Боймурод Алиев

ГЕОМЕТРИЯ

(давоми стереометрия)

Китоби дарсӣ барои синфи 11-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

Нашри сеюм

Вазорати маориф ва илми
Ҷумҳурии Тоҷикистон тасдиқ кардааст

Душанбе
2020

ББК 81.2 тоҷик Я22.135
А-49

Б. Алиев. Геометрия. Китоби дарсӣ барои синфи 11-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ. Душанбе, ҶДММ «Лавҳ», 2020. – 144 саҳ.

Хонандаҳои азиз!

Китоб манбаи донишу маърифат аст, аз он баҳравар шавед ва онро тоза нигоҳ доред! Кӯшиш кунед, ки соли таҳсили оянда ҳам ин китоб ҳамин гуна зебову ороста дастраси хонандагони дигар гардад ва онҳо низ аз он истифода баранд.

Ҷадвали истифодаи китоб

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли таҳсил	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали сол	Охири сол
1					
2					
3					
4					
5					

ISBN 978-99975-1-251-2

САРСУХАН

Китобе, ки дар даст доред давоми китоби дарсии «Геометрия» (ибтидои стереометрия) барои синфи 10-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ буда, аз рӯйи барномаи таълими фанни математика барои синфҳои 5–11-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ (2018) таҳия шудааст. Инчунин, ҳангоми таҳияи он Консепсияи миллии маълумоти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва талаботи Стандарти давлатии таҳсилоти умумӣ аз математика пурра ба эътибор гирифта шудааст. Бо назардошти то ҳол мавҷуд набудани китобҳои дарсӣ ва маводди дидактикӣ барои мактабҳои тамоилӣ мундариҷаи китоб нисбат ба барномаи таълим андак васеътар карда шудааст. Ин имконият медиҳад, ки китоб дар литсею гимназияҳо низ ба сифати китоби дарсӣ истифода карда шавад.

Китоби мазкур аз 5 параграф, ки ба 36 мавзӯъ ҷудо карда шудааст, иборат аст. Дар ин китоб ҷисмҳои геометрӣ, ба монанди бисёррӯяҳо ва ҷисмҳои чархзанӣ, хосиятҳои онҳо, буришҳо, масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи онҳо ва ҳаҷми ин ҷисмҳо объекти омӯзиш қарор мегиранд. Қариб дар ҳар як банд баъди баёни маводди назариявӣ ҳалли як ё якчанд масъала оварда мешавад, ки раванди ҳал тарзи истифодаи паҳлуҳои назарияро инъикос мекунад. Қисми назариявии банд бо саволҳои назоратӣ ба охир мерасад. Ба ҳар саволи гузошташуда аз матн ҷавоби аниқро пайдо кардан мумкин аст. Дар маҷмӯъ саволҳои назоратӣ тамоми мундариҷаи китобро фаро мегиранд. Ҳамин тариқ, саволҳо аз маводди назариявӣ қисмати асосии мавзӯъро ҷудо карда, сатҳи зарурии азхудкунии онро қайд мекунанд. Ин имкон медиҳад, ки вазифаи хонагӣ доир ба назария на бо усули анъанавии азёдкунӣ, балки дар шакли тайёр кардани ҷавоб ба саволҳои овардашуда супурда шавад. Ба андешаи мо ин тарз ҳам барои хонанда ва ҳам барои омӯзгор ниҳоят мувофиқ аст. Хонанда ба саволҳо ҷавоб пайдо карда, бо маводди таълимӣ кор кардан ва фарқ карда тавонистани элементҳои асосии ҳар як мавзӯъро ёд мегирад, ки маҳз ҳамин роҳи дар оянда мустақилона омӯхтанро барои ӯ ҳамвор мекунад.

Миқдори масъалаҳои дар ҳар як мавзӯъ овардашуда имконият медиҳад, ки бо назардошти қобилият вазифаи хонагӣ фардӣ бошад. Бо афзудани рақами масъала дар мавзӯъ раванди ҳалли он мушкилтар мегардад. Масъалаҳое, ки ҳаллашон каме мураккаб аст, бо аломати * нишонагузорӣ шудаанд.

Дар охири ҳар як банд, чун қоида ду масъала барои такрор оварда мешавад. Масъалаи стереометрии ин қисм бо истифодаи назарияи бандҳои пешина ҳал шуда, масъалаи планиметриаш бошад, дар асоси маводди синфҳои 7-9 ҳал мегардад.

Мувофиқи талаботи Стандарти таҳсилоти умумии Ҷумҳурии Тоҷикистон дар китоб маълумоти таърихӣ оварда мешавад, ки дар он саҳми нобиғаҳои Юнони қадим, мамолики Шарқ, алалхусус Осиёи Марказӣ ва Аврупо дар рушди илми геометрия қайд шудааст.

Хулоса сохтори китоб айнан ба сохтори китобҳои дарсии фанҳои математикӣ барои синфҳои 6-11 монанд аст. Ба андешаи мо ягонагии сохтори китобҳои дарсӣ омӯзиши фанни математикаро дар ҳамаи зинаҳои таҳсилот осон мегардонад.

Нашри навбатии китоб баъди реҳлати муаллифи он, профессор Боймурод Алиев омода шудааст. Дар ин нашр тағйироти зерин ба чашм мерасад:

- матни китоб бо назардошти меъёрҳои нави имлои забони тоҷикӣ ба риштаи таҳрир кашида шудааст;
- хатоҳои математикие, ки дар нашрҳои пештара роҳ ёфта буданд, ислоҳ карда шудаанд;
- яке аз талаботи асосии низоми таҳсилоти муносибати босалоҳият ин фаъол гардонидани хонандагон дар раванди таълим тавассути саволу ҷавоб ва додани супоришҳо оид ба мавзӯи матраҳшаванда мебошад, то ки хонандагон баъди омӯхтани ҳар як мавзӯъ салоҳиятҳои заруриро ба даст оранд. Ба ибораи дигар, хонандагон бояд маводди назариявии ҳар як мавзӯъро пеш аз омӯзиши мавзӯи нав пурра азхуд кунанд ва дониши назариявии гирифтаашонро дар ҳалли мисолу масъалаҳои амалӣ татбиқ карда тавонанд. Инро ба инобат гирифта, миқдори саволҳо оид ба баъзе мавзӯъҳо зиёд карда шудааст.

