунҷаи куллаҳояш $M(0;\sqrt{3})$, $P(2;\sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ -ро ёбед.

19) Барои кадом қиматҳои m векторҳои $\vec{a} = (3;4)$ ва $\vec{b} = (m;2)$ перпендикуляранд?

20) Чор нуқтаи $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$, $D(-1;2)$ дода шудаанд. Исбот кунед, ки чоркунҷаи $ABCD$ росткунҷа аст.

21) Бо ёрии векторҳо исбот кунед, ки диагоналҳои ромб перпендикуляранд.

22) Исбот кунед, ки чоркунҷаи $ABCD$ квадрат аст, агар $A(0;0)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$, $D(-1;2)$ бошад.

23) Кадоме аз векторҳои зерин воҳидиянд:

$$\vec{a} = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right), \vec{b} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), \vec{c} = (0;1), \vec{d} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)?$$

24) Вектори воҳидии \vec{e} -ро ёбед, ки ба вектори $\vec{a} = (6;8)$ ҳамсамт бошад.

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Вектор чист?
2. Бузургии векторӣ аз дигар бузургиҳо бо чӣ фарқ мекунад?
3. Кадом бузургиҳои векториро медонед?
4. Дарозии вектор ё бузургии мутлақи векторро чӣ гуна меёбанд?
5. Формулаи бузургии мутлақи вектори $\vec{a} = (x; y)$ -ро нависед.
6. Формулаи бузургии мутлақи вектори \overline{AB} -ро нависед, агар $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ бошад.
7. Таърифи баробарии векторҳоро баён кунед.
8. Ҳолатҳои ҷойгиршавии векторҳоро фаҳмонед.
9. Таърифи векторҳои коллинеариро баён кунед.
10. Суммаи векторҳоро ба воситаи координатаҳо яшон нависед.
11. Хосиятҳои ҷамъии векторҳоро номбар кунед.
12. Қоидаи секунҷагии ҷамъии векторҳоро баён кунед.
13. Ҷамъии векторҳоро аз рӯйи қоидаи параллелограмм нишон диҳед.
14. Фарқи векторҳоро баён намоед.
15. Зарби вектор ба адад кадом хосиятҳоро дорад мебошад?
16. Зарби скалярии векторҳоро баён кунед.
17. Кунҷи байни векторҳоро аз рӯйи кадом формула меёбанд?
18. Шарти коллинеарӣ будани векторҳоро фаҳмонед.
19. Шарти перпендикулярӣ векторҳоро баён кунед.
20. Диагоналҳои параллелограмм чӣ гуна хосият доранд?

21. Вектори сифрӣ чист?
22. Вектори воҳидӣ чист?
23. Теоремаро дар бораи зарби скалярии векторҳо баён кунед.
24. Векторро чӣ гуна ба векторҳои воҳидӣ чудо меку-
нанд?

ФАСЛИ Ш. МОНАНДӢ ВА ГОМОТЕТИЯ

§ 3.1. Порчаҳои мутаносиб

1. Нисбати порчаҳо

Бигузур порчаҳои $AB = a$ ва $CD = b$ дода шуда бошанд. Дарозии порчаи AB -ро ба дарозии порчаи CD тақсим мекунем:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} \text{ ё } AB:CD = a:b.$$

Таъриф. *Ҳосили тақсими дарозииҳои ду порчаро нисбати ин порчаҳо меноманд.*

Нисбати порчаҳо нишон медиҳад, ки як порча чанд ҳиссаи порчаи дигарро ташкил медиҳад.

Агар порчаи $AB = 3$ см ва порчаи $CD = 6$ см бошад,
 $AB:CD = 3\text{см}:6\text{см} = 1:2$.

Дар ин сурат мегӯянд, ки порчаҳои AB ва CD ҳамчун як бар ду нисбат доранд. Нисбати порчаҳо ба воҳиди андозакунӣ вобастагӣ надорад.

Масалан, $AB=4$ см ва $CD=12$ см; $AB=4$ м ва $CD=12$ м. Дар ҳар ду ҳолат $AB:CD = 4:12=1:3$ мебошад.

Масъалаи 1. Нуқтаи B дар порчаи $AC = 48$ см мехобад. Агар порчаҳои AB ва BC ҳамчун $3:5$ нисбат дошта бошанд, дарозии онҳоро ёбед.

Маълум: $AB + BC = AC$, $AB:BC = 3:5$ ва $AC = 48$ см.

Матлуб: AB ва BC .



Расми 46

Ҳал. Бигузур, x як ҳисса бошад, он гоҳ $AB = 3x$ ва $BC = 5x$ аст.

Аз $AB + BC = 48$ см бармеояд, ки $3x + 5x = 48$ буда, $x = 6$ см аст.

Аз ин ҷо: $AB = 3 \cdot 6$ см = 18 см ва $BC = 5 \cdot 6$ см = 30 см аст.

Ҷавоб: $AB = 18$ см; $BC = 30$ см.

Супориш. Агар $a+b=60$ м ва
 а) $a:b = 5:1$; б) $a:b = 1:2$; в) $a:b = 4:11$ бошад, дарозии порчаҳои a ва b -ро ёбед.

2. Порчаҳои мутаносиб

Таъриф. Агар нисбати порчаҳои a ва b ба нисбати порчаҳои c ва d баробар бошад, мегӯянд, ки порчаҳои a ва b бо порчаҳои c ва d мутаносибанд. Хамин тариқ, агар $a:b=c:d$ бошад, порчаҳои a ва b бо порчаҳои c ва d мутаносибанд.

Масъалаи 2. Маълум аст, ки $AB=10$ см, $CD=20$ см ва $A_1B_1=40$ см, $C_1D_1=80$ см мебошанд. Исробот кунед, ки порчаҳои AB ва CD бо порчаҳои A_1B_1 ва C_1D_1 мутаносибанд.

Ҳал. $AB:A_1B_1=10\text{ см}:40\text{ см}=1:4$; $CD:C_1D_1=20\text{ см}:80\text{ см}=1:4$.

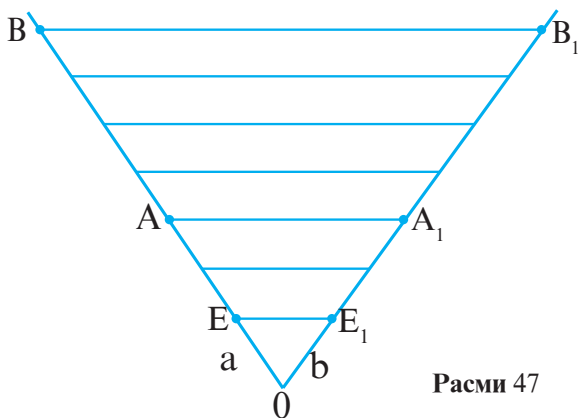
Теорема. Агар тарафҳои кунҷ бо хатҳои рости параллел бурида шаванд, порчаҳое, ки дар як тарафи кунҷ ҳосил мешаванд, ба порчаҳои мувофиқи дар тарафи дуюми кунҷ ҳосилшуда мутаносибанд.

Маълум: $\angle AOA_1, AA_1 \parallel BB_1$.

Матлуб $OA:OB=OA_1:OB_1$,

$OA:AB=OA_1:A_1B_1$.

Исробот. Дар расми 47 порчаи $OE = a$ ва $OE_1 = b$, $OA=3a$, $OB=7a$, $AB=4a$ мебошад. Мувофиқи теоремаи Фалес $OA_1=3b$, $OB_1=7b$ ва $A_1B_1=4b$ аст.



Расми 47

$OA:OB=3a:7a=3:7$ ва $OA_1:OB_1=3b:7b=3:7$ буда,

$OA:OB=OA_1:OB_1$ мебошад.

Айнан, хамин тарик, $OA:AB=3a:4a=3:4$ ва $OA_1:A_1B_1=3b:4b=3:4$ буда, $OA:AB=OA_1:A_1B_1$ аст.

Дар ҳолати умумӣ, агар $OA=na$, $AB=ma$ ва $OB=(n+m)a$ бошад, $OA_1=nb$, $A_1B_1=mb$ ва $OB=(n+m)b$ мешавад.

Дар натиҷа, $OA:OB=OA_1:OB_1$ ва $OA:AB=OA_1:A_1B_1$ мешавад.

Бояд қайд кард, ки ададҳои m ва n метавонанд яклухт ва ё касрӣ бошанд, аз ин мутаносибии порчаҳо вайрон наместавад.

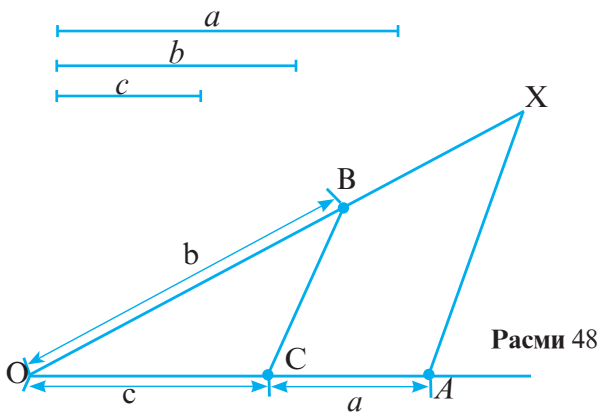
Масъалаи 3. Порчаҳои a , b , c дода шудаанд. Порчаи $x = \frac{bc}{a}$ сохта шавад.

Таҳлил. Аз худӣ ифодаи додашуда бармеояд, ки $x:b=c:a$ мебошад. Аз ин ҷо порчаҳои x ва b ба порчаҳои c ва a мутаносибанд.

Низоми сохтан:

1. Интихоби порчаҳои a , b , c .
2. Сохтани кунҷи тези қуллааш O .
3. Сохтани $OA=a$ ва $OC=c$ дар як тарафи кунҷ.
4. Сохтани $OB=b$ дар тарафи дуюми кунҷ.
5. Сохтани $AX \parallel CB$ (аз нуқтаи A).
6. X -нуқтаи буриши AX ва тарафи дуюми кунҷ.

Матлуб: $x=OX$ (расми 48).



Расми 48

Масъалаҳои амалӣ

1. Агар $a:b=c:x$ буда; $a=22$ см, $b=11$ см, $c=8a$ бошад, порчаи x -ро ёбед.

2. $a:x=c:b$, $a=20$ см, $c=5$ см ва $b=6$ см. Порчаи x -ро ёбед.

3. Порчаҳои AB , BC , CD дар як хатти рост хобида, бо ададҳои 4,5 ва 3 мутаносибанд. Агар $AD=60$ бошад, порчаҳои AB , BC ва CD -ро ёбед.

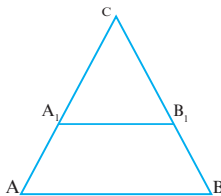
4. Порчаи $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ ро созед, агар порчаҳои a , b , c , d , e дода шуда бошанд.

5. Периметри секунҷа ба 48 см баробар буда, тарафҳояш ҳамчун 3:2:3 нисбат доранд. Тарафҳои секунҷаро ёбед.

6. Порчаи a дода шудааст. Порчаи x -ро созед, агар:

а) $x = \frac{1}{2}a$; в) $x = \frac{3}{4}a$.

б) $x = \frac{7}{4}a$
бошад.



Расми 49

7. Порчаҳои a ва b дода шудаанд. Порчаи $x = a-b$ -ро созед.

8. Дар расми 49 $A_1B_1 \parallel AB$, $AA_1=20$ см, $CA_1:CA = 2 : 3$ аст. Агар $BB_1=50$ см бошад, порчаҳои CA_1 , CA , CB_1 , CB -ро ёбед.

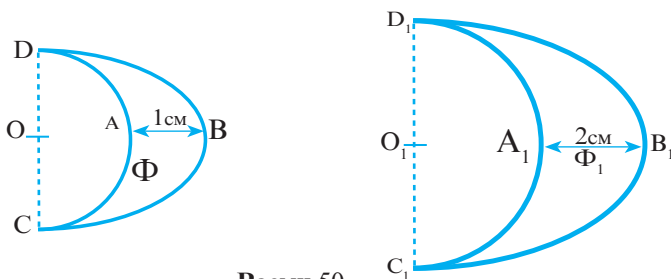
§ 3.2. Мафҳуми монандӣ

Ду расми як шахс, ки бо андозаҳои хурд ва калон гирифта шудаанд, ба якдигар монанд мебошанд.

Ду харитаи географии Тоҷикистон, ки бо андозаҳои гуногун тартиб дода шудаанд, ба якдигар монанданд.

Аз ҳаёт боз кадом ашё ё фигураҳои монандро мисол овардан мумкин аст?

Ба расми 50 нигаред. Шумо ду фигураи Φ ва Φ_1 -и бо ҳам монандро мебинед.

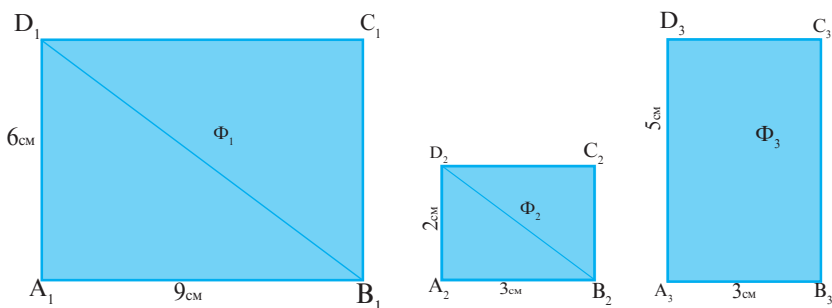


Расми 50

Ҳар ду фигура зохиран монанд буда, андозаҳояшон фарқ мекунанд.

Масалан, дар фигураи Φ , $AB=1$ см ва $CD=2$ см буда, дар фигураи Φ_1 : $A_1B_1=2$ см ва $C_1D_1=4$ см аст.

Андозаҳои фигураи Φ_1 аз андозаҳои фигураи Φ ду баробар калонанд.



Расми 51

Дар расми 51 нақшаи се қитъаи замин дода шудааст. Ҳарсеи онҳо росткунҷа мебошанд.

Ҳар се тасвир дар назар бо сабаби росткунҷа буданашон монанданд.

Андозаҳоро муқоиса менамоем:

1) $A_1B_1:A_2B_2=9:3=3$; $A_1D_1:A_2D_2=6:2=3$. Аз ин ҷо фигураи Φ_1 ба фигураи Φ_2 монанд аст, чунки $A_1B_1:A_2B_2=A_1D_1:A_2D_2=3$ мебошад. Яъне, андозаҳои фигураи Φ_2 аз андозаҳои фигураи Φ_1 се баробар хурд мебошанд.

Дар фигураи Φ_1 : $B_1D_1 = \sqrt{A_1D_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$ см.

Дар фигураи Φ_2 : $B_2D_2 = \sqrt{A_2D_2^2 + A_2B_2^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ см.

$B_1D_1 : B_2D_2 = \sqrt{117} : \sqrt{13} = \sqrt{9} = 3$.

2) $A_1B_1 : A_3B_3 = 9 : 3 = 3$; $A_1D_1 : A_3D_3 = 6 : 5 = 1\frac{1}{2}$, яъне $A_1B_1 : A_3B_3 \neq A_1D_1 : A_3D_3$.

Дар ин чо фигураҳои Φ_1 ва Φ_3 монанд нестанд, зеро андозаҳо ба миқдори баробар кам нашудаанд. Акнун шумо мустақилона андозаҳои фигураҳои Φ_2 ва Φ_3 -ро муқоиса намуда, дар бораи монанд будан ё набудани онҳо хулоса бароред.

Аз гуфтаҳои боло бармеояд, ки масофаи байни ду нуқтаи мувофиқи шаклҳои монанд аз ҳамдигар k баробар фарқ мекунанд.

Мисолҳои овардашуда имкон медиҳанд, ки таърифи фигураҳои монандро дохил кунем.

Таъриф. Ду фигурае, ки шакли зоҳирияшон як буда, андозаҳои монанди k маротиба фарқ мекунанд, фигураҳои монанд номида мешаванд. Адади k -коэффитсиенти монандии фигураҳо ном дорад.

Агар фигураи Φ ба фигураи Φ_1 бо коэффитсиенти k монанд бошад, чунин менависанд: $\Phi_1 \stackrel{k}{\sim} \Phi$.

Таъриф. Табдилдиҳие, ки фигураи дилхоҳи Φ -ро ба фигураи ба он монанди Φ_1 бо коэффитсиенти k табдил медиҳад, табдилдиҳии монандӣ номида мешавад.

Хосиятҳои монандии фигураҳо инҳоянд:

1. Агар фигураи Φ ба фигураи Φ_1 бо коэффитсиенти k монанд буда, x ва y нуқтаҳои фигураи Φ , x_1 ва y_1 мувофиқан нуқтаҳои фигураи Φ_1 бошанд, $x_1y_1 = k \cdot xy$ мебошад.

Мисолҳои дар аввали ҳамин параграф овардашуда дурустии ин хосиятро нишон медиҳанд.

2. Ду хатти ростии дилхоҳ монанданд.

3. Ду нури дилхоҳ монанданд.

4. Ду порчаи дилхоҳ монанданд.

5. Агар $\Phi \sim \Phi_1$ бошад, $\Phi_1 \stackrel{1}{\sim} \Phi$ мебошад.

Исбот. $\Phi \sim \Phi_1$. Аз ин бармеояд, ки $x_1 y_1 = xy = 1 \cdot xy$. Аз ин чо $\Phi \stackrel{1}{\sim} \Phi_1$.