Аз хонандагон эҳтироман хоҳиш карда мешавад, ки фикру мулоҳизаҳояшонро нисбат ба мазмуну мундариҷаи китоб ба Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон ва ё ба суроғаи электронии mahmadsalim_86@mail.ru ирсол кунанд. Андешаҳои судманд зимни омода кардани китоб барои нашрҳои оянда ба инобат гирифта мешаванд.

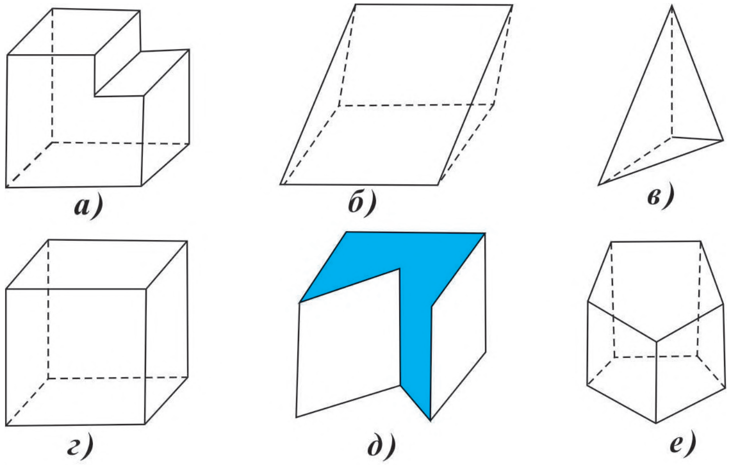
§1. БИСЁРРӮЯҲО

1. МАЪЛУМОТИ УМУМӢ ДАР БОРАИ БИСЁРРӮЯҲО

Ба омӯзиши фигураҳо дар фазо, ки онҳо **ҷисмҳо** ном доранд, шурӯъ мекунем. Бо мақсади васеъ кардани доираи масъалаҳое, ки мо бо онҳо дар синфи 10-ум сари кор доштем, мафҳуми бисёррӯяро дохил карда будем (ниг. ба китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10-ум, §1, банди 3). Мисли бисёркунҷаҳо дар ҳамворӣ фигураҳои одитарини фазо бисёррӯяҳо мебошанд. Дар ҳамон ҷой баъзе маълумоти аввалинро нисбат ба параллелепипед ва пирамида, инчунин буриши онҳо бо ҳамворӣ оварда будем.

Акнун ба омӯзиши муфассали бисёррӯяҳо сар карда, хосиятҳои умумӣ ва дар мисоли бисёррӯяҳои алоҳида (призма, параллелепипед, пирамида) хосиятҳои мушаххаси онҳоро муоина мекунем. Баъзе мафҳумҳое, ки дар китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10-ум оварда шуда буданд, аз нав васеътар баён карда мешаванд.

Таъриф. *Ҷисми геометрии маҳдуд**, *ки сатҳи он аз шумораи охирноки бисёркунҷаҳои ҳамвор иборат аст, бисёррӯя номида мешавад* (расми 1).



Расми 1

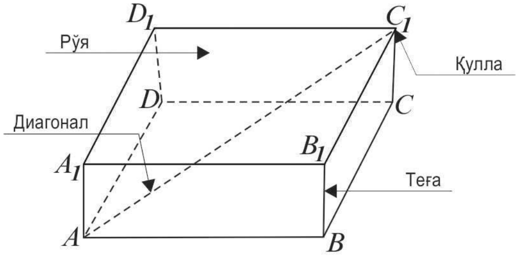
* Дар фазо ҷисми геометрии маҳдуд гуфта, қисми маҳдуди фазоро меноманд, ки бо ҷисми физикӣ ҷудо карда шудааст.

Мисоли бисёррӯяҳоро сари ҳар қадам дидан мумкин аст. Масалан, собун, қуттии гӯгирд, китоб, синфхона бисёррӯяҳоянд.

Бисёркунҷаи дилхоҳи дар сатҳи бисёррӯя бударо мегирем. Вай дар ҳаморие ҷойгир аст. Ин ҳамворӣ тавре медонем (ниг. ба китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10-ум, масъалаи 35), фазоро ба ду қисм ё ба ду зерфазо ҷудо мекунад. Агар бисёррӯя дар *як тарафи* ҳар яке аз чунин ҳамвориҳо ҷойгир бошад, он гоҳ вай *барҷаста* ном дорад. Бисёррӯяҳои б), в), г), е)-и расми 1 барҷаста буда, бисёррӯяҳои а) ва д) ғайрибарҷастаанд.

Таърифи овардашудаи бисёррӯяи барҷаста ба таърифи зерин баробарқувва аст: *Бисёррӯя барҷаста номида мешавад, агар ҳар гуна порчаи нугҳояш дар бисёррӯя ҷойгирбуда, пурра (яъне, ҳар як нуқтааш) дар он ҷойгир бошад.*

Бисёркунҷаҳо, ки аз он бисёррӯя ташкил меёбад, *рӯяҳо* ном доранд. Порчаеро, ки дар натиҷаи буриши ду рӯя ҳосил мешавад, *тега* мегӯянд. Нуқтае, ки дар он се ё зиёда аз он рӯяҳо бурида мешаванд, *қуллаи* бисёррӯя аст. Порчаи хатти рост, ки ду қуллаи дар як рӯя нахобидаи бисёррӯяро бо ҳам пайваст мекунад, *диагонали* он номида мешавад. Дар



Расми 2

бисёррӯяи дар расми 2 овардашуда: а) чоркунҷаҳои $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1, ABB_1A_1 – рӯяҳо; б) порчаҳои AB, D_1C_1, BB_1 – баъзе аз теғаҳо; в) нуқтаҳои A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 – қуллаҳо; г) порчаи AC_1 диагонал мебошанд. Рӯяҳо *сатҳи* бисёррӯя ё *сарҳади* бисёррӯяро ташкил медиҳанд. Зоҳиран возеҳ аст, ки барои ҷисми геометрӣ будани бисёррӯя (яъне, барои ишғоли қисми фазо) зарур аст, ки вай на кам аз 4 рӯя дошта бошад.

Математики бузурги Швейтсария Леонард Эйлер (1707-1783) вобастагии байни рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёр-рӯяи барҷастаро муайян кардааст, ки он бо номи *тавсифи (характеристикаи) Эйлер* машҳур аст. Агар бо Р миқдори рӯяҳо, бо Т миқдори теғаҳо ва бо Қ миқдори қуллаҳоро ишорат кунем, он гоҳ ин тавсиф бо формулаи

$$P\text{-}T+Қ=2$$

ифода мешавад*. Кунҷҳоеро, ки ҳангоми буриши теғаҳо ҳосил мешаванд, *кунҷҳои* бисёррӯя меноманд. Нишон додан мумкин аст, ки ҳосили ҷамъи кунҷҳои бисёррӯя бо формулаи $S=(Қ\text{-}2)\cdot360^{o}$ ҳисоб карда мешавад.

Масъалаи 1. Бисёррӯяи барҷаста 12 қулла ва 5 рӯя дорад. Миқдори теғаҳои онро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи формулаи Эйлер, аз рӯйи додашудаҳо муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$5\text{-}T+12=2 \text{ ё } 17\text{-}T=2, \text{ ё ки } T=15.$$

Масъалаи 2. Муайян мекунем, ки оё аз 3 дона квадрат ва 2 дона секунҷаи баробартараф бисёррӯяи барҷаста сох-тан мумкин аст ё на.

Ҳал. Агар чунин бисёррӯя мавҷуд бошад, пас вай 5 рӯя дорад. Агар бо T миқдори теғаҳои онро ишорат кунем, он гоҳ $2T$ ба ҳосили ҷамъи миқдори тарафҳои ҳамаи рӯяҳо баробар аст, яъне

$$2T=3\cdot4+2\cdot3=18, \qquad T=9.$$

Ҳосили ҷамъи кунҷҳои дохилии бисёррӯя $S=3\cdot360^{o}+2\cdot180^{o}=4\cdot360^{o}$ аст. Бинобар ин $(Қ\text{-}2)\cdot360^{o}=4\cdot360^{o}$ ё $Қ\text{-}2=4$, ё ки $Қ=6.$ Мебинем, ки формулаи Эйлер $P+Қ=T+2$ ҷой дорад, чунки $5+6=9+2$. Инак, чунин бисёррӯя вуҷуд дорад.

---

* Нишон дода шудааст, ки ҷой доштани ин формула шарти зарур ва кифояи барҷаста будани бисёррӯя мебошад.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна ҷисми геометриро бисёррӯя меноманд? Мисолҳои бисёррӯяҳоро оред.

2. Кадом бисёррӯя барҷаста номида мешавад?

3. Рӯя, теға, қулла ва диагонали бисёррӯя гуфта чиро мегӯянд?

4. Формулаи вобастагии байни ин мафҳумҳое, ки дар формулаи Эйлер мавҷуданд шарҳ диҳед.

5. Ҳосили ҷамъи кунҷҳои бисёррӯя бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

1. Нишон диҳед, ки бисёррӯяе, ки дорои шакли китоб аст, барҷаста мебошад.

2. Яке аз бисёррӯяҳо шакли ситораи панҷгӯша ва дигаре шакли хонаи бисёрошёнаи шабеҳи ҳарфи П-ро дорад. Нишон диҳед, ки ин бисёррӯяҳо барҷаста нестанд.

3. Миқдори рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёррӯяҳои б), в), г) ва е)-и дар расми 1 овардашударо ёбед. Нишон диҳед, ки онҳо ба формулаи Эйлер тобеанд.

4. Миқдори рӯяҳо, теғаҳо ва қуллаҳои бисёррӯяҳои а) ва д)-и дар расми 1 бударо ёбед. Оё онҳо тавсифи Эйлерро қаноат мекунанд?

5. Магар аз рӯйи 8 шашкунҷаи мунтазам ва 6 квадрат бисёррӯяи барҷаста сохтан мумкин аст?

Масъалаҳо барои такрор

6. Охирҳои порчаи дарозиаш 1,25 м аз ҳамворӣ дар масофаҳои 1 м ва 0,56 м ҷойгиранд. Проексияи онро дар ҳамворӣ муайян намоед.

7*. Ҷойи геометрии нуқтаҳоеро ёбед, ки аз ду нуқтаи додашуда дар масофаи баробар ҷойгиранд.

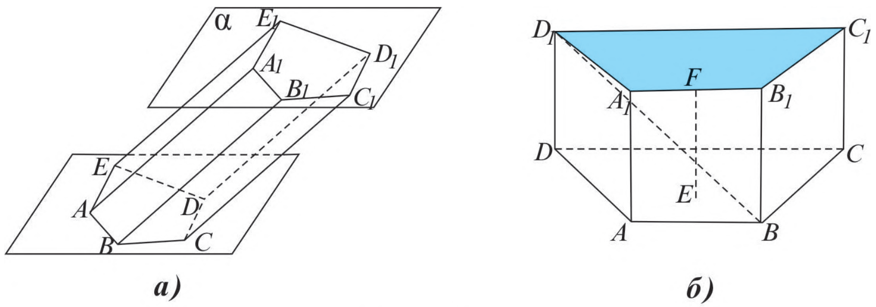
8. Магар яке аз кунҷҳои параллелограм ба 30° ва дигараш ба 60° баробар шуда метавонад?

9. Масофаи байни марказ ва хордаи давра $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ м буда, аз радиус 2 маротиба хурд аст. Дарозии хордаро ёбед.

2. ПРИЗМА

Акнун ба омӯзиши бисёррӯяҳои мушаххас мегузарем. Омӯзишро аз призма сар мекунем.