6) Фигураи дилхоҳ ба худаш монанд аст.

7) Ду кунчи баробар монанд мебошанд.

8) Агар $\Phi_1 \stackrel{k}{\sim} \Phi$ бошад, он гоҳ $\Phi \stackrel{\frac{1}{k}}{\sim} \Phi_1$ аст.

Исбот. $\Phi_1 \stackrel{k}{\sim} \Phi$. Ин чунин маъно дорад, ки $x_1 y_1 = k \cdot xy$ буда, $xy = \frac{1}{k} x_1 y_1$ мебошад. Аз ин бармеояд, ки $\Phi \stackrel{\frac{1}{k}}{\sim} \Phi_1$ аст.

9) Агар $\Phi_1 \stackrel{k_1}{\sim} \Phi$ ва $\Phi_2 \stackrel{k_2}{\sim} \Phi_1$ бошад, $\Phi_2 \stackrel{k_1 \cdot k_2}{\sim} \Phi$ мешавад.

Исбот. Аз $\Phi_1 \stackrel{k_1}{\sim} \Phi$ ва $\Phi_2 \stackrel{k_2}{\sim} \Phi_1$ бармеояд, ки $x_1 y_1 = k_1 \cdot xy$ ва $x_2 y_2 = k_2 \cdot x_1 y_1$. Аз ин чо $x_2 y_2 = k_2 \cdot k_1 \cdot xy$ буда, $\Phi_2 \stackrel{k_1 \cdot k_2}{\sim} \Phi$ мебошад.

Аз хосиятҳои монандӣ натиҷаи зерин мебарояд.

Натиҷа. Агар ду фигура монанд бошанд, кунҷҳои мувофиқашон баробар ва порчаҳои мувофиқашон мутаносиб мешаванд.

Агар порчаҳои AB ва BC ба порчаҳои $A_1 B_1$ ва $B_1 C_1$ мутаносиб бошанд, баробарии зерин ҳама вақт иҷро мешавад:

$$AB:A_1 B_1 = BC:B_1 C_1.$$

Масъалаҳои амалӣ

1. Исбот кунед, ки ду фигураи нисбат ба маркази симметрии монанданд.

Исбот. Бигузур $\Phi_1 = S \cdot (\Phi)$ бошад. Шаклҳои нисбат ба маркази O симметрии бо ҳамдигар баробаранд. Яъне, $\Phi_1 = \Phi$. Аз ин чо бармеояд, ки $\Phi_1 \sim \Phi$.

2. Исбот кунед, ки ду фигураи нисбат ба тир симметрии монанданд.

3. Исбот кунед, ки агар параллелкӯчонӣ фигураи Φ -ро ба Φ_1 табдил дода бошад, он гоҳ Φ_1 ба Φ монанд аст.

4. Исбот кунед, ки агар гардиш фигураи Φ -ро ба Φ_1 табдил дода бошад, Φ_1 ба Φ монанд аст.

5. Исбот кунед, ки квадрат ва ромби тарафҳояшон мувофиқан ба a баробар, монанд нестанд.

6. Исбот кунед, ки росткунча ва параллелограмми тарафҳои ҳамсояшон ба a , b баробар, монанд нестанд.

7. Ду квадрат дода шудааст. Тарафи яке 15 см ва аз дигаре 3 см мебошад. Исбот кунед, ки квадратҳо монанданд. Коэффитсиенти монандиро ёбед.

8. Тарафҳои росткунҷаи $ABCD$ ба 16 см ва 18 см баробар буда, тарафҳои росткунҷаи $A_1B_1C_1D_1$ ба 32 см ва 36 см баробаранд. Оё ин росткунҷаҳо монанданд?

9. Росткунҷаи $ABCD$ ба росткунҷаи $A_1B_1C_1D_1$ монанд буда, $AB=5$ см, $AD=7$ см ва $A_1B_1=20$ см аст. Тарафи A_1D_1 -ро ёбед.

10. Ромби $ABCD$ ба ромби $A_1B_1C_1D_1$ монанд буда, $\angle A=30^\circ$ аст. Кунҷҳои ромби $A_1B_1C_1D_1$ -ро ёбед.

11. Квадрати $ABCD$ ба квадрати $A_1B_1C_1D_1$ бо коэффитсиенти $k=2$ монанд буда, квадрати $A_1B_1C_1D_1$ ба квадрати $A_2B_2C_2D_2$ бо коэффитсиенти $k=3$ монанд аст. Агар $AB=10$ м бошад, тарафҳои квадрати $A_2B_2C_2D_2$ -ро ёбед.

12. Оё параллелограмм ба трапетсия монанд шуда метавонад?

13. Оё нур ба хатти рост монанд шуда метавонад? Ҷавобро шарҳ диҳед.

14. Исбот кунед, ки нисбати периметрҳои ду росткунҷаи монанд ба коэффитсиенти монандӣ баробар аст.

§ 3.3. Монандии секунҷаҳо

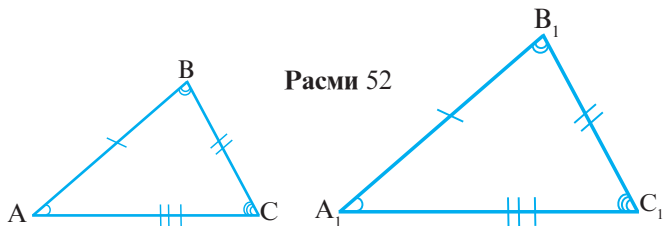
1. Таърифи монандии секунҷаҳо

Таъриф. Ду секунҷае, ки кунҷҳои мувофиқан баробар дошта, тарафҳои мувофиқашон мутаносибанд, секунҷаҳои монанд номида мешаванд. Ҳамин тариқ, агар

$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ бошад, он гоҳ $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$ ва $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$ мебошад (Расми 52).

Масъалаи 1. Секунҷаи мунтазами ABC дорои тарафи 6

см ва секунҷаи мунтазами $A_1B_1C_1$ дорои тарафи 18 см аст. Иббот кунед, ки ин секунҷаҳо монанданд.



Расми 52

Маълум: $AB=BC=AC=6$ см, $A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1=18$ см.

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ ва k .

Иббот. Аз мунтазам будани секунҷаи ABC бармеояд, ки $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ мебошад.

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ аст.

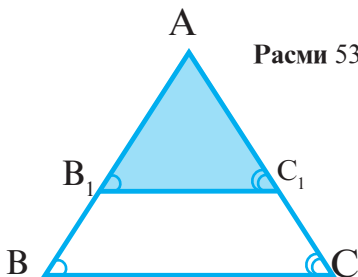
Аз $AB=BC=AC=6$ см ва $A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1=18$ см бармеояд, ки $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{18}{6} = 3$ аст.

Ҳамин тариқ, $k=3$ буда, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ мебошад.

2. Лемма. Агар ду тарафи секунҷаро бо хатти ростии ба тарафи сеюм параллел бурем, секунҷае ҳосил мешавад, ки ба секунҷаи додашуда монанд аст.

Маълум: $B_1C_1 \parallel BC$, ΔABC .

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.



Расми 53

Иббот. $B_1C_1 \parallel BC$. Аз ин ҷо бармеояд, ки $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$ ва $k = A_1B_1 : AB = A_1C_1 : AC$ аст (Расми 53).

Кунҷи A барои ҳар ду секунҷа умумӣ аст.

Шарти якуми монандии секунҷаҳо иҷро мешавад, чунки кунҷҳои мувофиқ баробаранд.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} \text{ ва } \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A} - \overrightarrow{AC_1}.$$

Аз тарафи дигар, $\overrightarrow{BA} = k \overrightarrow{B_1A}$, $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AC_1}$ мебошад.

Аз ин ҷо $\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{B_1A} - k \cdot \overrightarrow{AC_1} = k(\overrightarrow{B_1A} - \overrightarrow{AC_1}) = k \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$ ва $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{B_1C_1}$, пас $BC:B_1C_1=k$ аст.

Аз дурустии $AB:AB_1=AC:AC_1=BC:B_1C_1$ бармеояд, ки шартҳои дуҷумлаи монандии секунҷаҳо низ иҷро мешавад. Пас $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

3. Аломати якуми монандии секунҷаҳо

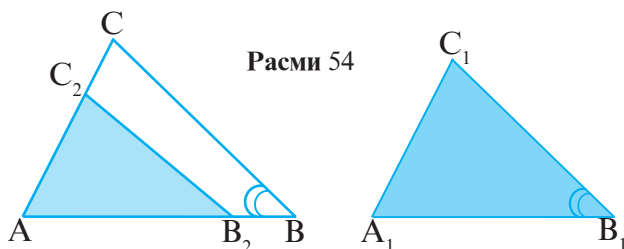
Теорема. Агар ду кунҷи як секунҷа мувофиқан ба ду кунҷи секунҷаи дигар баробар бошанд, ин секунҷаҳо монанданд.

Маълум: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Исбот. Дар нури AB порчаи $AB_2 = A_1B_1$ ва аз нуқтаи B_2 , $B_2C_2 \parallel BC$ -ро месозем (расми 54).

Азбаски $B_2C_2 \parallel BC$ аст, $\angle B_2 = \angle B$ ва $\angle C_2 = \angle C$ мебошад.



Пас, $\angle B_1 = \angle B_2$ аст. Аз дурустии $AB_2 = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle B_2 = \angle B_1$ мебарояд, ки $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ буда, $\angle C_2 = \angle C_1$, $AC_2 = A_1C_1$ ва $B_2C_2 = B_1C_1$ мебошад.

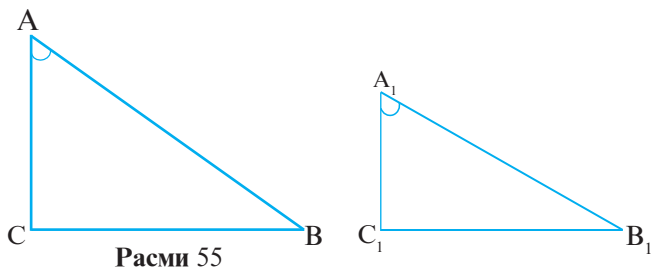
Аз ин ҷо бармеояд, ки $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ ва $\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC} = \frac{B_2C_2}{BC}$ аст.

Маълум аст, ки $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_2$, $\angle C = \angle C_2 = \angle C_1$ мебошад.

Дар охир $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

Масъалаи 2. Исбот кунед, ки агар ду секунҷаи росткунҷа яктой кунҷи тези баробар дошта бошанд, онҳо ба якдигар монанданд.

Маълум: $\Delta A_1 B_1 C_1$ ва ΔABC - секунҷаҳои росткунҷа, $\angle A = \angle A_1$ (Расми 55).



Расми 55

Матлуб: $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta ABC$.

Исбот. Ба мо маълум аст, ки $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$.

Мувофиқи аломати якуми монандии секунҷаҳо $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

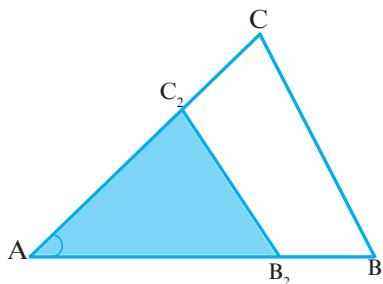
4. Аломати дуюми монандии секунҷаҳо

Теорема. Агар ду тарафи як секунҷа ба ду тарафи дигари секунҷа мутаносиб буда, кунҷҳои байни ин тарафҳо баробар бошанд, ин секунҷаҳо монанданд.

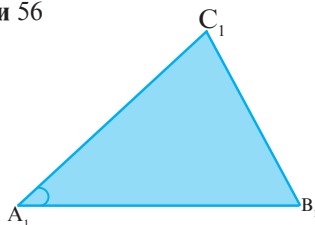
Маълум: $\angle A = \angle A_1$ ва $\frac{A_1 C_1}{AC} = \frac{A_1 B_1}{AB}$.

Матлуб: $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta ABC$.

Исбот. Дар расми 56 $AB_2 = A_1 B_1$ ва $B_2 C_2 \parallel BC$ мебошад.



Расми 56



Аз $B_2C_2 \parallel BC$ мебарояд, ки $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст. Исбот мекунем, ки $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B$ аст.

Маълум, ки $\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2$. Аз ин ҷо $\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC}$.

Азбаски $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{AB_2}{AB}$ мебошад, пас $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{AC_2}{AC}$ ва $A_1C_1 = AC_2$ аст.

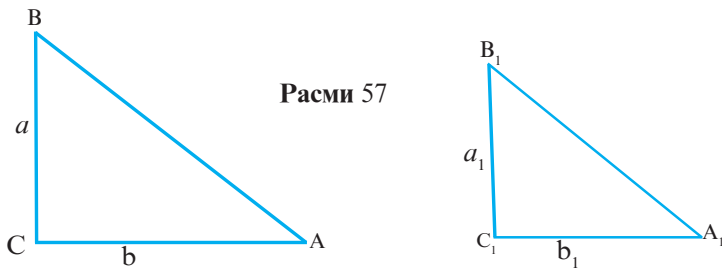
Аз дурустии $\angle A_1 = \angle A$, $A_1B_1 = AB_2$ ва $A_1C_1 = AC_2$ мебарояд, ки $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ ва $\angle B = \angle B_1 = \angle B_2$ аст.

Дар асоси аломати якуми монандии секунҷаҳо аз $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle B = \angle B_1$ бармеояд, ки $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

Масъалаи 3. Катетҳои ду секунҷаи росткунҷа мутаносибанд. Исбот кунед, ки ин секунҷаҳои росткунҷа монанданд.

Маълум: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ ва $\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$.

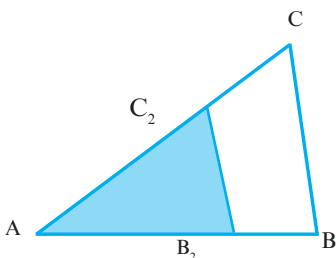
Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.



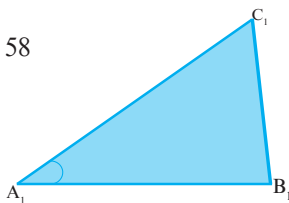
Исбот. Мувофиқи шарт $\angle C_1 = \angle C = 90^\circ$. Азбаски $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ ва $\angle C_1 = \angle C$ мебошад, дар асоси аломати дуҷуми монандии секунҷаҳо навиштан мумкин аст: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

5. Аломати сеюми монандии секунҷаҳо

Теорема. Агар се тарафи як секунҷа ба се тарафи секунҷаи дигар мутаносиб бошад, ин секунҷаҳо монанданд.



Расми 58



Маълум: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$.

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Исбот. Дар расми 58, $AB_2 = A_1B_1$ ва $B_2C_2 \parallel BC$ мебошад.

Маълум аст, ки $\Delta AB_2C_2 \sim \Delta ABC$ ва $\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC} = \frac{B_2C_2}{BC}$ мебошад.

Аз дурустии $AB_2 = A_1B_1$ бармеояд, ки $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{AC_2}{AC} = \frac{B_2C_2}{BC}$ аст.

Аз тарафи дигар, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$ аст.

Аз ду баробарии охирин маълум мешавад, ки $A_1C_1 = AC_2$ ва $B_1C_1 = B_2C_2$ аст.

Азбаски $AB_2 = A_1B_1$, $A_1C_1 = AC_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$ мебошад, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$ буда, $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle B = \angle B_2 = \angle B_1$ мешавад.

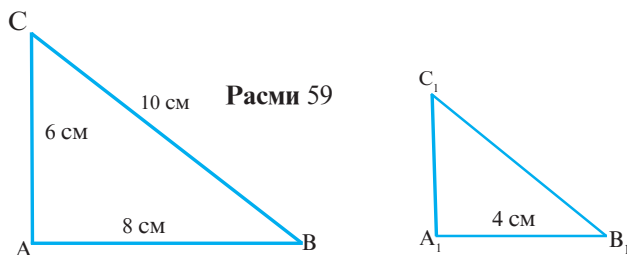
Аз ин ҷо мувофиқи аломати якуми монандии секунҷаҳо навиштан мумкин аст: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Масъалаи 4. Секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд буда, $AB=8$ см, $BC=10$ см, $AC=6$ см ва $A_1B_1=4$ см аст. Тарафҳои B_1C_1 ва A_1C_1 -ро ёбед.

Маълум: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $AB=8$ см ва $BC=10$ см, $AC=6$ см, $A_1B_1=4$ см.

Матлуб: A_1C_1 ва B_1C_1 (расми 59).

Ҳал. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Аз ин чо бармеояд, ки $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = 2$ аст.

($k=2$ коэффициенти монандӣ мебошад).

Пас, $A_1C_1 = AC:2 = 3$ см ва $B_1C_1 = BC:2 = 5$ см.

Ҷавоб: $A_1C_1 = 3$ см, $B_1C_1 = 5$ см.

Масъалаҳои амалӣ

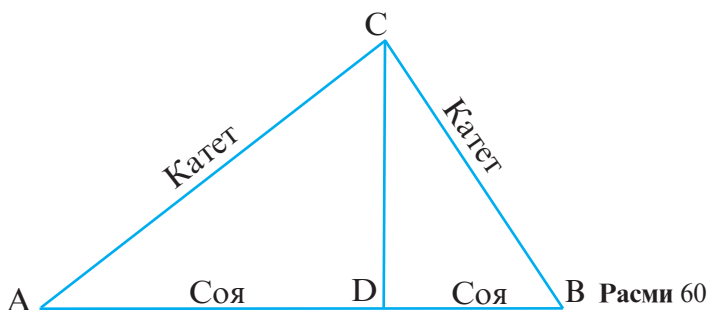
1. Исробот кунед, ки катети секунҷаи росткунҷа мутаносиби миёнаи байни гипотенуза ва сояи он дар гипотенуза мебошад.