Таъриф. Бигузор дар ду ҳамвории параллел ду бисёркунҷаи бо ҳам баробар дода шудаанд. Бисёррӯяе, ки рӯяҳои он дар натиҷаи пайваст кардани қуллаҳои мувофиқи* ин бисёркунҷаҳо ҳосил мешавад, *призма* ном дорад (расми 3).



Расми 3

Ба ибораи дигар, призма бисёррӯяест, ки рӯяҳои (сарҳади) он дар натиҷаи буриши ҳамвориҳои аз болои ду тарафи мувофиқи бисёркунҷаҳо гузаранда ва худи бисёркунҷаҳо ҳосил мешаванд.

Дар байни рӯяҳои призма *рӯяҳои паҳлуӣ* ва *асосҳоро* фарқ мекунанд. Бисёркунҷаҳои бо ҳам баробари дар ҳамвориҳои параллел ҷойгирбуда асосҳоянд. Ҳангоми бисёркунҷаи барҷаста будани асоси призма, вай бисёррӯяи

---

* Ду қуллаи чунин бисёркунҷаҳо бо ҳам мувофиқанд, агар: 1) тарафҳои ба ин қулла часпидаи бисёркунҷаҳо байни худ параллел бошанд; 2) ин тарафҳо ва кунҷи байни онҳо ба ҳамдигар баробар бошанд; 3) масофаи ин қуллаҳо дар байни масофаҳои яке аз онҳо то қуллаҳои бисёркунҷаи дигар камтарин бошад. Ду тарафи аз ин қулла баромадаро тарафҳои мувофиқ мегӯянд.

барҷаста аст (Дар ин ҷо ва дар оянда мо танҳо чунин призмаро дида мебароем).

Теоремаи 1. *Рӯяҳои паҳлуии призма, ки дар натиҷаи пайвасти қуллаҳои мувофиқ ҳосил мешаванд, параллелограммҳо мебошанд.*

Ин тасдиқ зоҳиран фаҳмост, чунки дар чоркунҷаи AA_1E_1E (расми 3, а) тарафҳои AA_1 ва E_1E мувофиқи таърифи призма параллеланд. Тарафҳои AE ва A_1E_1 бошанд, ҳамчун тарафҳои мувофиқ параллел ва баробаранд. Яъне, чоркунҷаи AA_1E_1E параллелограм аст. Параллелограмм будани дигар рӯяҳои паҳлуӣ низ ҳамин тавр нишон дода мешавад.

Хулоса. *Теғаҳои паҳлуии призма ба ҳам баробар ва параллеланд.*

Дурустии хулоса аз он бармеояд, ки ду тарафи муқобили ин параллелограммҳо теғаҳои ҳамсоя буда, ду тарафи дигараш тарафҳои мувофиқи асосҳо мебошанд.

Масофаи байни ду ҳамвории параллел, ки дар онҳо асосҳои призма ҷойгиранд, *баландии призма* номида мешавад. Қуллаҳои асосҳо қуллаҳои призмаанд. Призмаро аз рӯйи миқдори тарафҳои асос ё миқдори кунҷҳои асос номгузорӣ мекунанд. Призма *n-кунҷа* номида мешавад, агар асоси он n-кунҷа бошад. Масалан, призмаи дар расми 3, а) овардашуда панҷкунҷа ва призмаи дар расми 3, б) буда чоркунҷа аст. Дар призмаи чоркунҷаи дар расми 3, б) овардашуда чоркунҷаҳои $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ – асосҳо, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CC_1D_1D, AA_1D_1D рӯяҳои паҳлуӣ мебошанд. Порчаи EF, ки ба асосҳо перпендикуляр аст, баландии ин призма мебошад. *Диагонали* призма порчаест, ки ду қуллаи дар як рӯя нахобидаи онро пайваст мекунад (ниг. ба зербанди 1). Дар призмаи расми 3, б) хатти D_1B диагонал аст.

Калимаи «***prisma***» лотинӣ буда, маънояш пораи (қисми) арракардашуда аст. Меъморон ҳангоми сохтани кӯшкҳо, манораҳо ва калисоҳо аз призмаҳо васеъ истифода кардаанд. Масалан, кӯшки дар ш.Виборги наздикии Санкт-Петербург буда, шакли призмаи ҳашткунҷаро дорад.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна бисёррӯяро призма меноманд?
2. Оид ба асосҳо, рӯяҳо ва теғаҳои паҳлуии призма чӣ гуфтан мумкин аст?
3. Баландӣ ва диагонали призма чӣ тавр муайян карда мешавад?
4. Призмаи *n*–кунҷа гуфта, чӣ гуна призмаро меноманд?
5. Калимаи призма чӣ маъно дорад?
6. Аз амалия мисоли призмаро оред.

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

10. Барои сохтани модели каркасии призмаи секунҷа, ки ҳар як теғааш ба 10 см баробар аст, чанд метр сим зарур аст? Барои призмаи панҷкунҷаи теғаҳои паҳлуиаш 8 см ва теғаҳои асосаш 4 см буда чӣ?

11. Дар мисоли призмаи чоркунҷа нишон диҳед, ки барои он формулаи Эйлер Қ+Р-Т=2 дуруст аст.

12. Миқдори камтарини рӯяҳо, ки аз онҳо призма сохтан мумкин аст, чандто мебошад? Ин призма чандто қулла, теға ва теғаи паҳлуӣ дорад?

13. Призмаи: а) ҳафткунҷа; б) даҳкунҷа; в) n-кунҷа чандто қулла, рӯя ва теға дорад?

14. Призма 33-то теға дорад. Он чӣ гуна призма аст?

15. Магар призмае мавҷуд ҳаст, ки вай: а) 13 қулла; б) 15 теға; в) 23 рӯя дошта бошад?

16. Дар призмаи: а) секунҷа; б) чоркунҷа; в) панҷкунҷа; г) n-кунҷа чандто диагонал гузаронидан мумкин аст?

17. Призмаи панҷкунҷа чандто: а) кунҷҳои ҳамвор*; б) кунҷҳои дурӯя** дорад?

Масъалаҳо барои такрор

18. Дар байни ду ҳамвории параллел перпендикуляри дарозиаш 4 м ва моили дарозиаш 6 м гузаронида шудаанд.

---

* Кунҷи ҳамвор гуфта кунҷи байни ду теғаро мегӯянд.

** Кунҷи дурӯя гуфта кунҷи байни ду рӯяро меноманд, ки онҳо теғаи умумӣ доранд. Ин кунҷ ба кунҷи байни ҳамвориҳое, ки рӯяҳоро дар бар гирифта аз рӯйи теға бурида мешаванд, баробар аст.

Масофаи байни нугҳои онҳо дар ҳарду ҳамворӣ ба 3 м баробар аст. Масофаи байни нуқтаҳои миёнаҷойи перпендикуляр ва моилро ёбед.

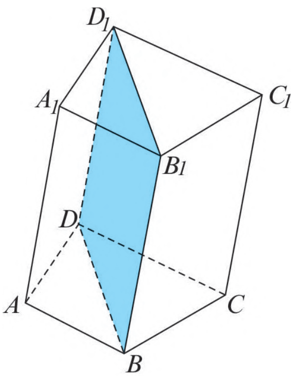
19. Аз 8 секунҷаи баробартараф ва 2 квадрат бисёррӯяи барҷаста сохтан мумкин аст?

20. Дарозии давраи дарункашидаи шашкунҷаи мунтазамро, ки тарафаш $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ м аст, ёбед.

3. БУРИШИ ПРИЗМА БО ҲАМВОРӢ

Ба мафҳуми буриши бисёррӯя бо ҳамворӣ дар фазо ҳанӯз аз синфи 10-ум ошноӣ доред (ниг. ба банди 3-и §1-и китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10-ум). Акнун онро васеътар дар мисоли бисёррӯяҳои мушаххас дида мебароем. Тавре нишон дода будем, ҳар гуна ҳамворӣ фазоро ба ду нимфазо ҷудо мекунад. Таърифи зеринро, ки барои бисёррӯя дар китоби дарсии «Геометрия барои синфи 10-ум» оварда шудааст, такроран барои ҷисми дилхоҳи геометрӣ меорем.

Таъриф. Агар ақаллан ду нуқтаи ҷисми геометрӣ дар нимфазоҳои гуногун ҷойгир бошанд, он гоҳ мегӯянд, ки *ҳамворӣ ҷисмро мебурад.* Дар ин ҳолат ҳамворӣ *ҳамвории буранда* ном дорад. Фигурае, ки ҳар як нуқтаи он ба ҷисм ва ба ҳамвории буранда тааллуқ дорад, *буриши ҷисм бо ҳамворӣ* ё кӯтоҳ *буриш* номида мешавад.



Расми 4

Теоремаи 2. *Буриши призма бо ҳамворӣ бисёркунҷаи барҷаста аст.*

Исбот. Буриши ҳамворӣ бо ду теғаи ҳамсояи призма нуқтаҳои фигураи буриш аст. Порчае, ки ин нуқтаҳоро пайваст мекунад, низ ба буриш тааллуқ дорад, чунки ин порча ҳам дар рӯяи призма ва ҳам дар ҳамворӣ ҷойгир аст. Пас буриши призма бо ҳамворӣ фигураи ҳамвор буда, сарҳадаш хатти шикастаи сарбаст аст. Яъне буриш бисёркунҷаи барҷаста аст. Теорема исбот шуд.

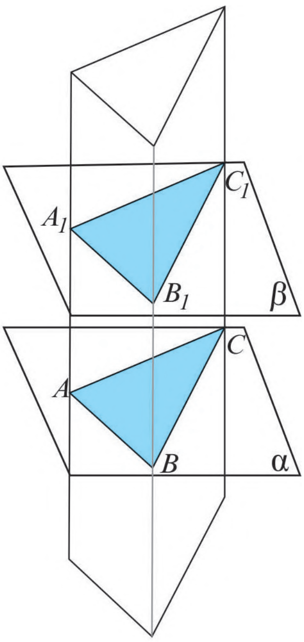
Буришҳои призма бо ҳамвориҳое, ки ба теғаҳои паҳлуӣ параллеланд, параллелограмҳо мебошанд.

Буришҳои диагоналӣ буришҳое мебошанд, ки дар натиҷаи буриш бо ҳамвориҳое, ки онҳо аз рӯйи ду теғаи паҳлуии дар як рӯя ҷойгирнабудаи призма мегузаранд, ҳосил мешаванд. Буришҳои диагоналӣ низ параллелограмманд. Дар расми 4 чоркунҷаи BB_1D_1D буриши диагоналии призмаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ аст. Вай дар натиҷаи буриши ҳамвории аз рӯйи теғаҳои паҳлуии BB_1 ва DD_1 гузаранда ҳосил шудааст.

Теоремаи 3. *Буришҳои призма бо ҳамвориҳои параллел, ки ҳамаи теғаҳои паҳлуиро мебуранд, бисёркунҷаҳои баробаранд.*

Исбот. Бо мақсади дурусттар дарк кардани ин теорема исботро барои призмаи секунҷа меорем (расми 5). Бигузор секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ буриши ҳамвориҳои α ва β бо призмаи секунҷа бошанд. Нишон медиҳем, ки ин секунҷаҳо бо ҳам баробаранд.

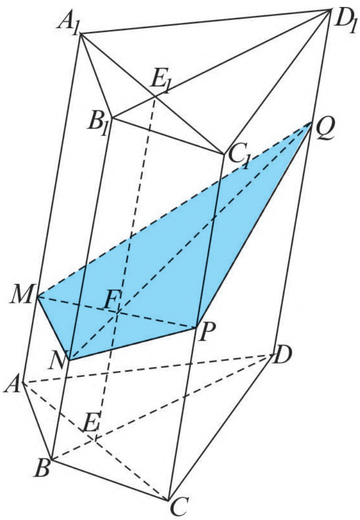
Тавре медонем, агар ду ҳамвории параллел бо ҳамвории сеюм бурида шаванд, он гоҳ хатҳои рости буриш параллел мебошанд (ниг. ба теоремаи 10-и китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10-ум). Яъне, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ ва $AC \parallel A_1C_1$. Аз тарафи дигар, мувофиқи хулосаи теоремаи 1 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Яъне чоркунҷаҳои ABB_1A_1, BCC_1B_1 ва ACC_1A_1 параллелограмманд, пас $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ ва $AC=A_1C_1$. Баробарии буришҳо аз баробар будани тарафҳояшон бармеояд. Теорема барои призмаи секунҷа исбот шуд.