Маълум: ABC секунҷаи росткунҷа, $\angle C = 90^\circ$.

Матлуб: $AC = \sqrt{AD \cdot AB}$, $BC = \sqrt{DB \cdot AB}$.

Исробот. Дар расми 60 сояи катети AC дар гипотенуза порчаи AD аст ва $\triangle ACD$ секунҷаи росткунҷа мебошад, чунки $\angle ADC = 90^\circ$ аст.

Секунҷаҳои росткунҷаи ABC ва ACD дорои кунҷи тези умумии A мебошанд, аз ин рӯ, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ мебошад. Аз монандии секунҷаҳои ABC ва ACD бармеояд, ки $AC:AB = AD:AC$ буда, $AC^2 = AD \cdot AB$ мебошад. Яъне, $AC = \sqrt{AD \cdot AB}$. Айнан ҳамин тавр, $\triangle BCD$ ба $\triangle ABC$ монанд буда, $BC^2 = DB \cdot AB$ ва $BC = \sqrt{DB \cdot AB}$ аст.



2. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC , CD баландии ба гипотенуза фурувардашуда мебошад. Агар $AD = 2$ см, $AB = 8$ см бошад, катетҳои секунҷаи росткунҷаро ёбед.

3. Дар расми 60 аз $AC = \sqrt{AD \cdot AB}$, $BC = \sqrt{DB \cdot AB}$ истифода бурда, теоремаи Пифагорро исбот кунед.

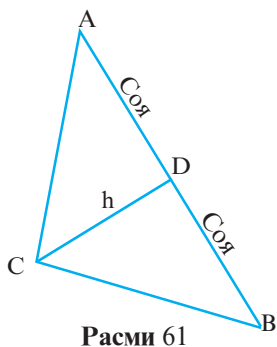
4. Теоремаи зеринро исбот мекунем: квадрати баландии ба гипотенузаи секунҷаи росткунҷа фурувардашуда ба ҳосили зарби қисмҳои гипотенуза, ки онҳоро ин баландӣ ҷудо мекунад, баробар аст.

Маълум: Дар $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $CD = h$.

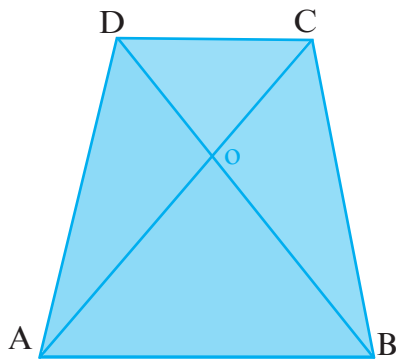
Маълум: $h = \sqrt{AD \cdot DB}$.

Исбот. $\angle A$ барои секунҷаҳои росткунҷаи ADC ва ABC кунҷи умумӣ мебошад, аз ин ҷо $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ аст (расми 61).

$\angle B$ барои секунҷаҳои BCD ва BAC умумӣ буда, $\triangle BCD \sim \triangle BAC$ аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки $\triangle ADC \sim \triangle BCD$ аст.



Расми 61



Расми 62

Аз монандии секунҷаҳои ADC ва BCD бармеояд, ки $DC:DB=AD:DC$, $DC^2=AD \cdot DB$, $DC=\sqrt{AD \cdot DB}$ аст.

5. Дар секунҷаи росткунҷаи балангии ба гипотенуза фурувардашуда онро ба қисмҳои 6 см ва 9 см ҷудо мекунад. Ин баланди ва катетҳои секунҷаи росткунҷаро ёбед.

6. Дар секунҷаи ABC , A_1B_1 хатти миёна мебошад. Исбот кунед, ки $\triangle CA_1B_1 \sim \triangle CAB$ аст.

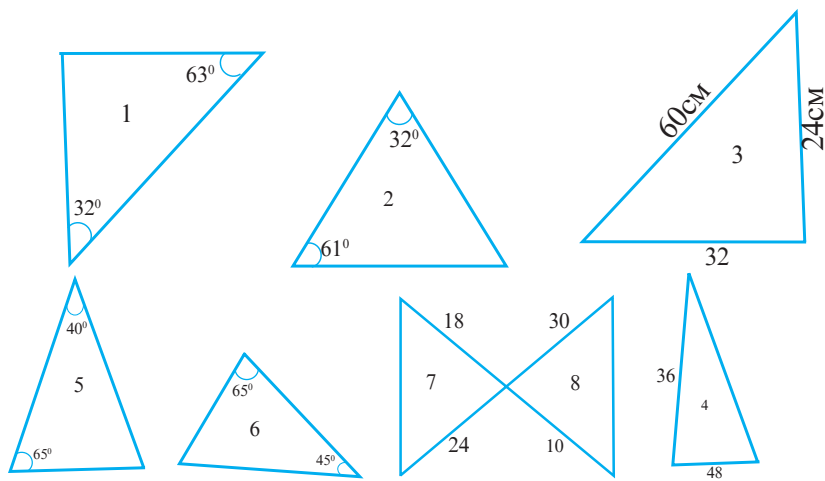
7. Дар секунҷаи ABC нуқтаҳои A_1 , B_1 , C_1 миёнаҷойии тарафҳо мебошанд. Исбот кунед, ки $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ аст.

8. Дар расми 62 $ABCD$ трапетсия мебошад. Исбот кунед, ки $\triangle OCD \sim \triangle OAB$ мебошад.

9. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ буда, $AB=4$ см, $BC=5$ см, $CA=7$ см ва $A_1B_1:AB=2$ мебошад.

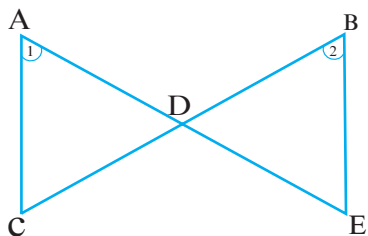
Тарафҳои секунҷаи $A_1B_1C_1$ -ро ёбед.

10. Кадоме аз секунҷаҳои дар расми 63 тасвирёфта монанданд. Ҷавобҳоро шарҳ диҳед.



Расми 63

11. Дар расми 64 $\angle 1 = \angle 2$ мебошад. Ҷойҳои холии ҷадвалро пур кунед.



	AC	AD	CD	BE	BD
а)	4	8	12		4
б)		5	10	18	
в)	9		15	12	14

Расми 64

12. Порчай $x = \sqrt{a \cdot b}$ -ро созед, агар a ва b дода шуда бошанд.

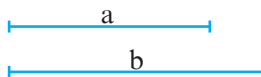
Маълум: Порчаҳои a ва b .

Маълум: $x = \sqrt{a \cdot b}$.

Таҳлил. Аз $x = \sqrt{a \cdot b}$ бармеояд, ки $x^2 = a \cdot b$ аст. Агар x балангии секунҷаи росткунҷа бошад, a ва b проексияи катетҳо дар гипотенуза мебошанд.

Низоми сохтан

- 1) Сохтани $AD = a$.
- 2) Сохтани $DB = b$, $AB = a + b$.
- 3) Сохтани давраи диаметраш AB .
- 4) Сохтани $CD \perp AB$.
- 5) C – буриши CD ва давра.



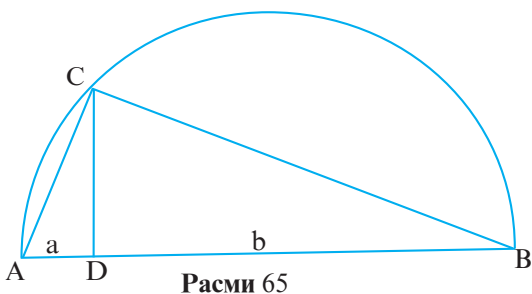
Маълум: $x = CD$.

Исбот. $\triangle ABC$ секунҷаи росткунҷа аст, чунки $\angle C$ ба диаметри AB така мекунад ($\angle C = 90^\circ$) (расми 65). CD балангии секунҷаи росткунҷаи ABC мебошад, аз ин ҷо $CD : a = b : CD$ ва $x = \sqrt{a \cdot b}$.

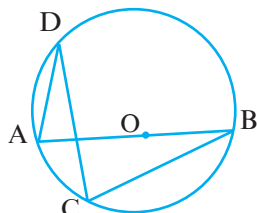
13. Аз рӯйи расми 66 исбот кунед, ки $\triangle ADE \sim \triangle BCE$ аст.

14. Дар расми 66, агар $BE = 8$ см, $AD = 12$ см, $\angle A = 60^\circ$ бошад, AE , DE , EC ва BC -ро ёбед.

15. Дар расми 65, агар $a = 4$ см ва $b = 16$ см бошад, порчаҳои CD , AC ва CB -ро ёбед.



Расми 65



Расми 66

§ 3.4. Гомотетия

1. Мафҳуми гомотетия

Калимаи “гомотетия” ба забони тоҷикӣ маънои монандии марказиро дорад.

Таъриф. Табдилдиҳии геометрии, ки нуқтаи дилхоҳи X -ро ба нуқтаи X_1 дар асоси шарт $\vec{OX}_1 = k \cdot \vec{OX}$ табдил медиҳад, гомотетияи марказаш нуқтаи O ва коэффитсиенташ k номида мешавад. Дар ин ҷо k ягон адади доимӣ аст.

Навишти $\Gamma_0^k(X) = X_1$ маънои зеринро дорад: “гомотетияи марказаш O ва коэффитсиенташ k нуқтаи X -ро ба нуқтаи X_1 табдил медиҳад”.

2. Сохтани шаклҳои гомотетӣ

Масъалаи 1. Маркази гомотетия – нуқтаи O , коэффитсиенташ k ва нуқтаи X дода шудааст. Нуқтаи X_1 -и ба нуқтаи X гомотетиро созад.

Низомии сохтан:

1) Интиҳоби нуқтаҳои O, X .

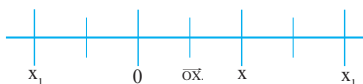
2) Сохтани хатти рости OX .

3) Сохтани $\vec{OX}_1 = k \cdot \vec{OX}$.

Бигузур, а) $k=3$, б) $k=-2$ бошад

(расми 67).

Матлуб: $X_1 = \Gamma_0^k(X)$.



Расми 67

Масъалаи 2. Маркази гомотетия нуқтаи O , коэффитсиенти гомотетия k ва порчай AB дода шудааст. Порчай A_1 ва $B_1 = \Gamma_0^k(AB)$ -ро созед. Исбот кунед, ки хатҳои рости гомотетӣ параллеланд.

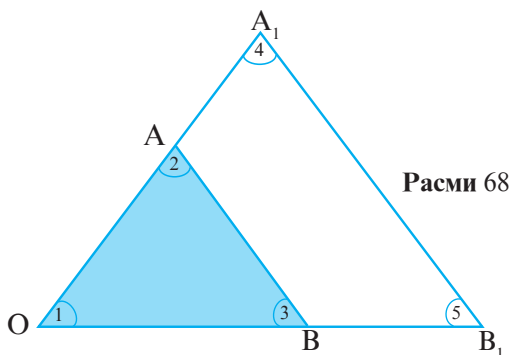
Маълум: O, K ва порчай AB .

Матлуб: $A_1B_1 = \Gamma_0^k(AB)$.

Низоми сохтан

1. Интихоби нуқтаҳои O, A, B ва AB .
2. Сохтани $A_1 = \Gamma_0^k(A)$.
3. Сохтани $B_1 = \Gamma_0^k(B)$.
4. Сохтани порчай A_1B_1 .

Матлуб: $A_1B_1 = \Gamma_0^k(AB)$ (расми 68).



Исбот мекунем, ки $AB \parallel A_1B_1$ аст. Аз $OA_1 = k \cdot OA$ ва $OB_1 = k \cdot OB$ ва умумӣ будани $\angle O$ бармеояд, ки $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$ мебошад. Аз ин ҷо $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 3 = \angle 5$ ва $AB \parallel A_1B_1$ мебошад.

Супориш. 1) Исбот кунед, ки дар ҳолати $k > 2$ будан, гомотетия вектор ва нурро ба вектор ва нури ҳамсамташ табдил медиҳад.

2) Исбот кунед, ки дар ҳолати $k < 0$ будан, гомотетия вектор ва нурро ба вектор ва нури муқобилсамт табдил медиҳад.

3) Исбот кунед, ки дар ҳолати $k = -1$ будан, гомотетия симметрияи марказӣ мебошад.

4) Агар $k = -2$ бошад, $\Gamma_0^k(AB)$ -ро созед.

Масъалаи 3. $\triangle ABC$, нуқтаи O ва коэффитсиенти гомоте-

тия k дода шудаанд. $\Gamma_0^k(\Delta ABC)$ -ро созед.

Маълум: $O, k, \Delta ABC$.

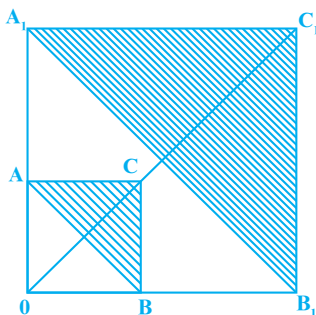
Матлуб: $\Gamma_0^k(\Delta ABC)$.

Низоми сохтан:

- 1) Интихоби нуктаи O ва ΔABC .
- 2) Сохтани $A_1 = \Gamma_0^k(A)$.
- 3) Сохтани $B_1 = \Gamma_0^k(B)$.
- 4) Сохтани $C_1 = \Gamma_0^k(C)$.
- 5) Сохтани порчаҳои A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 .

Масъалаи 4. Иббот кунед, ки гомотетия табдилдиҳии монандӣ аст, яъне гомотетия фигураи дилхоҳро ба фигураи монандаш табдил медиҳад.

Иббот. Мо ибботро дар мисоли секунҷа мегузаронем. Дар расми 69 $\Delta A_1B_1C_1 = \Gamma_0^k(\Delta ABC)$ аст.



Расми 69

Иббот мекунем, ки $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ мебошад. Аз $\Gamma_0^k(AC) = A_1C_1$, $\Gamma_0^k(BC) = B_1C_1$, $\Gamma_0^k(AB) = A_1B_1$ бармеояд, ки $A_1C_1 = |k| AC$, $B_1C_1 = |k| BC$, $A_1B_1 = |k| AB$ буда, $|k| = A_1C_1 : AC = B_1C_1 : BC = A_1B_1 : AB$ мебошад.

Мувофиқи аломати сеюми монандии секунҷаҳо $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

Супориш. 1) Масъалаи 3-ро дар мавриди $k = -2$ будан ҳал намоед.

2) Квадрати $ABCD$ дода шудааст. $\Gamma_0^k(ABCD)$ -ро иҷро намоед. Иббот кунед, ки фигураи ҳосилшуда ба квадрати $ABCD$ монанд аст.

3. Хосиятҳои гомотетия

- 1) Гомотетия нуқтаи дилхоҳро ба ягон нуқтаи дигар табдил медиҳад.
- 2) Гомотетия маркази гомотетияро ба худаш табдил медиҳад.
- 3) Гомотетия хатти рости аз марказ гузарандаро ба худаш табдил медиҳад.
- 4) Гомотетия хатти ростро ба хатти рости дигар, порчаҳо ба порчаи дигар ва нуҷро ба нуҷи дигар табдил медиҳад.
- 5) Гомотетия хатти рости аз марказ нагузарандаро ба хатти рости ба он параллел табдил медиҳад.
- 6) Гомотетия тартиби нуқтаҳои хатти ростро нигоҳ медорад.
- 7) Гомотетия бузургии кунҷро тағйир намедиҳад.
- 8) Гомотетия параллелии хатҳои ростро нигоҳ медорад.
- 9) Гомотетия табдилдиҳии монандӣ аст.
- 10) Гомотетия фигураи дилхоҳро ба фигураи ба он монанд табдил медиҳад.

Супоришҳо. 1) Кунҷи α дода шудааст. $\Gamma_0^k(\alpha) = \alpha_1$ -ро созад. Иҷбот кунед, ки $\alpha = \alpha_1$ аст.

2) $a \parallel b$ мебошад. $\Gamma_0^3(a \parallel b)$ -ро сохта, хатҳои рости a_1 ва b_1 -ро ҳосил кунед. Иҷбот кунед, ки $a_1 \parallel b_1$ аст.

3) Нуқтаи A дар порчаи BC меҳобад. $\Gamma_0^3(A)$, $\Gamma_0^3(BC)$ -ро сохта, нуқтаҳои A_1 , B_1 , C_1 -ро ҳосил кунед. Иҷбот кунед, ки нуқтаи A_1 дар порчаи B_1C_1 меҳобад.

4) Давраи марказаш O ва радиусаш R дода шудааст. $\Gamma_0^k[O(R)]$ -ро созад.

5) Нуқтаи A дар давраи $O(R)$ меҳобад. $\Gamma_0^k[O(R)]$ -ро созад. Иҷбот кунед, ки ҳар ду давра расандаанд.

Масъалаҳо

1. Секунҷаи ABC -и тарафҳояш $AB=5\text{см}$, $BC=3\text{см}$ ва $AC=4\text{см}$ дода шудааст. $\Gamma_0^3 \Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_1 B_1 C_1(ABC) = \Delta A_1 B_1 C_1$ -ро созед. Тарафҳои $A_1 B_1 C_1$ -ро ёбед.