Расми 5

Тасдиқи зерин хулосаи ин теорема аст: *Буриши призма бо ҳар гуна ҳамвории ба асосҳо параллел бисёркунҷаи ба асосҳо баробар мебошад.*

Масъалаи аввалин доир ба буришҳо ин аз рӯйи талаботи зарурӣ сохтани буриш аст. Масъалаи зеринро доир ба сохтани буриш муоина мекунем.



Расми 6

Масъала. Нуқтаҳои M, N ва P ба теғаҳои паҳлуии гуногуни призмаи чоркунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тааллуқ доранд. Буриши призмаро бо ҳамворие, ки аз ин нуқтаҳо мегузарад, месозем.

Ҳал. Порчаҳои MN ва NP ба буриши матлуб тааллуқ доранд (расми 6). Қуллаи буришро, ки дар теғаи DD_1 ҷойгир аст, меёбем. Барои ин буришҳои диагоналии AA_1C_1C ва BB_1D_1D–ро месозем. Порчаи умумии буришҳои диагоналӣ EE_1 хатти MP-ро дар нуқтаи F мебурад. Ин нуқта ба буриш тааллуқ дорад. Хатти NF теғаи DD_1-ро дар нуқтаи Q мебурад. Ҷоркунҷаи MNPQ буриши матлуб аст.

Баъзан дар масъалаҳо ба ғайр аз ёфтани буриш боз ҳисоби масоҳат, периметр ё элементҳои дигари он талаб карда мешавад. Дар мавзӯъҳои оянда бо чунин масъалаҳо шинос хоҳем шуд.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чиро буриши ҷисм бо ҳамворӣ мегӯянд?
2. Чаро буриши призма бо ҳамворӣ бисёркунҷаи барҷаста аст?
3. Буриши диагоналии призма гуфта чиро мегӯянд?
4. Теоремаи 3-ро дар мавриди призмаи чоркунҷа исбот кунед.

5. Хулосаи теоремаи 3-ро баён кунед.
6. Кадом вакт мегӯянд, ки ҳамворӣ ҷисмро мебурад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

21. Магар призмаи секунҷа буриши диагоналӣ дорад?
22. Аз рӯйи як теғаи призмаи панҷкунҷа чандто буриши диагоналӣ гузаронидан мумкин аст? Ин буришҳо призмаро ба чанд қисм ҷудо мекунанд? Ҳар яке аз ин қисмҳо чӣ гуна ҷисманд?
23*. Аз рӯйи ҳамаи теғаҳои паҳлуии призмаи n-кунҷа чандто буриши диагоналӣ гузаронидан мумкин аст?
24. Дар призмаи секунҷа буришеро созед, ки вай аз рӯйи тарафи асос ва қуллаи асоси дигар мегузарад.
25. Буриши призмаи чоркунҷаро бо ҳамворие созед, ки он аз рӯйи тарафи асос ва яке аз қуллаҳои асоси дигар мегузарад.
26. Буриши призмаи чоркунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ -ро бо ҳамворие, ки аз рӯйи диагонали AD_1 ва миёнаҷойи теғаи паҳлуии BB_1 мегузарад, созед.

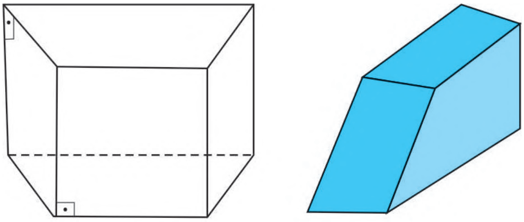
Масъалаҳо барои такрор

27. Порчаи дарозиаш 10 см ҳамвориро мебурад. Охирҳои ин порча аз ҳамворӣ дар масофаи 3 см ва 2 см ҷойгиранд. Кунҷи байни порча ва ҳамвориро ёбед.
28. Тарафҳои секунҷа ба 20 м ва 21 м, синуси кунҷи тези байни онҳо ба 0,6 баробар аст. Тарафи сеюмро ёбед.

4. ПРИЗМАҲОИ РОСТ ВА МУНТАЗАМ. МАСОҲАТИ САТҲҲОИ ПАҲЛУӢ ВА ПУРРАИ ОНҲО

Баъзан призмаҳоро аз рӯйи намуди кунҷҳое, ки теғаҳои паҳлуии онҳо бо тарафҳои асос ташкил мекунанд, номгузорӣ мекунанд.

Таърифи 1. Призма *рост* номида мешавад, агар теғаҳои паҳлуии он ба асосҳо перпендикуляр бошанд. Дар акси ҳол призмаро *призмаи моил* мегӯянд.



Расми 7

Дар расми 7, а) призмаи чоркунҷаи рост ва дар расми 7, б) призмаи моил тасвир шудааст. Призмаи дар расми 3, а) овардашуда низ моил мебошад. Мо асосан призмаҳои ростро муоина мекунем, агар махсус таъкид карда нашуда бошад.

Дар призмаи рост:

1. *Рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳо мебошанд.* Ин аз таърифи призма ва теоремаи 1 бармеояд. Перпендикулярии теғаҳои паҳлуӣ имконият медиҳад, ки онҳоро дар нақшаҳо ҳамчун порчаҳои амудӣ тасвир кунем.

2. *Теғаҳои паҳлуӣ, ки бо ҳам баробаранд, баландианд.*

Таърифи 2. Призмаи росте, ки асоси он бисёркунҷаи мунтазам аст, *призмаи мунтазам* номида мешавад.