2. Шашкунҷаи мунтазами $ABCDEM$ -ро созед, ки тарафаш 4см бошад. Агар а) $k=2$; б) $k=0,5$ буда, O -маркази давраи берункашида бошад $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 M_1 = \Gamma_0^k(ABCDEM)$ -ро созед. Тарафи $A_1 B_1$ -ро ёбед.

3. Параллелограмми $ABCD$ -ро созед, ки дар он $AB=6\text{см}$ ва $AD=8\text{см}$ бошад. $A_1 B_1 C_1 D_1 = \Gamma_0^k(ABCD)$ -ро сохта, периметри чоркунҷаи $A_1 B_1 C_1 D_1$ -ро ҳангоми а) $k=2$, б) $k=-2$, в) $k=\frac{1}{2}$ будан ёбед.

4. Росткунҷаи $ABCD$ -ро созед, ки тарафҳояш $AB=3\text{см}$, $AD=4\text{см}$ бошад. Нуқтаи O -нуқтаи буриши диагоналоҳо мебошад. $\Gamma_0^{2,5}(ABCD)$ -ро сохта, периметр ва масоҳати фигураи ҳосилшударо ҳисоб кунед.

5. Давраи $O(r)$ ва нуқтаи M дар ин давра дода шудааст. $\Gamma_M^k[O(r)]$ -ро созед, агар: а) $k=-3$; б) $k=3$; в) $k=-2$ бошад.

6. Давраи $O(r)$ ва нуқтаи M дар беруни давра дода шудааст. $\Gamma_M^k[O(r)]$ -ро созед, агар: а) $k=2$; б) $k=-2$ ва $OM=2r$ бошад.

7. Гомотетия нуқтаи X -ро ба X_1 ва нуқтаи Y -ро ба Y_1 табдил медиҳад. Агар нуқтаҳои X, Y ва X_1, Y_1 маълум бошанд, маркази гомотетияро ёбед.

8. Иҷбот кунед, ки нисбати периметрҳои фигураҳои гомотетӣ ба бузургии мутлақи коэффитсиенти гомотетия баробар аст.

9. Иҷбот кунед, ки нисбати масоҳатҳои фигураҳои гомотетӣ ба квадрати коэффитсиенти гомотетия баробар аст.

10. Иҷбот кунед, ки агар $\Gamma_0^k(\Phi) = \Phi_1$ ва $\Gamma_0^n(\Phi_1) = \Phi_2$ бошад, $\Gamma_0^{k \cdot n}(\Phi) = \Phi_2$ аст.

Савол ва супоришҳо барои санчиш

1. Нисбати порчаҳо чӣ маъно дорад?
2. Чӣ гуна порчаҳоро мутаносиб меноманд?
3. Теоремаро дар бораи хатҳои рости параллели буранидаи тарафҳои кунҷ баён кунед.
4. Порчаи $x = \frac{b \cdot c}{a}$ чӣ гуна сохта мешавад?
5. Чӣ гуна фигураҳоро монанд меноманд?
6. Табдилдиҳии монандиро баён кунед.
7. Таърифи секунҷаҳои монандро баён намоед.
8. Аломатҳои монандии секунҷаро баён намоед.
9. Хосиятҳои монандиро номбар кунед.
10. Гомотетия чист?
11. Сохтани бисёркунҷаҳои гомотетиро шарҳ диҳед.
12. Хосиятҳои гомотетияро баён кунед.
13. Кадом хосиятҳои табдилдиҳиҳо ҳам барои монандӣ ва ҳам барои ҳаракат иҷро мешаванд?
14. Кадом хосиятҳои ҳаракат барои гомотетия ва монандӣ ҷой надоранд?
15. Кадом хосиятҳои секунҷаи росткунҷа ба воситаи истифодаи мафҳуми монандӣ исбот карда мешаванд?
16. Аз монандии секунҷаҳои росткунҷа истифода бурда, теоремаи Пифагорро исбот намоед.
17. Аломатҳои монандии секунҷаҳои росткунҷаро баён намоед.
18. Порчаи $x = \sqrt{a \cdot b}$ -ро чӣ тавр месозанд?
19. Гомотетия аз монандӣ чӣ фарқ дорад?
20. Кадом вақт гомотетия симметрияи марказӣ мешавад?
21. Оё фигураҳои нисбат ба тир симметрӣ монанд шуда метавонанд?
22. Периметрҳои бисёркунҷаҳои монанд ва коэффитсиенти монандӣ чӣ гуна вобастагӣ доранд?
23. Масоҳатҳои бисёркунҷаҳои монанд ва коэффитсиенти монандӣ чӣ гуна вобастагӣ доранд?
24. Исбот кунед, ки шаклҳои гомотетӣ бо ҳам монанданд.

ФАСЛИ IV. ТАТБИҚИ МОНАНДӢ, ГОМОТЕТИЯ ВА МЕТОДИ КООРДИНАТАҶО

§ 4.1. Хосияти биссектрисаи секунча

Теорема. Биссектрисаи кунчи дарунии секунча тарафи муқобилро ба порчаҳое ҷудо мекунад, ки ба тарафҳои ба онҳо часпида мутаносибанд.

Маълум: $\triangle ABC$, AD – биссектрисаи кунчи A .

Матлуб: $BD:AB=DC:AC$.

Исбот. Дар расми 70: $CE \parallel DA$.

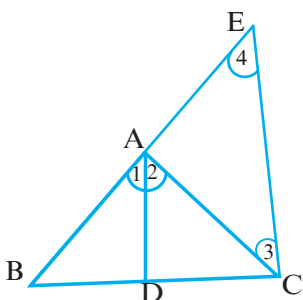
Аз ин ҷо мебарояд, ки $\angle 4 = \angle 1$ ва $\angle 3 = \angle 2$ аст. Маълум, ки $\angle 1 = \angle 2$ аст. Аз дурустии $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$ ва $\angle 3 = \angle 2$ бармеояд, ки $\angle 3 = \angle 4$ буда, $\triangle ACE$ баробарпахлу аст, яъне $AC = AE$. $AB:AE = BD:DC$, $AE = AC$ мебошад, бинобар ин $AB:AC = BD:DC$ мешавад. Инак, $BD:AB = DC:AC$.

Масъалаи 1. Биссектрисаи кунчи A -и секунчаи ABC баландии BD -ро дар нуктаи O мебурад. Агар $\angle A = 60^\circ$ бошад, $OD:OB$ -ро ёбед.

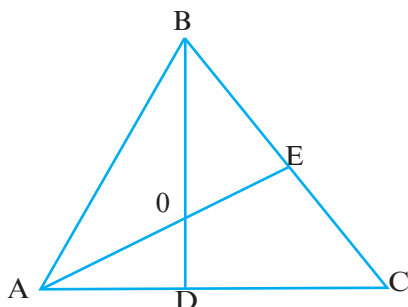
Маълум: $BD \perp AC$, $\angle A = 60^\circ$, AO -биссектриса.

Матлуб: $BO:OD$

Ҳал. Дар расми 71 AO биссектрисаи кунчи BAD аст.



Расми 70



Расми 71

Аз ин ҷо $AB:AD = BO:OD$. $\triangle ABD$ секунчаи росткунча мебошад.

Пас, $\angle B=90^\circ$ - $\angle A=90^\circ-60^\circ=30^\circ$ ва $AD=\frac{1}{2}\cdot AB$ ё $AB=2AD$.

$BO:OD=AB:AD=2AD:AD=2:1$, яъне $BO:OD=2:1$ ё

$OD:OB=1:2$ аст.

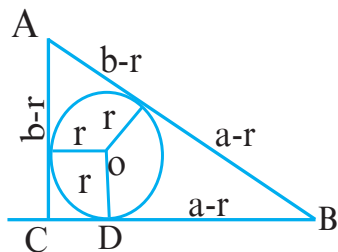
Теорема. Нуқтаи буриши биссектрисаҳои кунҷҳои дарунчи секунҷа маркази давраи дарункашида аст.

Исботи ин теорема ба шумо ҳавола карда мешавад.

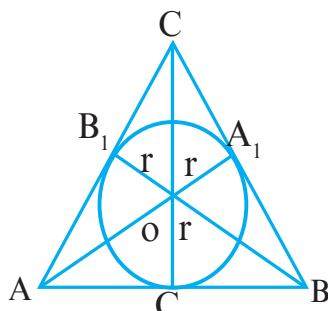
Масъалаи 2. a, b – катетҳо, c – гипотенуза ва r – радиуси давраи дарункашидаи секунҷаи росткунҷа аст. Исбот кунед,

ки $r = \frac{a+b-c}{2}$ мебошад.

Нишондод. Ҳалро мувофиқи расми 72 иҷро намоед.



Расми 72



Расми 73

Масъалаи 3. Агар a, b, c – тарафҳои секунҷа буда, r радиуси давраи дарункашида бошад, исбот кунед, ки $r = \frac{2S}{a+b+c}$ ё $S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = p \cdot r$ мебошад.

Низоми ҳал

Маълум ва матлубро аз рӯи расми 73 муқаррар кунед.

- 1) Масоҳати $\triangle AOB$ -ро ёбед.
- 2) Масоҳати $\triangle AOC$ -ро ёбед.
- 3) Масоҳати $\triangle BOC$ -ро ёбед.
- 4) Ҳар се масоҳатро ҷамъ намоед. Он гоҳ масоҳати секунҷаи ABC -ро ҳосил мекунед.
- 5) Аз формулаи ҳосилшуда r -ро ёбед.

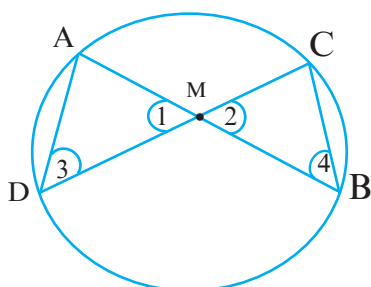
§ 4.2. Хосияти хордаҳои дар як нуқта буранда

Теорема. Агар ду хордаи давра дар як нуқта ҳамдигарро буранд, ҳосили зарби порчаҳои хордаҳо бо ҳам баробаранд.

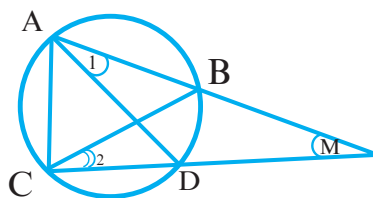
Маълум: AB ва CD хордаҳои дар нуқтаи M буранда.

Матлуб: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Исбот. Дар расми 74 $\angle 1$ ва $\angle 2$ ҳамчун кунҷҳои амудӣ баробаранд: $\angle 1 = \angle 2$. Кунҷҳои 3 ва 4 ба камони AC такя мекунанд, аз ин рӯ $\angle 3 = \angle 4$ мебошад.



Расми 74



Расми 75

Азбаски $\angle 1 = \angle 2$ ва $\angle 3 = \angle 4$ аст, пас $\triangle AMD \sim \triangle CMB$ буда, $MD : MB = AM : CM$ мебошад. Аз ин ҷо $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ аст.

Масъалаи 1. Дар расми 74, $CM = 4$ см ва $MD = 18$ см аст. Агар $AM : MB = 1 : 2$ бошад, дарозии хордаи AB -ро ёбед.

2. Хосияти ду бурандаи аз як нуқта ба давра гузаронидашуда

Теорема. Агар аз як нуқта ба давра ду буранда гузаронида шуда бошанд, ҳосили зарби бурандаҳо ва қисми беруниашон ба ҳам баробаранд.

Маълум: MA ва MC – бурандаҳо, MB ва MD – қисмҳои берунӣ.

Матлуб: $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Исбот. Кунҷҳои 1 ва 2 ба камони BD таъя мекунанд, аз ин рӯ, $\angle 1 = \angle 2$ мебошад (расми 75). Аз тарафи дигар, $\angle M$ барои секунҷаҳои MAD ва MCB кунҷи умумӣ мебошад. Аз ин бармеояд, ки $\triangle AMD \sim \triangle CMB$ буда, $AM:MC = DM:BM$ мебошад. Аз ин ҷо $AM \cdot BM = MC \cdot DM$ аст.

Масъалаи 2. Дар расми 75 AM -ро ёбед, агар $BM = 3$ см, $MC = 15$ см ва $DM = 5$ см бошад.

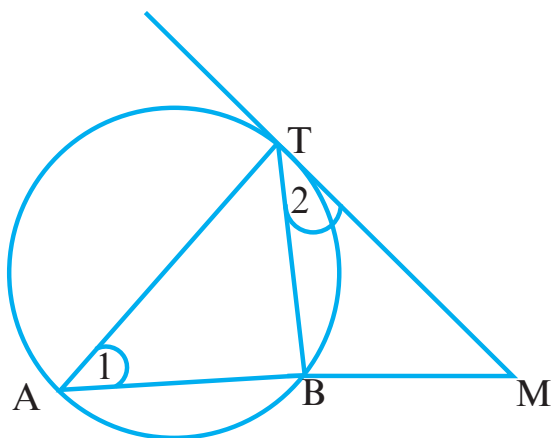
Теорема. Агар аз як нуқта ба давра буранда ва расанда гузаронида шуда бошад, ҳосили зарби буранда ва қисми беруниаш ба квадрати масофаи байни нуқтаи расиш баробар аст.

Маълум: MT – расанда, AM – буранда, BM – қисми беруни.

Маълум: $MT^2 = AM \cdot BM$.

Исбот. Дар расми 76 $\angle 1 = \frac{1}{2} \overset{\frown}{TB}$ ва $\angle 2 = \frac{1}{2} \overset{\frown}{TB}$ аст, аз ин ҷо $\angle 1 = \angle 2$ бармеояд. Пас, $\triangle ATM \sim \triangle TBM$ буда, $AM:TM = TM:BM$ мебошад. Инак, $TM^2 = AM \cdot BM$.

Масъалаи 3. Дар расми 76 $AB = 20$ см, $BM = 5$ см мебошад. TM -ро ёбед.

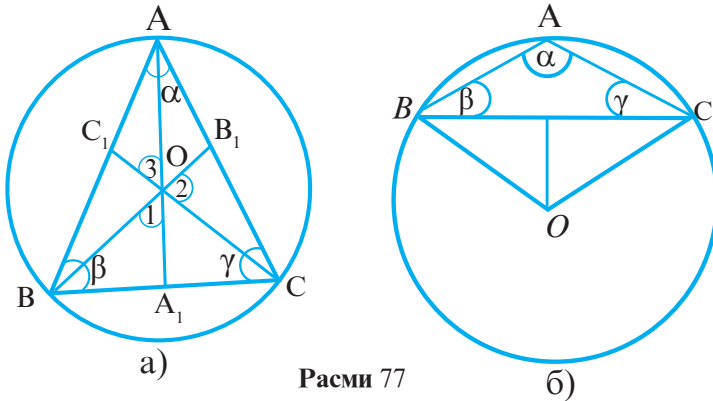


Расми 76

§ 4.3. Теоремаи синусҳо

1. Теоремаи синусҳо

Теорема. Тарафҳои секунҷа ба синуси кунҷҳои муқобилхобида мутаносибанд.



Расми 77

Маълум: $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$.

Матлуб: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Исбот. Дар расми 77 (а), $\angle A = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$ ва $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$ буда, $\angle 1 = \angle A = \alpha$ мебошад.

Аз $\triangle A_1OB$ ва $A_1B = \frac{1}{2} AC = \frac{a}{2}$ ҳосил мекунем:

$$A_1B = OB \cdot \sin \angle 1 = R \cdot \sin \alpha; \quad \frac{a}{2} = R \cdot \sin \alpha, \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$

Айнан ҳамин тавр, $\angle 2 = \beta$, $\angle 3 = \gamma$ буда, $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$ ва $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ мешавад.

Аз $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$, $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ мебарояд, ки

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \text{ аст.}$$

Масъалаи 1. Дар секунҷаи ABC кунҷи α -ро ёбед, агар $a=R=5$ см бошад.

2. Радиуси давраи берункашида

Масъалаи 2. Исбот кунед, ки дар секунҷаи тарафҳояш a , b , c ва масоҳаташ S буда, $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$ ё $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ аст. R -радиуси давраи берункашида.

Маълум: $\triangle ABC$, a, b, c ва S .

Матлуб: $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$.

Исбот. Ба мо маълум аст, ки $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ мебошад, аз ин ҷо $R = \frac{a}{2\sin \alpha}$ аст.

Сурат ва маҳраҷи касро ба bc зарб мекунем:

$$R = \frac{a}{2\sin \alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2bc \cdot \sin \alpha}.$$

Азбаски $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$ мебошад, $bc \cdot \sin \alpha = 2S$ буда,

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot 2S} = \frac{abc}{4S} \text{ аст.}$$

Ҳамин тариқ, $R = \frac{abc}{4S}$ ё $S = \frac{abc}{4R}$ мебошад.

Масъалаи 3. Дар секунҷаи баробарпахлу $a=b=5$ см аст. Радиуси давраи берункашидаро ёбед.

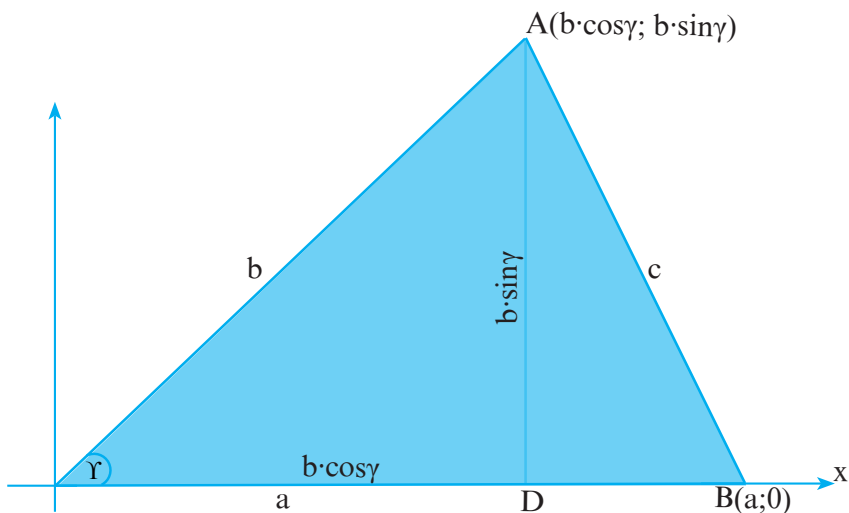
§ 4.4. Теоремаи косинусҳо

Теорема. Квадрати тарафи дилхоҳи секунҷа ба суммаи квадратҳои ду тарафи дигар, бе дучандкардашудаи ҳосили зарби ин тарафҳо ба косинуси кунҷи байни онҳо баробар аст.

Маълум: $CA=b$, $CB=a$, $AB=c$.

Матлуб: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Исбот. Дар расми 78 нуктаҳои A ва B бо координатаҳо-яшон дода шудааст.



Расми 78

Маълум аст, ки $AB^2=c^2$ мебошад. Аз ин ҷо
 $c^2=AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=(b\cos\gamma-a)^2+(b\sin\gamma-0)^2=b^2\cos^2\gamma-2abc\cos\gamma+a^2+b^2\sin^2\gamma=a^2+b^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)-2abc\cos\gamma=a^2+b^2-2abc\cos\gamma$.

Яъне, $c^2=a^2+b^2-2abc\cos\gamma$.

Теоремаи косинусҳоро барои тарафҳои дигари секунҷа ин тавр навиштан мумкин аст: $a^2=b^2+c^2-2bccos\alpha$;

$b^2=a^2+c^2-2accos\beta$.

Тарзи дигари исботи теоремаи косинусҳо

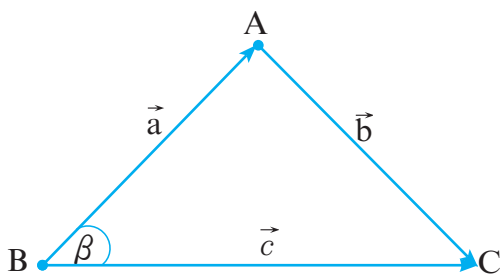
Маълум: $|\vec{c}| = c, |\vec{b}| = b, |\vec{a}| = a, \angle B = \beta$.

Матлуб: $b^2=a^2+c^2-2a\cdot c\cos\beta$.

Исбот. Дар расми 79 $\vec{a}=\vec{c}+\vec{b}$, аз ин ҷо $\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$. Ҳар ду тарафи баробариро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$\vec{b}^2=(\vec{a}-\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{c}^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=accos\beta$.

Теоремаи косинусҳоро барои мавриди $a^2=b^2+c^2-2bccos\alpha$ исбот намоед.



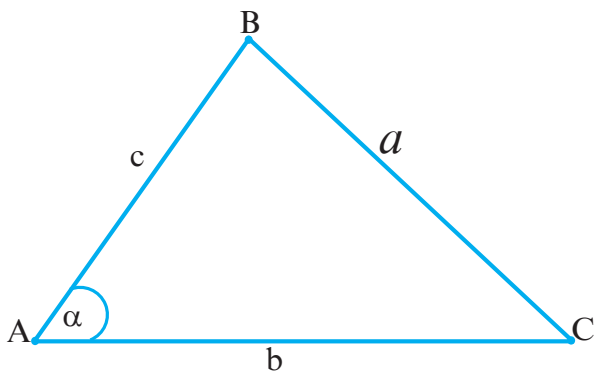
Расми 79

Супориш. 1) Дар ҳолати $\gamma=90^\circ$ бӯдан теоремаи Пифагорро аз теоремаи косинусҳо ҳосил намоед.

2) Дар секунҷаи ABC , $AB=5$ см, $BC=3$ см, $AC=4$ см мебошад. Бузургии $\angle C$ -ро ёбед.

§ 4.5. Формулаи Герон

Теорема. Масоҳати секунҷа ба $S = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$ баробар аст, агар a, b, c – тарафҳо ва $p = \frac{a + b + c}{2}$ бошад (расми 80).



Расми 80

Исбот. Маълум аст, ки $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$ мебошад. Аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, меёбем: $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{(a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc))((b^2 + c^2 + 2bc) - a^2)}{4b^2c^2};$$

$$a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) = a^2 - (b - c)^2 = (a + c - b)(a + b - c),$$

$$(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2 = (b + c)^2 - a^2 = (a + b + c)(b + c - a),$$

$$a + b + c = 2p, \quad a + b - c = (a + b + c) - 2c = 2p - 2c = 2(p - c),$$

$$a + c - b = (a + b + c) - 2b = 2p - 2b = 2(p - b),$$

$$b + c - a = (a + b + c) - 2a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

$$\text{Аз ин чо: } \sin^2 \alpha = \frac{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{4b^2c^2} =$$

$$= \frac{2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)}{4b^2c^2} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2c^2}.$$

Ифодаи $p(p - a)(p - b)(p - c)$ -ро меёбем:

$$\frac{1}{4} b^2 \cdot c^2 \cdot \sin^2 \alpha = p(p - a)(p - b)(p - c);$$

$$\frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

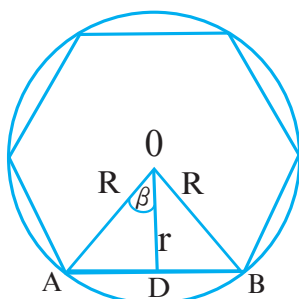
Аз он ки $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$ мебошад, бинобар ин $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ мешавад.

Масъала. Масоҳати секунҷаро ёбед, агар тарафхояш ба:
а) 13 см, 14 см, 15 см; б) 5 см, 6 см, 7 см; в) 17 м, 65 м, 80 м ба-
робар бошад.

§ 4.6. Ифода кардани тараф ва масоҳати n-кунҷаи мунтазам ба воситаи радиусҳои давраҳои дарун ва берункашида

Бигузур a_n тарафи n – кунҷаи мунтазам, R радиуси давраи берункашида ва r радиуси давраи дарункашида бошад (расми 81).

$$1) \beta = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}.$$



Расми 81

Аз $\triangle AOD$ ҳосил мекунем:

$$a_n = 2 \cdot AD = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}; a_n = 2 \cdot AD = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Инак, $a_n = 2 \cdot AD = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ ва $a_n = 2 \cdot AD = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

Аз $\triangle AOD$: $r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$.

$$S_n = \frac{1}{2} n \cdot a_n r = \frac{1}{2} n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} n \cdot R^2 \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$S_n = \frac{1}{2} n \cdot 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \cdot n; S_n = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Инак, $S_n = \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = nr^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

2) Барои секунҷаи мунтазам: $n = 3$.

$$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{3} = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}, \text{ яъне } a = R\sqrt{3}.$$

$$a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{3} = 2r \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot r;$$

$$a = R \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} r; R = 2r;$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot R^2 \sin \frac{180^\circ}{3} = \frac{3}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2;$$

$$\text{яъне, } S = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2;$$

$$S = 3r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{3} = 3r^2 \sqrt{3}; S = 3\sqrt{3} \cdot r^2, \text{ яъне } S = 3\sqrt{3} \cdot r^2.$$

Ҳамин тариқ, дар секунҷаи мунтазам (баробартараф):

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}; r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; R = 2r; S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 = 3\sqrt{3} r^2.$$

3) Барои чоркунҷаи мунтазам (квадрат): $n=4$.

$$a = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{180^\circ}{4} = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} R. \text{ Яъне } a = \sqrt{2} R.$$

$$a = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{4} = 2r, \text{ яъне } a = 2r.$$

$$a = \sqrt{2} R = 2r. \text{ Яъне } R = \sqrt{2} r.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot R^2 \sin \frac{360^\circ}{4} = 2R^2 \cdot 1 = 2R^2, \text{ яъне } S = 2R^2.$$

$$S = 4 \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{4} = 4r^2 \cdot 1 = 4r^2, \text{ яъне } S = 4r^2.$$

Ҳамин тариқ, дар чоркунҷаи мунтазам (квадрат):

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}, r = \frac{a}{2}, S = a^2 = 2R^2 = 4r^2, R = \sqrt{2} r.$$

4) Барои шашкунҷаи мунтазам:

$$a = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{180^\circ}{6} = 2R \cdot \frac{1}{2} = R, \text{ яъне } a = R;$$

$$a = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{6} = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad a = \frac{2r}{\sqrt{3}}, \text{ яъне } a = \frac{2r}{\sqrt{3}};$$

$$a = R = \frac{2r}{\sqrt{3}}; r = \frac{\sqrt{3}}{2}R;$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{6} = 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ яъне } S = \frac{3}{2}\sqrt{3}R^2;$$

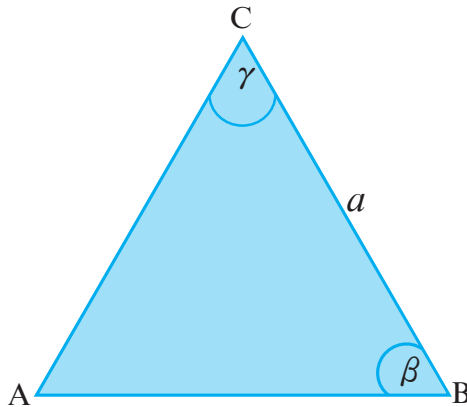
$$S = 6 \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{6} = 6r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}r^2; S = 2\sqrt{3}r^2.$$

Ҳамин тариқ, дар шашкунчаи мунтазам:

$$R = a, r = \frac{\sqrt{3}}{2}R, S = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 = 2\sqrt{3}r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

§ 4.7. Ҳалли секунҷаҳо

Масъалаи 1. Дар секунҷа $BC=a$, $\angle B=\beta$ ва $\angle C=\gamma$ дода шудаанд. $\angle A, AB, AC, P$ ва S -ро ёбед (Расми 82).



Расми 82

Ҳал. 1) $\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-(\beta+\gamma).$

$$2) \frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha}, AB = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(180^\circ - (\beta + \gamma))} = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

$$3) \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}, AC = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

$$4) P = AB + BC + AC = \frac{a\sin\gamma + a\sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)} + a.$$

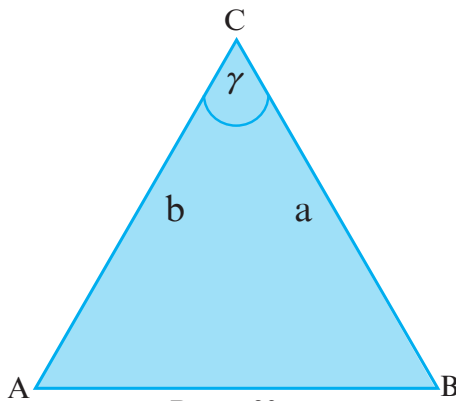
$$5) S = \frac{1}{2}BC \cdot AC\sin\gamma = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin(\beta + \gamma)}.$$

Масъалаи 2). Маълум: $\triangle ABC$, $BC=a$, $AC=b$, $\angle C=\gamma$.

Матлуб: AB , $\angle A$, $\angle B$, P ва S (Расми 83).

Ҳал: 1) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC\cos\gamma} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$;

$$2) \cos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{AB^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot AB};$$



Расми 83

$$3) \angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (\angle A + \gamma);$$

$$4) P = AB + BC + AC = AB + a + b;$$

$$5) S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma.$$

Масъалаи 3). Маълум: $\triangle ABC$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Матлуб: $\angle A$, $\angle B$, P ва S (расми 84).

Ҳал: 1) $P = BC + AC + AB = a + b + c$;

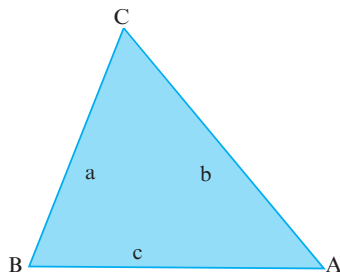
$$p_1 = \frac{a + b + c}{2};$$

$$2) S = \sqrt{p_1(p_1 - a)(p_1 - b)(p_1 - c)};$$

$$3) \cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$4) \cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$5) \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B).$$



Расми 84

Масъалаҳо

1. Дар секунча як тараф ва ду кунҷ дода шудаанд. Элементҳои дигари секунчаро ёбед, агар:

- 1) $a = 5, \beta = 50^\circ, \gamma = 45^\circ$; 4) $b = 12, \alpha = 36^\circ, \beta = 25^\circ$;
 2) $a = 30, \alpha = 75^\circ, \beta = 60^\circ$; 5) $c = 14, \alpha = 64^\circ, \beta = 48^\circ$
 3) $a = 35, \beta = 40^\circ, \gamma = 120^\circ$; 6) $a = 3, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ$ бошад.

2. Ду тараф ва яке аз кунҷҳои секунча дода шудаанд. Элементҳои боқимондаи секунчаро ёбед, агар:

- 1) $a = 12, b = 8, \alpha = 60^\circ$; 4) $a = 12, b = 5, \alpha = 120^\circ$;
 2) $a = 7, b = 33, \alpha = 130^\circ$; 5) $a = 2, b = 4, \alpha = 60^\circ$;
 3) $b = 9, c = 7, \alpha = 95^\circ$; 6) $b = 24, c = 18, \beta = 15^\circ$ бошад.

3. Се тарафи секунча дода шудааст. Элементҳои боқимондаи секунчаро ёбед:

- 1) $a = 12, b = 3, c = 4$; 4) $a = 15, b = 24, c = 18$;
 2) $a = 7, b = 2, c = 8$; 5) $a = 3, b = 4, c = 5$;
 3) $a = 4, b = 5, c = 7$; 6) $a = 8, b = 6, c = 10$.

4. Тарафҳои секунча 5 м, 6 м ва 7 м мебошанд. Косинуси кунҷҳои секунча, масоҳат ва радиусҳои давраҳои дарун ва берункашидаро ёбед.

5. Дар секунча ду тараф 5 м ва 6 м буда, синуси кунчи байнашон ба 0,6 баробар мебошад. Элементҳои боқимондаи секунчаро ёбед.

6. Масоҳати секунчаро ёбед, агар тарафи a ва кунҷҳои ба он часпидаи β ва γ маълум бошанд.

7. Радиусҳои давраҳои дарун ва берункашидаи секунчаро ёбед, агар тарафҳои: а) 13, 14, 15; б) 15, 13, 12; в) 35, 29, 8; г) 4,5,7 бошанд.

8. Тарафи паҳлуии секунчаи баробарпаҳлу 6 см буда, баландии ба асос фурувардашудааш 4 см аст. Радиуси давраи берункашидаро ёбед.

9. Радиуси давраи дар атрофи секунчаи баробарпаҳлуи берункашидаро ёбед, агар асосаш a ва тарафи паҳлуияш b бошад.

10. Катетҳои секунчаи росткунча 40 см ва 42 см мебошанд. Радиусҳои давраҳои дарун ва берункашидаро ёбед.

11. Баландии хурди секунчаи тарафҳои: а) 5, 5, 6; б) 17, 65, 80-ро ёбед.

12. Баландии калони секунчаро ёбед, агар тарафҳои

$$a) \frac{25}{6}, \frac{29}{6}, 6; \quad b) 13, 37\frac{12}{13}, 47\frac{1}{13} \text{ бошанд.}$$

13. Баландии секунчаро ёбед, агар тарафҳои 13 см, 14 см ва 15 см бошанд.

14. Исбот кунед, ки дар секунча $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ мебошад, агар r – радиуси давраи дарункашида ва h_a, h_b, h_c баландииҳо бошанд.

15. Исбот кунед, ки тарафҳои секунча ва баландииҳои мутаносиби чаппа мебошанд. Яъне, $a:b:c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Хосияти биссектрисаи секунчаро баён намоед.
2. Хосияти хордаҳои буранда чӣ гуна аст?
3. Хосияти бурандаҳои давраро исбот кунед.

4. Теоремаи синусҳоро исбот кунед.
5. Теоремаи косинусҳоро исбот кунед.
6. Доир ба масоҳати секунча кадом формулаҳоро медонед?
7. Формулаи Геронро нависед.
8. Тарафи n – кунҷаи дар давра берункашидаро чӣ тавр меёбанд?
9. Тарафи шашкунҷаи мунтазамро ба воситаи радиусҳои давраҳои дарун ва берункашида нависед.
10. Доир ба ҳалли секунчаҳо кадом формулаҳоро медонед?
11. Барои ёфтани кунҷҳо ва тарафҳои секунча муайян будани чанд элементи он зарур мебошад?