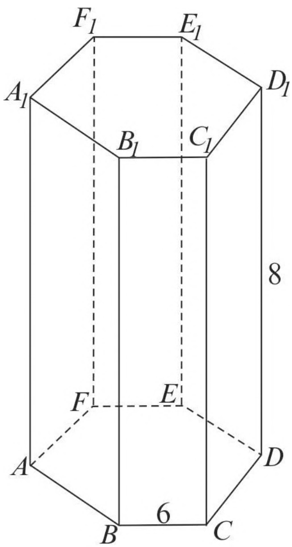
Рӯяҳои паҳлуии призмаи дилхоҳ *сатҳи паҳлуии* онро ташкил медиҳанд. Мувофиқан, асосҳо ва сатҳи паҳлуии ин призма *сатҳи пурраи* он аст.

Теоремаи 4. *Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи рост ба ҳосили зарби периметри асос бар баландӣ баробар аст.*

Исбот. Рӯяҳои паҳлуии призмаи рости n-кунҷа росткунҷаҳо мебошанд. Асоси ин росткунҷаҳо тарафҳои бисёркунҷаи асоси призма буда, баландиашон ба дарозии теғаҳои паҳлуӣ баробар аст. Агар дарозии теғаҳои асосро бо $a_1, a_2, \ldots a_n$, баландиро бо H ва масоҳати сатҳи паҳлуиро бо $S_{паҳ}$ ишорат кунем, он гоҳ

$$S_{пахл} = a_1H + a_2H + \cdots + a_nH = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)H = pH$$

мешавад, ки дар ин ҷо p периметри асоси призма аст. Теорема исбот шуд.



Расми 8

Фаҳмост, ки дар формулаи $S_{паҳ}=pH$, p-ро ҳамчун периметри буриши призма бо ҳамворие, ки ба асосҳо параллел аст, гирифтан мумкин аст (ниг. ба хулоса аз теоремаи 3). Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи рости мунтазами n-кунҷа, ки тарафи асосаш a аст, бо формулаи $S_{паҳ}=anH$ ҳисоб карда мешавад. Масоҳати сатҳи пурраи ҳар гуна призмаро бо формулаи

$$S_{пур}=S_{паҳ}+2S_{асос}$$

ҳисоб кардан мумкин аст.

Эзоҳ. Нишон додан мумкин аст, ки масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи дилхоҳ ба ҳосили зарби масоҳати *буриши перпендикулярӣ* (бисёркунҷаест, ки дар натиҷаи буриши ҳамворӣ бо ҳамаи теғаҳо ҳосил мешавад) бар теғаи паҳлуӣ, ки ин ҳамворӣ бо он перпендикуляр аст, баробар мебошад.

Масъалаи 1. Дар призмаи мунтазами 6-кунҷа теғаи асос ба 6 см ва баландӣ ба 8 см баробар аст. Масоҳати сатҳи пурраи призмаро меёбем.

Ҳал. Агар $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмаи мазкур бошад (расми 8), пас

$$S_{паҳл} = (AB + BC + CD + DE + EF + FA)DD_1 = 6 \cdot 6 \cdot 8 = 288.$$

$$S_{асос} = S_{ABCDEF} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot BC^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 6^2 = 54\sqrt{3}\ см^2.$$

Инак, $S_{пур} = 2S_{асос} + S_{паҳл} = (108\sqrt{3} + 288)\ см^2$.

Масъалаи 2. Масоҳати сатҳи пурраи призмаи секунҷа, ки теғаҳои асосҳояш 25 см, 29 см ва 36 см мебошад, ба 1620 см^2 баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва баландии призмаро меёбем.

Ҳал. Аввал аз рӯйи формулаи Герон масоҳати асос–секунҷаро меёбем. Нимпериметри секунҷаи асос

(25+29+36):2=45 *см* аст, бинобар ин

$$S_{асос}=\sqrt{45(45-25)(45-29)(45-36)}=$$

$$=\sqrt{45\cdot20\cdot16\cdot9}=3\cdot4\sqrt{900}=12\cdot30\ \ см^2=360см^2.$$

Мувофиқи шарти масъала $S_{пур}$=1620см^2. Азбаски $S_{пур}=S_{паҳл}+2S_{асос}$, пас $1620=2\cdot360+S_{паҳл}$. Аз ин ҷо $S_{паҳл}$=900 $см^2$. Мувофиқи теоремаи 4 $S_{паҳл}=p\cdot H$, яъне $900=90\cdot H$.

Инак, $S_{паҳл}$ =900 см^2, H=10 см.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Таърифи призмаи ростро баён кунед.
2. Чаро дар призмаи рост рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳо буда, баландӣ ба теғаи паҳлуӣ баробар аст.
3. Призмаи мунтазамро шарҳ диҳед.
4. Сатҳи паҳлуӣ ва сатҳи пурраи призма чист?
5. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи рост бо кадом формула ҳисоб карда мешавад? Масоҳати сатҳи пуррааш - чӣ?
6. Таърифи призмаи моилро баён кунед.
7. Оё формулаи масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи ростро барои ёфтани масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи моил истифода кардан мумкин аст?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

29. Дар призмаи рости секунҷа ҳамаи теғаҳо ба ҳамдигар баробаранд. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ 12 м^2 аст. Баландиро ёбед.

30. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи чоркунҷаи мунтазам 32 м^2 ва масоҳати сатҳи пуррааш 40 м^2 аст. Баландиашро ёбед.

31. Нисбати масоҳати буриши диагоналии призмаи чоркунҷаи мунтазамро бар масоҳати рӯяи паҳлуии он ёбед.

32. Диагонали призмаи мунтазами чоркунҷа ба d баробар буда, бо рӯя кунҷи 60^o-ро ташкил мекунад. Дарозии теғаи асосро ёбед.

33. Асоси призмаи рост секунҷаи росткунҷа аст. Аз миёнаҷойи гипотенуза ҳамвории ба он перпендикуляр гузаронида шудааст. Масоҳати буришро ёбед, агар катетҳо ба 20 см ва 21 см, теғаи паҳлуӣ ба 42 см баробар бошанд.