ФАСЛИ V. ДАРОЗИИ ДАВРА ВА МАСОҲАТИ ДОИРА

§ 5.1. Дарозии давра ва камон

1. Дарозии давра

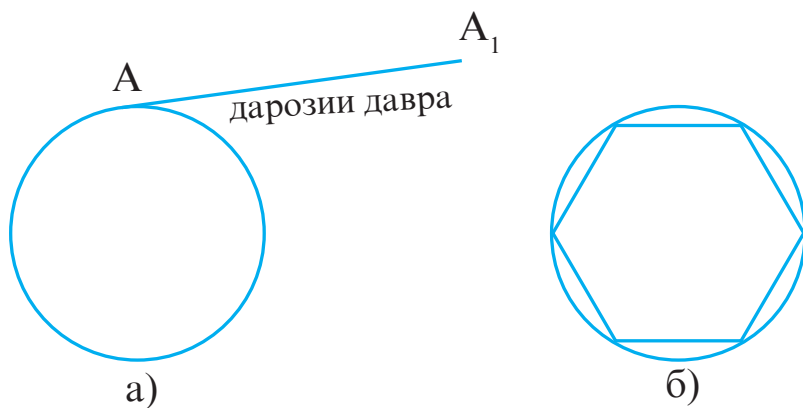
Фарз мекунем, ки давра аз ягон ресмони наёзанда сохта шуда бошад. Ресмонро аз ягон ҷоаш, ба шакли порча рост мекунем. Дарозии ҳамин порча дарозии давра аст (расми 85, а).

Дар дохили давра ягон n – кунҷаи мунтазамро мекашем. Агар адади n -адади бениҳоят калон гирифта шавад, периметри n – кунҷаи мунтазами дарункашида тақрибан ба дарозии давра баробар мешавад.

Агар $P_n = 2 \cdot R \cdot n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ периметри n -кунҷаи мунтазам буда, C дарозии давра бошад, $P_n \approx C$ мебошад.

Теорема. Нисбати дарозии давра бар диаметр барои ҳамаи давраҳо қимати баробар дорад (яъне, бузургии доимӣ аст).

Исбот. Бигузур, ду давраи $O_1(R_1)$ ва $O_2(R_2)$ дода шуда бошанд. Дар дохили ҳар як давра n -кунҷаҳои мунтазамро мекашем (расми 86 а,б).



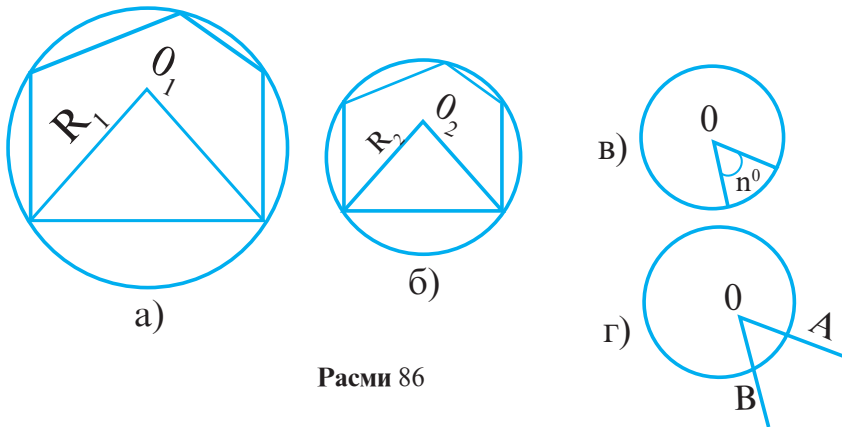
Расми 85

Дар натиҷа: $C_1 \approx P_1 = 2R_1 \cdot n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$, $\frac{C_1}{2R_1} \approx \frac{P_1}{2R_1} = n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$,

$C_2 \approx P_2 = 2R_2 \cdot n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$, $\frac{C_2}{2R_2} \approx \frac{P_2}{2R_2} = n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Аз ин ҷо $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ мешавад.

Нисбати дарозии давраро бар диаметр бо ҳарфи π (пи) ишора мекунад. $\frac{C}{2R} = \pi$. Аз ин ҷо, $C = 2\pi R$ формулаи дарозии давра мебошад.



Расми 86

Қимати адади π аз замонҳои қадим диққати олимону ба худ ҷалб кардааст. Дар асри III то милод олими бузурги юнонӣ Архимед қимати π -ро тақрибан $\frac{22}{7} \approx 3,14$ гирифта буд, яъне $\pi \approx 3,14$.

Дар натиҷаи тадқиқот маълум шуд, ки адади π касри даҳии ғайридаврии беохир, яъне адади иррационалӣ мебошад. Қимати тақрибии он $\pi \approx 3,1416\dots$ мебошад.

2. Дарозии камони давра

Як даври пурра 360° аст. Агар дарозии давраро ба 360 тақсим кунем, дарозии камони 1° -ро ҳосил мекунем.

Дарозии камони давраеро ҳисоб мекунем, ки ба кунчи марказии n° мувофиқ бошад (расми 86).

Дарозии нимдавра, яъне πR ба кунчи кушод мувофиқ меояд. Аз ин $r\bar{y}$, камони дарозияш $\frac{\pi R}{180^\circ}$ ба кунчи 1° мувофиқ меояд.

Ҳамин тариқ, камони дарозияш $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$, ба кунчи n° мувофиқ меояд.

Нисбати дарозии камони мувофиқ ба радиуси давраро **ченаки радиани кунч** меноманд.

Формулаи дарозии камони давраро татбиқ намуда, ҳосил менамоем: $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$. Пас, ченаки радиани кунч аз зарби дараҷагӣ ба $\frac{\pi}{180^\circ}$ ҳосил мешавад.

Масалан, ченаки радиани кунчи 180° ба π ва ченаки радиани кунчи 90° ба $\frac{\pi}{2}$ баробар аст. Воҳиди ченаки радиани кунч радиан мебошад. Кунчи якрадианӣ кунчест, ки дар он дарозии камон ба радиус баробар аст (расми 86 г).

Масъала. Секунҷаи ABC дода шудааст, ки дар он $\angle B=80^\circ$, $\angle C=40^\circ$ аст. Ченаки радиани кунҷҳои секунҷа ёфта шавад.

Ҳал. Дар асоси теоремаи ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии секунҷа $\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ аст.

Ченаки радиани кунчи B ба $80^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{4\pi}{9}$, ченаки радиани кунчи C ба $40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9}$, ченаки радиани кунчи A ба $60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$ баробар мешавад.

Масъалаҳои амалӣ

1. Дарозии давраро ёбед, агар радиусаш: а) 2 см; б) 5 см; в) 8 см; г) 15 м бошад.

2. Радиуси давраро ёбед, агар дарозии давра ба: а) 20 см; б) 18 см; в) 1,28 см баробар бошад.

3. Дарозии камонро ёбед, агар бузургии градусиаш:

а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° буда, $R=4$ см бошад.

4. Радиуси давраро ёбед, агар:

а) $C=2$ см ва $n^\circ=30^\circ$; б) $C=10$ м ва $n^\circ=60^\circ$; в) $C=6,325$ ва $n^\circ=90$ бошад.

5. Дарозии камони давраро ёбед, агар:

а) $R=3$ см ва $n = \frac{3}{4}\pi$; б) $R=5$ м ва $n = \frac{3}{4}\pi$;

в) $R=8$ дм ва $n=4$ радиан бошад.

6. Дарозии камони давра 50 см буда, радиусаш 30 м аст. Бузургии градусӣ ва радиани камони давраро ёбед.

7. Диаметри давра ба 30см баробар аст. Дарозии камони ба чоряк, сеяк, нисф ва шашяки давра баробарро ёбед.

8. Радиуси Замин тақрибан ба 6400 км баробар аст. Дарозии экватор (хатти истиво)-и Заминро ёбед.

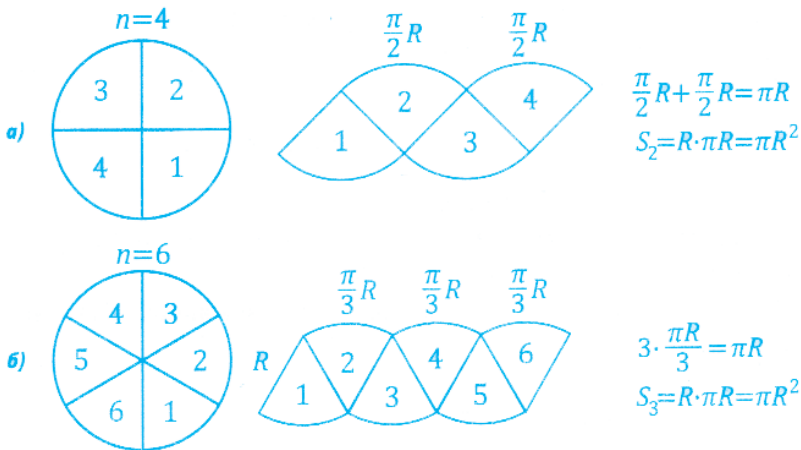
§ 5.2. Масоҳати доира ва қисмҳои он

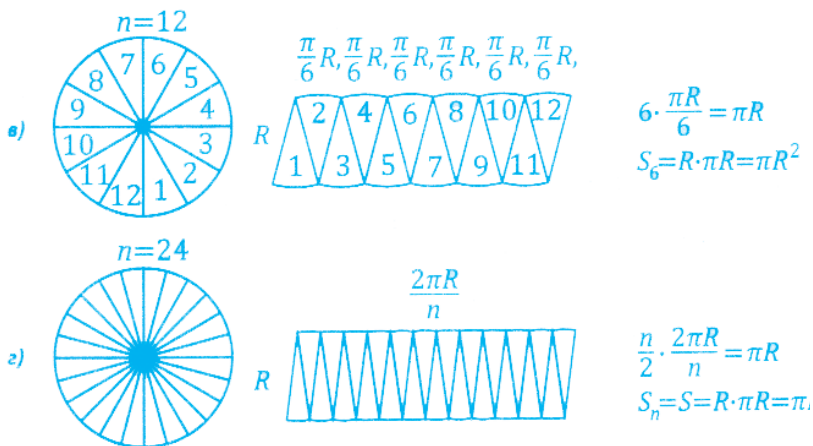
1. Масоҳати доира

Доира ҳам ба монанди фигураҳои дигар дорои масоҳат мебошад.

Теорема. Масоҳати доира ба πR^2 баробар аст, яъне $S = \pi R^2$.

Исбот. Доираеро ба n қисмҳои баробар тақсим мекунем ва ин қисмҳоро дар шакли расмҳои зерин ҷойгир менамоем (расми 87):





Расми 87

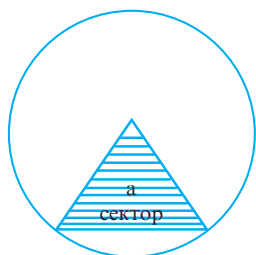
Аз мушоҳидаи расмҳо маълум аст, ки дар ҳолати қиматҳои бениҳоят калон қабул кардани n , расмҳо ба росткунчае табдил меёбанд, ки дарозияш πR буда, баландияш R мебошад. Масоҳати доира ба масоҳати ҳамин гуна росткунча баробар аст, яъне

$$S = S_{n \rightarrow \infty} = R \cdot \pi R = \pi R^2. \text{ Инак, } S_{\text{доира}} = \pi R^2.$$

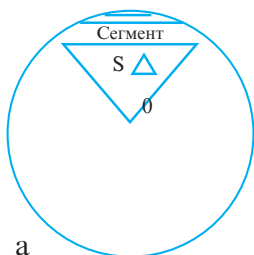
2. Сектори доиравӣ ва масоҳати он

Таъриф. Он қисми доира, ки бо ду радиус маҳдуд аст, сектори доиравӣ ном дорад. Агар давраи доираро ба 360 қисми баробар тақсим карда, нуқтаҳои тақсимотро ба марказ пайваस्त кунем, секторҳои камонҳояшон ба 1° мувофиқ ҳосил мешаванд. Агар масоҳати доираро ба 360 қисм тақсим кунем, масоҳати сектори камонаш 1° ҳосил мешавад.

Ҳамин тариқ, $\frac{\pi R^2}{360}$ масоҳати сектори 1° аст. Агар камони сектор ё кунҷи марказии ба он мувофиқ a бошад, масоҳати сектор бо формулаи $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot a$ ҳисоб карда мешавад.

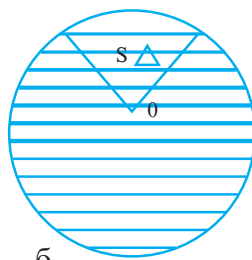


Расми 88



а

Расми 89



б

3. Сегменти доиравӣ ва масоҳати он

Таъриф. Он қисми доира, ки бо хорда маҳдуд аст, сегменти доиравӣ ном дорад.

Масоҳати сегменти доиравиرو бо формулаи $S = S_{\text{сек}} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360} \alpha \pm S_{\Delta}$ ҳисоб мекунамд. Дар ин ҷо α бузургии градусии камони сегмент буда, дар ҳолати $\alpha < 180^\circ$ будан, масоҳати секунҷа аз масоҳати сектор тарҳ ва дар ҳолати $\alpha > 180^\circ$ будан масоҳати сектор ба масоҳати секунҷа ҷамъ карда мешавад.

Масъалаҳо

1. Масоҳати доираро ёбед, агар радиусаш ба: а) 5 см; б) 4 см; в) 3,2 см, г) $\frac{3}{4}$ баробар бошад.

2. Масоҳати доираро ёбед, агар диаметраш ба а) 12 м; б) 0,6 дм; в) 32 см; г) $\frac{1}{2}$ м баробар бошад.

3. Масоҳати доираро ёбед, агар дарозии давра ба C баробар бошад.

4. Масоҳати ҳалкаи доиравиرو ёбед, агар вай бо доираҳои ҳаммаркази радиусҳои: 1) 4 см ва 6 см; 2) 5,5 м ва 6,5 м; 3) a ва $2a$; 4) a ва b ($a > b$) маҳдуд бошад.

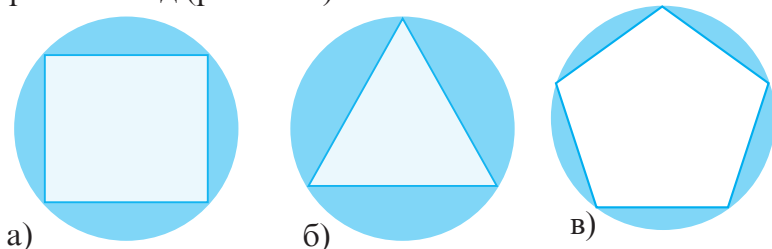
5. Агар диаметри доира 1) 2; 2) 5; 3) 6 маротиба зиёд карда шавад, масоҳаташ чӣ гуна тағйир меёбад?

6. Нисбати масоҳати доира ба масоҳати: а) секунҷа, б) чоркунҷа, в) шашкунҷаи мунтазами дарункашидаро ёбед.

7. Масоҳати сектори доиравии кунҷи марказиаш: а) 40° ; б) 90° ; в) 150° ; г) 240° ; д) 300° ; е) 330° -ро ёбед, агар $R=10$ см бошад.

8. Хорда ба радиуси доира баробар аст. Масоҳати сегментҳои бо он маҳдудро ёбед, агар $R = 10$ см бошад.

9. Масоҳати қисмҳои дар расмҳо бо хатҳои рах-рах ҷудокардари ёбед, агар бисёркунҷаҳо мунтазам буда, радиуси доира R бошад (расми 90).



Расми 90

10. Наъли асп шакли ним-ҳалқаро дорад. Агар радиуси берунии наъл 8 см ва радиуси дохилияш 6 см бошад, масоҳаташро ёбед (расми 91).



Расми 91

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Таърифи давраро баён намоед.
2. Формулаи дарозии давраро исбот кунед.
3. Қимати градусӣ ва радиани π -ро нависед.
4. Камони давра чӣ тавр муайян карда мешавад?
5. Кунҷи марказӣ чист?
6. Дарозии камонро бо кадом формула меёбанд?
7. Таърифи доираро баён кунед.
8. Масоҳати доираро чӣ тавр меёбанд?
9. Сектори доиравӣ чист?
10. Чиро масоҳати сектори доиравӣ меноманд?
11. Сегменти доиравӣ чист?
12. Масоҳати сегменти доиравиро чӣ тавр ҳисоб меку-
нанд?

ФАСЛИ VI. ЧЕНКУНИҲО ДАР МАҲАЛ

§ 6.1. Муайян кардани баландӣ

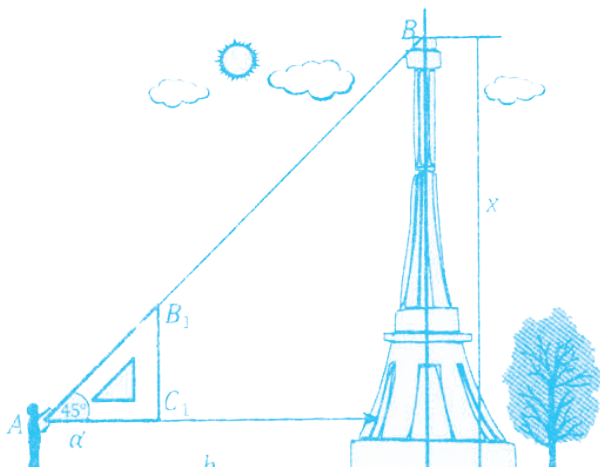
1. Баландии манора

Барои муайян кардани баландии манора, дар хатти рости MD нуқтаи M -ро тарзе интихоб мекунем, ки агар аз нуғи ҳодача $AM \perp MD$ ба равиши AB нигоҳ кунем, нуқтаи B дар таҳти кунҷи 45° намоён гардад. Нуқтаи B қуллаи манора буда, $AC \parallel MD$ мебошад (расми 92).

Маълум аст, ки секунҷаи росткунҷаи баробарпахлу дорои кунҷи 45° мебошад. Кунҷи тези ин секунҷаро дар нуқтаи A гузошта, ба равиши катети AC нигоҳ карда, нуқтаи C -ро мебинем (бояд $AC \parallel MD$ бошад). Агар дар ин асно қад-қади гипотенуза нигоҳ кунем, қуллаи манора (B) бояд дар хатти рости AB намудор гардад. Дар натиҷа, $\triangle ABC$ секунҷаи росткунҷаи дорои $\angle A = 45^\circ$ буда, баробарпахлу мебошад.

Бинобар ин, $BC = MD = AC$.

Агар дарозии ҳодача $AM = a$, масофа аз он то манора $MD = b$ бошад, баландии манора $x = BC + CD = AC + AM = MD + AM = a + b$ мешавад.



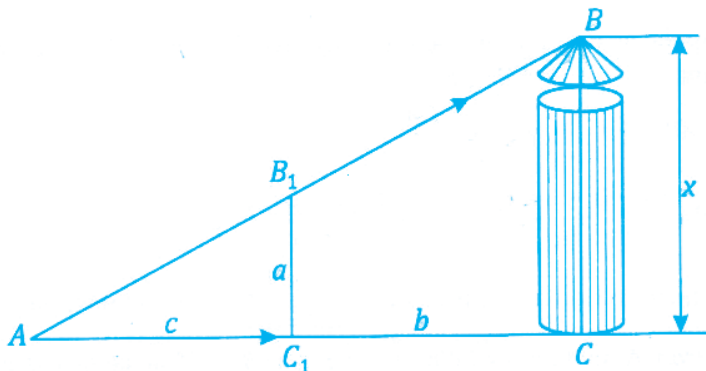
Расми 92

Мисол. Агар $MD=b=40$ м, $AM=b=1$ м бошад, баландии манора $x=a+b=40$ м + 1 м = 41 м мешавад.

Супориши 1. Шумо аз секунҷаи росткунҷаи нақшакашӣ, хоҷаҷа ва метр истифода бурда, баландии ягон манора ё бинои маҳаллаатонро муайян намоед.

2. Баландии кубури дудкаш

Дар дасти мо хоҷаҷаи дарозияш $B_1C_1=a$ ва метр аст. Аввал хатти рости $AC \perp BC$ -ро месозем (расми 93).



Расми 93

Дар ин хатти рост нуктаҳои А ва C_1 -ро тарзе интихоб менамоем, ки агар аз нуктаи А ба воситаи нуғи хоҷаҷа (B_1) ба қуллаи дудкаш (нуктаи В) нигарем, нуктаҳо дар як хатти рост намудор шаванд.

Дар натиҷа, $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$, $BC:B_1C_1=AC:AC_1$ ё $x:a=AC:AC_1$ мешавад.

Агар $AC=b$ ва $AC_1=c$ бошад, $x:a=b:c$ буда, баландии дудкаш ба $x = \frac{a \cdot b}{c}$ баробар мешавад.

Мисол. Агар дарозии хоҷаҷа $B_1C_1=a=2$ м, $AC=b=27$ м ва $AC_1=c=3$ м бошад, баландии кубури дудкаш $x = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18$ м мешавад.

Супориши 2. Шумо ба воситаи хоҷаҷаи дарозияш муайян ва метр баландии ягон кубури дудкаш, симчӯб, бино ва ё манораи маҳаллаатонро муайян намоед.

3. Баландии тепша ё кӯҳ

Дар расми 94 кӯҳе тасвир ёфтааст. Баландии ин кӯҳ $MC=x$ -ро муайян кардан лозим аст. Дар дасти мо зовиясанҷ ва метр мавҷуд аст.

Аз ягон нуқтаи B $\angle CBM = \beta$ -ро чен карда, дар хатти рости AM масофаи $AB=a$ -ро қайд менамоем. Аз нуқтаи A $\angle CAM = \alpha$ -ро чен мекунем.

Дар натиҷа: 1) Аз секунҷаи росткунҷаи ACM , $AM = CM : \operatorname{tg} \alpha$. 2) Аз секунҷаи CBM , $BM = CM : \operatorname{tg} \beta$.

$$3) AB = AM - BM = \frac{CM}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{CM}{\operatorname{tg} \beta};$$

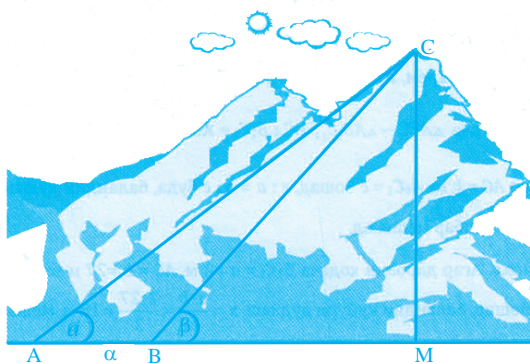
$$AB = \frac{CM(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \text{ ё } CM = \frac{AB \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Аз ин ҷо, баландии тепша ба $x = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$ баробар мешавад.

Мисол. Агар $AB = a = 3000$ м, $\alpha = 30^\circ$ ва $\beta = 45^\circ$ бошанд, баландии кӯҳ (расми 94)

$$x = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{3000 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{3000 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3000}{\sqrt{3} - 1} \approx \frac{3000}{1,7 - 1} =$$

$$= \frac{3000}{0,7} = \frac{30000}{7} = 4285 \frac{5}{7} \text{ м мебошад.}$$



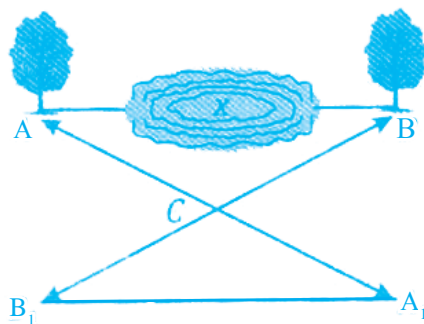
Расми 94

Супориши 3. Шумо ба воситаи зовиясанҷ ва метр баландии ягон теппа ё кӯҳи маҳаллаатонро муайян намоед.

§ 6.2. Муайян кардани масофаи дастнорас

1. Масофаи байни ду маҳал

Дар байни маҳалҳои A ва B ботлоқ ё чарие мавҷуд аст. Талаб карда мешавад, ки масофаи $AB = x$ -ро муайян намоем. Аввал, нуқтаи C -ро тарзе интихоб менамоем, ки аз он ба маҳаллаҳои A ва B рафтан мумкин бошад. Сипас, масофаи BC -ро чен карда, аз нуқтаи C дар хатти рости BC нуқтаи B_1 -ро, ки масофаи $B_1C = BC$ аст, меёбем. Айнан ҳамин тавр, нуқтаи A_1 -ро дар хатти рости AC муайян менамоем ($A_1C = AC$).



Расми 95

Акнун масофаи A_1B_1 -ро чен мекунем ($A_1B_1 = a$).

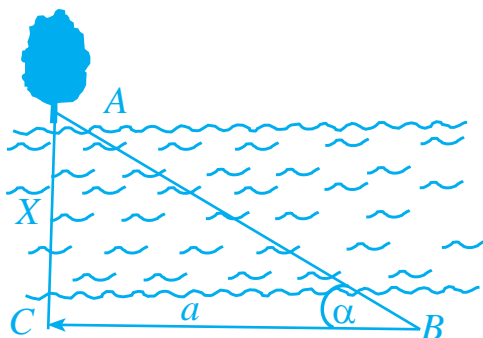
Дар натиҷа, $\triangle ACB = \triangle A_1CB_1$ шуда (мувофиқи аломати якуми баробарии секунҷаҳо), $AB = A_1B_1$ ё $x = a$ мешавад (расми 95).

Мисол. Агар масофаи $A_1B_1 = a = 400$ м бошад, масофаи байни ду маҳал $x = 400$ м мешавад.

Супориши 4. Шумо аз тарзи нишондоди дар боло овардашуда истифода бурда, масофаи байни ду маҳалро амалан муайян намоед.

2. Муайян кардани масофаи байни соҳилҳо

Дар расми 96 дарё тасвир ёфтааст. Талаб карда мешавад, ки бари дарё, яъне масофаи $AC=x$ муайян карда шавад.



Расми 96

Қад-қадди соҳил масофаи $CB=a$ -ро чен менамоем (бояд $AC \perp CB$ бошад). Аз нуқтаи B , $\angle CBA=\alpha$ -ро бо зовиясанҷ муайян менамоем.

Дар натиҷа, $\frac{AC}{CB} = \operatorname{tg}\alpha$ ё $AC = CB \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Агар $AC=x$ ва $CB=a$ бошад, бари дарё $x=\operatorname{atg}\alpha$ мешавад.

Мисол. Агар $CB=a=40$ м ва $\alpha=30^\circ$ бошад, бари дарё $x=\operatorname{atg}\alpha=40 \text{ м} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 40 \text{ м} : 1,7 \approx 23,53$ м мешавад.

Супориши 5. Шумо дар маҳалли зистатон бари дарё ё чариеро бо тарзи дар боло пешниҳодшуда амалан муайян намоед.

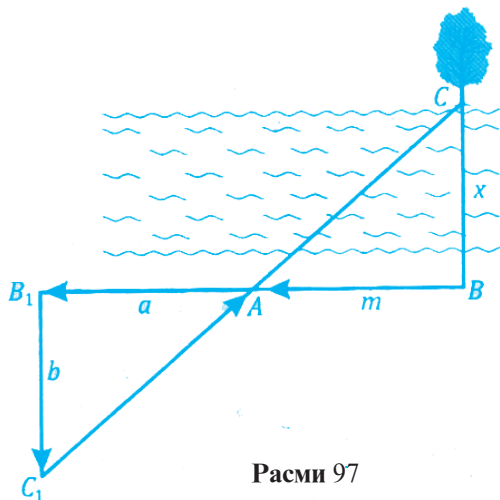
3. Муайян кардани бари дарё бе ёрии зовиясанҷ

Дар расми 97 масофаи $BC=x$ бари дарё мебошад. Қад-қадди соҳил масофаҳои AB ва AB_1 -ро чен мекунем.

Сипас, аз нуқтаи B_1 хатти рости $B_1C_1 \perp B_1B$ -ро мегузаронем.

Нуқтаи C_1 дар B_1C_1 тарзе интиҳоб карда мешавад, ки нуқтаҳои C_1 , A , C дар як хатти рост ҷойгир бошанд. Агар $B_1C_1=b$, $AB_1=a$, $AB=m$ бошад,

$\Delta C_1B_1A \sim \Delta CBA$ буда, $\frac{x}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$ ё $\frac{x}{m} = \frac{b}{a}$ ва $x = (b \cdot m) : a$ мешавад.



Расми 97

Мисол. Агар $b=10$ м, $m=20$ м ва $a=5$ м бошад, бари дарё $x = \frac{b \cdot m}{a} = \frac{10 \cdot 20}{5} = 40$ м мешавад.

Супориши 6. Бо тарзи дар боло пешниҳодшуда бари ягон дарё ё чариеро муайян намоед.

§ 6.3. Муайян кардани умқи чоҳ

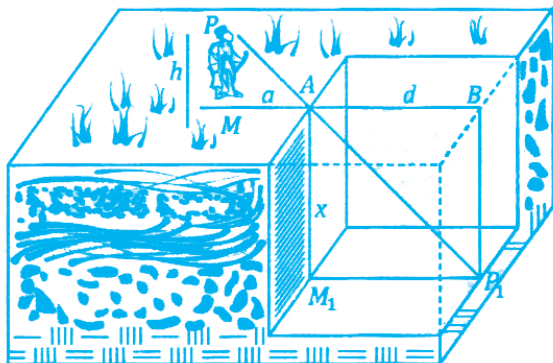
Дар расми 98 чоҳе тасвир ёфтааст. Талаб карда мешавад, ки умқи (чуқурии) чоҳ $AM_1 = x$ муайян карда шавад.

Яке аз олимони бузурги мо Абурайҳони Берунӣ тарзи зерини муайян кардани умқи чоҳро пешниҳод намудааст.

Бигузур, қадди одам $MP = h$ бошад. Аз лаби чоҳ дар масофаи $AM = a$ тарзе рост меистем, ки канори болоии чоҳ (A) ва канори поинии чоҳ (P_1) дар як хатти рост ҷойгир шаванд.

Агар диаметри болоии чоҳ $AB = d$ бошад, $\Delta AM_1P_1 \sim \Delta PMA$ аст. Барои ҳамин, $\frac{x}{M_1P_1} = \frac{PM}{MA}$ ё $\frac{x}{d} = \frac{h}{a}$ ва $x = \frac{h \cdot d}{a}$ мешавад.

Ҳамин тариқ, $x = \frac{h \cdot d}{a}$ умқи чохи номбурда мебошад.



Расми 98

Мисол. Агар $h=1,8$ м қадди одам, $a=0,6$ м масофаи ҷойи истодаи одам то қанори чоҳ, $d=2$ м диаметри чоҳ бошад, умқи чоҳ $x = \frac{h \cdot d}{a} = \frac{1,8 \cdot 2}{0,6} = 6$. Яъне, $x=6$ м мешавад.

Супориши 7. Шумо бо тарзи номбурда умқи ягон ҷарӣ ё чоҳи маҳаллаатонро муайян намоед.

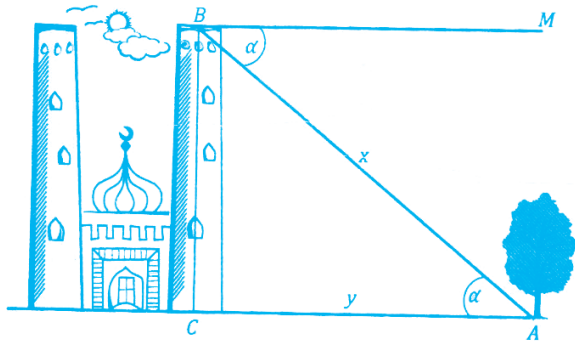
§ 6.4. Ёфтани масофа аз баландии муайян

Баландии манора ё теппа $CB=H$ мебошад. Масофаро аз қуллаи манора то маҳалли A меёбем.

Аз қуллаи манора кунҷи байни уфуқ ва маҳалро чен мекунем: $\angle MBA = \alpha$ (расми 99).

Дар натиҷа, $\angle CAB = \angle MBA$ мешавад, чунки ин кунҷҳо ҷилликӣ мебошанд. Дар натиҷа, $H:x = \sin \alpha$ ё $x = \frac{H}{\sin \alpha}$ мешавад.

Агар масофаи манораро то маҳал бо $y=AC$ ишора намоём, $H:y = \text{tg} \alpha$, $y = \frac{H}{\text{tg} \alpha}$ мешавад.



Расми 99

Мисол. Агар $H=160$ м баландии манора ва $\alpha=30^0$ бошад,
 $x = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{160}{\sin 30^0} = 160:0,5 = 320$ м—масофа аз болои манора то маҳал ва $y = \frac{160}{\text{tg}30^0} = 160 \cdot \sqrt{3}$ м ё $y \approx 160 \cdot 1,7 \approx 272$ м,
 яъне, $y \approx 272$ м масофа аз манора то маҳал мебошад.

Супориши 8. Шумо аз болои теппа ё манораи баландияш маълум масофаи ягон маҳалро муайян намоед.

Масъалаҳо

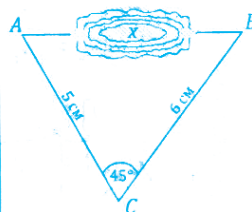
1. Шумо масофаи байни шаҳрҳои Душанбе ва Маскавро, ки дар харитаи миқёсаш $1:20000000$ ба 16 см баробар аст, муайян намоед (расми 100).

2. Аз рӯи андозаҳои расми 101 масофаи байни маҳаллаҳои A ва B -ро ёбед, агар миқёси расм $1:10000$ бошад.

Нишондод. Аз теоремаи косинусҳо истифода баред.

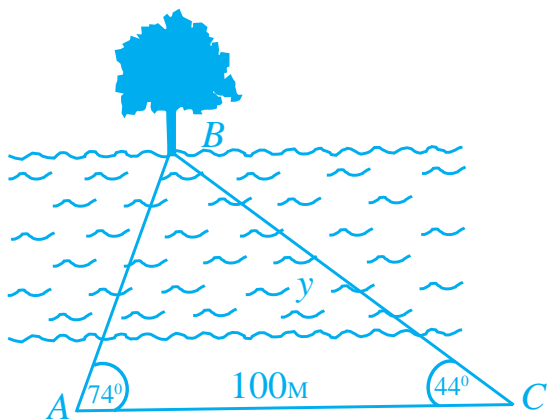


Расми 100



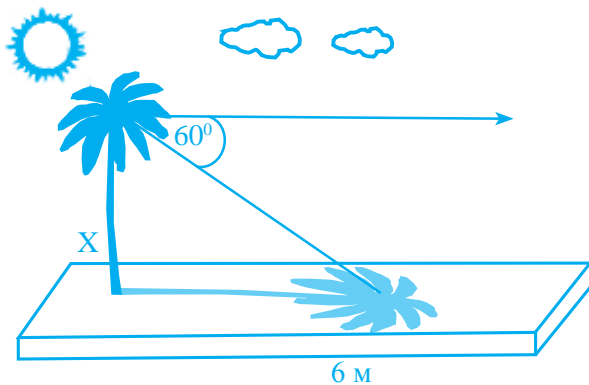
Расми 101

3. Az rӯyi andozaҳои расми 102 масофаҳои дастнораси АВ ва ВС-ро ҳисоб кунед.



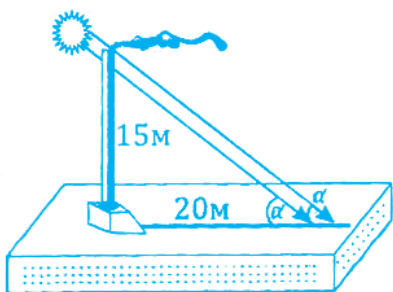
Расми 102

4. Баландии дарахтро муайян намоед, агар сояш дар сатҳи Замин 6 м буда, нури Офтоб нисбат ба уфуқ кунҷи 60° -ро ташкил диҳад (расми 103).

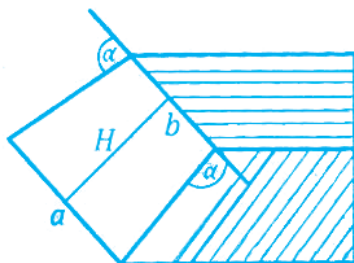


Расми 103

5. Баландии кубури дудкаш 15 м буда, сояш дар сатҳи Замин 20 м аст. Кунҷи афтиши нурҳои Офтобро нисбат ба сатҳи Замин ёбед (расми 104).



Расми 104



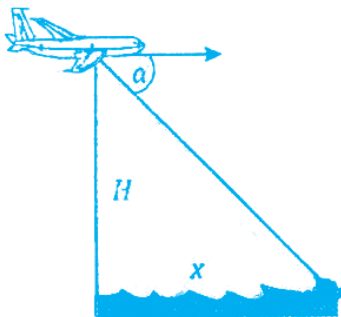
Расми 105

6. Бари хоктеппа аз боло ба b ва аз поён ба a баробар мебошад. Тарафҳои паҳлуии хоктеппа бо хатти уфуқ кунҷи α -ро ташкил медиҳанд. Агар $b=10\text{м}$, $a=24\text{м}$, $\alpha=25^\circ$ бошад, баландии хоктеппаро ёбед (расми 105).

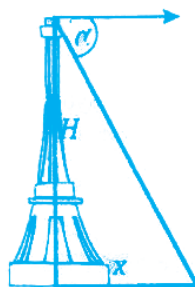
7. Роҳи оҳан дар нишеб, дар ҳар як 30 метр 0,5м баланд мешавад. Кунҷи баландшавии роҳро муайян намоед.

8. Аз тайёра (ҳавопаймо) ба капитани киштии моҳигирӣ бо радио хабар доданд, ки тайёра дар баландии $H \approx 950$ м дар болои селай моҳиҳо парвоз менамояд. Аз киштии кунҷи баландшавии тайёра $\alpha \approx 30^\circ$ мебошад. Масофаи байни киштии то селай моҳиҳо муайян карда шавад (расми 106).

9. Баландии манора аз сатҳи баҳр $H=150$ м мебошад. Масофаи байни манораро то киштии муайян намоед, агар кунҷи моилӣ $\alpha=45^\circ$ бошад (расми 107).



Расми 106



Расми 107

10. Бо истифода аз харитаи сиёсии ҷаҳон масофаи байни Душанбе ва шаҳрҳои зерин ёфта шавад: Париж, Лондон, Кобул, Макка, Деҳлӣ, Токио (миқёс 1:20000000).

11. Бари қоғази гулдор 60 см мебошад. Муайян намоед, ки барои хонаи андозааш 3,2 x 6 x 2,8 чанд метр қоғази гулдор харидан лозим аст. Андозаҳои тиреза ва дарро ба назар нагиред.

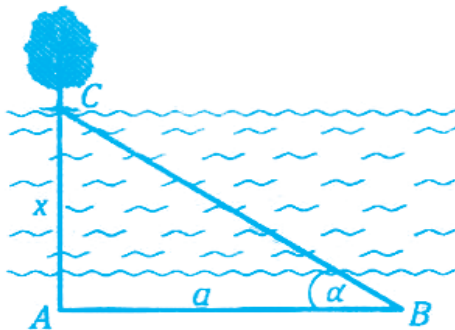
12. Баландии бино 30 м буда, сояаш 4 м аст. Кунҷи афтиши нурҳои Офтобро нисбат ба сатҳи Замин ёбед.

13. Кунҷи афтиши нурҳои Офтоб нисбат ба сатҳи Замин 60° буда, сояи симчӯб 3 м аст. Баландии симчӯбро ёбед.

14. Ақрабаки масофасанҷ дар 1000 қадам як бор давр мезанад. Агар 1, 10, 150, 1250, 1500 қадам гузошта шавад, ақрабак кунҷи чандградусиро мекашад?

15. Дар нимаи рӯз, хангоме ки баландии Офтоб бо хатти уфуқ кунҷи α -ро ташкил медиҳад, дудкаши корхона сояи дарозииаш a -ро дорад. Агар $\alpha=28^\circ$ ва $a=76$ м бошад, баландии дудкашро муайян намоед.

16. Барои муайян кардани бари дарё дар як соҳили он бевосита дар лаби об порчаи $AB = a$ кашида шуда, дар соҳили муқобил, дарахти C ба нишон гирифта мешавад (расми 108). Агар $\angle CAB=90^\circ$ ва $\angle CBA=\alpha$ чен карда шуда бошанд, бари дарёро ёбед. Агар $a=45$ м ва $\alpha=25^\circ$ бошад, бари дарё чӣ қадар аст?



Расми 108

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Баландии манораро чӣ тавр меёбанд?
2. Умқи чоҳро чӣ тавр муайян месозанд?
3. Масофаи байни ду маҳалро чӣ тавр меёбанд?
4. Аз баландӣ масофаи ягон маҳалро чӣ тавр ҳисоб мекунанд?
5. Масофаи байни ду пунктро (маҳалро) аз харита чӣ тавр ҳисоб мекунанд?
6. Геометрия дар ченкуниҳои маҳал чӣ аҳамият дорад?
7. Шумо геометрияро дар кучо татбиқ карда метавонед?
8. Масоҳати ҳавлиятонро чӣ тавр ҳисоб мекунед?
9. Асбобҳо барои чен кардани масофаҳо кадомҳоянд?
10. Кунҷҳоро ба воситаи чӣ чен мекунанд?
11. Масофаи байни ду соҳилро чӣ тавр меёбанд?
12. Баландии кӯҳро чӣ тавр меёбанд?
13. Масоҳати сатҳи мизи хонаатонро чӣ гуна ҳисоб мекунед?
14. Масоҳати майдончаи таҷрибавии мактабатонро чӣ тавр ҳисоб кардан мумкин аст?

**Ҷавобҳо ва нишондод ба
ҳалли масъалаҳо**

Фасли I. Координатаҳои декартӣ дар ҳамворӣ

10. $-3x+y+7=0$.

11. $x=y$.

12. Хатти рост аз нуқтаҳои A ва B мегузарад, аз нуқтаи C намегузарад.

14. а) $A(3;-2)$; б) $B(1;1)$.

16. а) $k=-\frac{1}{2}$; б) $k=-5$; в) $k=1$.

17. а) $k=1$; б) $k=-0,4$.

18. а) $O(0;0)$ ва $R=3$; б) $O(-1;2)$ ва $R=2$; в) $O(3;-5)$ ва $R=5$.

19. б) Нуқтаҳои A ва C дар давра ҳобида, нуқтаҳои B , O ва E намехобанд.

20. $x^2+y^2=6,25$.

22. а) $x^2+(y-5)^2=9$; б) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$; в) $(x+3)^2+(y+7)^2=0,25$.

23. Ҳал. $r^2=(-1)^2+3^2=10$, пас, $x^2+y^2=10$.

24. $x^2+(y-6)^2=25$.

25. Ҳал. а) $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2, y = \frac{y_1 + y_2}{2} = 1, O(2;1), r^2 = 41, (x-2)^2 +$

$(y-1)^2=41$; б) $(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

26. а) $O(1;2), r=2$; б) $O(-3; 0,5), r=\sqrt{3}$ в) Ҳал. $(x^2-2x+1) + (y^2-2y+1)=7+2, (x-1)^2+(y-1)^2=9, O(1;1), r=3$; г) $O(1;-2), r=4$.

27. Нишондод: а) $x^2+4=9, x=\pm\sqrt{5}, A(\sqrt{5}; 2), B(-\sqrt{5}; 2)$. Давра ва хатти рост дар нуқтаҳои A ва B ҳамдигарро мебуранд.

б) $x=1, A(1;2)$. Давра ва хатти рост дар нуқтаи A расанданд.

28. а) $(3;4)$; б) $(4;4)$.

29. а) $(5;3)$.

Фасли II. Векторҳо.

2. $\overrightarrow{AB} = (-3; 4), |\overrightarrow{AB}| = 5; \overrightarrow{AC} = (0; 4), |\overrightarrow{AC}| = 4; \overrightarrow{BC} = (3; 0), |\overrightarrow{BC}| = 3.$

3. $m = \pm 12.$

4. 1) $\vec{a} + \vec{b} = (-3; 3), |\vec{a} + \vec{b}| = 3\sqrt{2}.$

8. $-2\vec{a} + 4\vec{b} = (-6; -8), |-2\vec{a} + 4\vec{b}| = 10.$

9. а) $|\vec{a}| = 10, \lambda = \frac{1}{2};$ б) $|\vec{a}| = 5, \lambda = 1.$

13. $m = -8.$

14. $\cos\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}.$

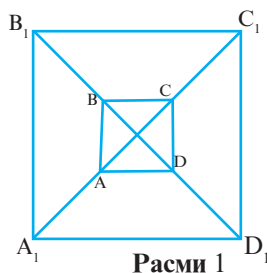
17. $\cos\alpha = 0,6; \cos\beta = 0; \cos\gamma = 0,8.$

23. $|\vec{a}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1,$ яъне вектори \vec{a} вектори воҳидӣ аст.

\vec{b} вектори воҳидӣ нест.

\vec{c} вектори воҳидӣ аст.

\vec{d} вектори воҳидӣ аст.



Фасли III. Монандӣ ва гомотетия

1. $A_1B_1 = 15\text{см}, B_1C_1 = 9\text{см}, A_1C_1 = 12\text{см}.$

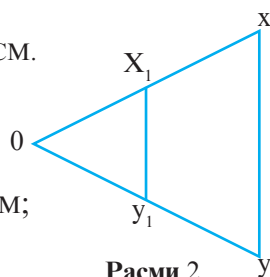
3. а) $P = 56\text{см};$ в) $P = 14\text{см}.$

4. Ҳал. $A_1B_1 = 2,5 \cdot AB = 7,5\text{см};$

$A_1D_1 = 2,5 \cdot AD = 10\text{см};$

$P = A_1B_1C_1D_1 = 2 \cdot (7,5\text{см} + 10\text{см}) = 35\text{см};$

$S = A_1B_1 \cdot A_1D_1 = 10 \cdot 7,5 = 75\text{см}^2.$



7. Нуқтаи буриши хатҳои XX_1 ва YY_1 маркази гомотетия мебошад.

**Фасли IV. Татбиқи монандӣ,
гомотетия ва методи координатҳо**

$$1.1) \alpha = 85^\circ, b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{5 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 85^\circ}, c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{5 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 85^\circ},$$

$$P = a + b + c = a + \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}, S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

$$4. S = 6\sqrt{6} \text{ м}^2, \cos \alpha = \frac{5}{7}, \cos \beta = \frac{19}{35}, \cos \gamma = \frac{1}{5}, R = \frac{35}{4\sqrt{6}}, r = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

$$7. a) R = 8\frac{1}{8}, r = 4.$$

$$8. R = 4,5 \text{ см}$$

$$9. R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

$$10. R = 29, r = 12.$$

$$11. a) h = 4.$$

$$12. a) h = 4\frac{4}{29}.$$

$$13. h_a = 12\frac{12}{13} \text{ см}, h_b = 12 \text{ см}, h_c = 11,2 \text{ см}.$$

Фасли V. Дарозии давра ва масоҳати доира

$$1. a) \approx 78,5 \text{ см}^2; б) \approx 50,24 \text{ см}^2; в) \approx 32,25 \text{ см}^2; г) \approx 1,8 \text{ см}^2.$$

$$2. a) 36 \pi \text{ м}^2; б) 0,09 \pi \text{ м}^2; в) 256 \pi \text{ см}^2; г) 2500 \pi \text{ см}^2.$$

$$3. C^2/4\pi.$$

$$4. 1) 62,8 \text{ см}^2.$$

$$5.1) \text{Хал. } D_2 = 2D_1, S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}, S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi (2D_1)^2}{4} = \pi D_1^2;$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi D_1^2}{\frac{\pi D_1^2}{4}} = 4.$$

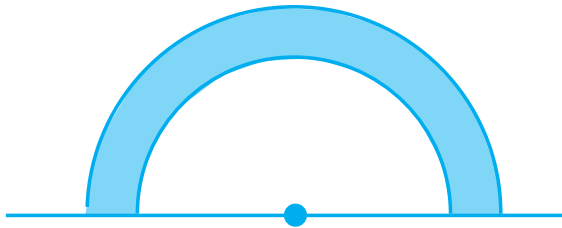
6. а) Ҳал. $S_D = \pi R^2, S = \frac{1}{2} R^2 \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{n};$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 3R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{3} = \frac{1}{2} 3R^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} 3R^2 \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2;$$

$$\frac{S_D}{S_\Delta} = \frac{\pi R^2}{\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \text{ б) } \pi/2; \text{ в) } \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7. а) Ҳал. $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot 40^\circ = \frac{\pi R^2}{9};$ д) $5\pi R^2/6.$

10. Ҳал. $S = S_1 - S_2 = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2) = \frac{\pi}{2} \cdot 28 = 14\pi.$



Расми 3

Фасли VI. Дарозии давра ва масоҳати доира

1. 432,4 м.

2. $6\sqrt{3}$ м.

Мундариҷа

Фасли I. Координатаҳои декартӣ дар ҳамворӣ

§ 1.1. Ҳамвории координатӣ	3
§ 1.2. Координатаҳои миёнаҷойи порча	6
§ 1.3. Масофаи байни ду нуқта	8
§ 1.4. Муодилаи ҳатти рост	9
§ 1.5. Координатаҳои нуқтаи буриши ду ҳатти рост	11
§ 1.6. Коэффитсиенти кунҷии ҳатти рост	13
§ 1.7. Муодилаи давра	15
§ 1.8. Функсияҳои тригонометрӣ барои кунҷҳои аз 0^0 то 180^0 ..	17
Масъалаҳо	18
Савол ва супоришҳо барои санҷиш	22

Фасли II. Векторҳо

§ 2.1. Мафҳуми вектор	24
§ 2.2. Амалҳо бо векторҳо.....	30
Масъалаҳо	42
Савол ва супоришҳо барои санҷиш	45

Фасли III. Монандӣ ва гомотетия

§ 3.1. Порчаҳои мутаносиб	47
§ 3.2. Мафҳуми монандӣ	50
§ 3.3. Монандии секунҷаҳо	54
§ 3.4. Гомотетия	64
Масъалаҳо	68
Савол ва супоришҳо барои санҷиш	69

Фасли IV. Татбиқи монандӣ, гомотетия ва методи координат

§ 4.1. Ҳосияти биссектрисаи секунҷа	70
§ 4.2. Ҳосияти хордаҳои дар як нуқта буранда	72
§ 4.3. Теоремаи синусҳо	74
§ 4.4. Теоремаи косинусҳо	75
§ 4.5. Формулаи Герон	77

§ 4.6. Ифода кардани тараф ва масоҳати n-кунҷаи мунтазам бо воситаи радиусҳои давраҳои дарун ва берункашида.....	79
§ 4.7. Ҳалли секунҷаҳо	81
Масъалаҳо	83
Савол ва супоришҳо барои санҷиш	84

Фасли V. Дарозии давра ва масоҳати доира

§ 5.1. Дарозии давра ва камон	86
§ 5.2. Масоҳати доира ва қисмҳои он	89
Масъалаҳо	91
Савол ва супоришҳо барои санҷиш	92

Фасли VI. Ченкуниҳо дар маҳал

§ 6.1. Муайян кардани баландӣ	93
§ 6.2. Муайян кардани масофаи дастнорас	96
§ 6.3. Муайян кардани умқи чоҳ	98
§ 6.4. Ёфтани масофа аз баландии муайян	99
Масъалаҳо	100
Савол ва супоришҳо барои санҷиш	104
Ҷавобҳо ва нишондод ба ҳалли масъалаҳо	105

ШАРИФОВ ҶУМЪА, БУРҲОНОВ УСТО

ГЕОМЕТРИЯ

Китоби дарсӣ барои синфи 9-уми
муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

Мухаррир

Мусахҳах

Мухаррири техникӣ

Тарроҳ

М. Абдукаримов

М. Саидова

Қ. Назаров

Қ. Назаров

Ба чоп 17.11.2023 ичозат дода шуд. Коғази офсет.
Чопи офсет. Андоза 60x90 1/16. Ҷузъи чопӣ 7.
Адади нашр 15 000 нусха.
Супориши № 82/2023

Нархаш 17 сомонӣ 06 дирам

Муассисаи нашриявии «Маориф»-и
Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон.
734024, ш. Душанбе, кӯчаи Аҳмади Дониш, 50.
Тел. 222-14-66, E-mail: Nashriya@maorif.tj

Дар матбааи ҚДММ "ЭР-граф" чоп шудааст.
Нишонӣ: 734036 Ҷумҳурии Тоҷикистон,
ш. Душанбе, кӯч. Раҳмон Набиев, 218
Тел: +992(37)227-39-92
E-mail: R-Graph.tj@gmail.com