34. Асоси призмаи рост секунҷаи тарафҳояш 5 см ва 3 см, ки кунҷи байни онҳо 120° аст, мебошад. Масоҳати калонтарин дар байни рӯяҳои паҳлуӣ ба 35 $см^2$ баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаро ёбед.

35. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаи мунтазами чоркунҷа $64\sqrt{2}$ $см^2$ ва диагонали он 8 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи ин призмаро ёбед.

36. Теғаи паҳлуии призмаи моил, ки 15 см аст, бо ҳамвории асос кунҷи 30°-ро ташкил медиҳад. Баландии призмаро ёбед.

37. Масоҳати сатҳи пурраи призмаи чоркунҷаи мунтазамро ёбед, агар диагонали он $\sqrt{34}$ м ва диагонали рӯяи паҳлуияш 5 м бошад.

38*. Масофаи байни теғаҳои призмаи секунҷаи моил мувофиқан ба 2 см, 3 см ва 4 см баробар буда, масоҳати сатҳи паҳлуияш 45 $см^2$ аст. Теғаи паҳлуиро ёбед.

39*. Буриши перпендикулярии призма секунҷаи баробартарафест, ки дарозии тарафаш 4 см аст. Дарозии теғаи паҳлуии призма 10 см аст. Масоҳати сатҳи паҳлуиро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

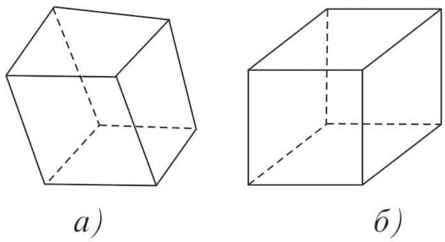
40. Призма 100 қулла дорад. Миқдори рӯяҳо ва теғаҳои ин призмаро муайян кунед.

41. Аз нуқтаи A дар зери кунҷи 60° ба ҳамвории моил гузаронида шудааст. Дарозии моилро ёбед, агар проексияи он ба ҳамворӣ 8 см бошад.

5. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Таърифи 1. Агар асосҳои призма параллелограммҳо бошанд, вай *параллелепипед* номида мешавад.

Дар расми 9, а) параллелепипеди моил ва дар расми 9, б) параллелепипеди рост оварда шудаанд. Рӯяҳои параллелепипед, ки теғаи умумӣ доранд, *ҳамсоя* ва рӯяҳое, ки чунин теғаро надоранд, *муқобил* номида мешаванд.

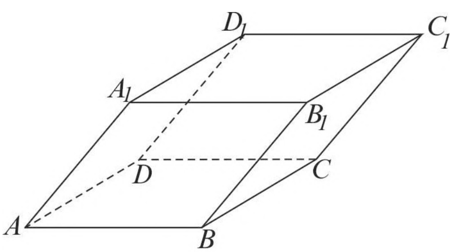


Расми 9

Баъзе хосиятҳои параллелепипед ба хосиятҳои маъмули параллелограмм шабоҳат доранд.

Таърифи 2. Ду параллелограмм *бо ҳам баробар* номида мешаванд, агар ду тараф ва кунҷи байни онҳо дар як параллелограмм ба ду тараф ва кунҷи байни онҳо дар параллелограмми дигар баробар бошанд.

Теоремаи 5. *Рӯяҳои муқобили параллелепипед бо ҳам баробар ва параллеланд.*



Расми 10

Исбот. Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед, $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ асосҳоянд (расми 10). Дар он мувофиқи таъриф $AB \| DC$, $AB=DC$ ва $A_1B_1 \| D_1C_1$, $A_1B_1=D_1C_1$ аст. Ғайр аз ин мувофиқи хулосаи теоремаи 1 теғаҳои паҳлуӣ параллел ва баробаранд. Яъне, $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$ ва $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Ҳамин тариқ, ҳар чор рӯяи паҳлуӣ параллелограммҳо мебошанд. Мувофиқи теоремаи 25 (ниг. ба китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10) $\angle BAA_1=\angle CDD_1$, $\angle CBB_1=\angle DAA_1$. Инчунин ҳамвории ABB_1A_1 ба ҳамвории DCC_1D_1, ҳамчун ҳамвориҳои аз болои ду ҷуфти хатҳои рости ҳамдигарро буранда мегузашта, параллел аст. Яъне, мувофиқи таърифи 2 $ABB_1A_1=DCC_1D_1$ аст. Баробарии

BCC_1B_1 ва ADD_1A_1 ҳам ҳамин хел муқаррар карда мешавад. Теорема исбот шуд.

Хулоса. *Дар параллелепипеди рост рӯяҳои паҳлуӣ рост-кунҷаҳоянд.*

Инак, ҳамаи шаш рӯяи параллелепипед параллелограммҳо мебошанд ва ду рӯяи дилхоҳи муқобили онро ҳамчун асос қабул кардан мумкин аст.

Доир ба ҳисоби масоҳати сатҳи пурраи параллелепипеди рост ҳалли ду масъаларо меорем.

Масъалаи 1. Масоҳати сатҳи паҳлуии параллелепипеди рост 220 см^2 буда, тарафҳои асосҳояш ба 3 м ва 8 м, кунҷи байни онҳо ба 60^o баробар аст. Масоҳати сатҳи пурраро меёбем.

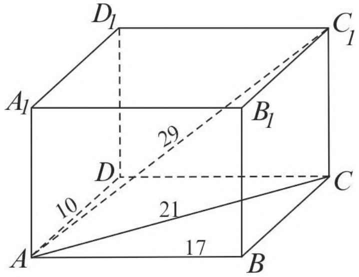
Ҳал. Аввал масоҳати асосро меёбем:

$$S_{асос} = 8 \cdot 3 \sin 60^0 = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$$

Пас,

$$S_{пур} = S_{паҳл} + 2S_{асос} = 220 + 24\sqrt{3} \approx$$
$$\approx 220 + 24 \cdot 1{,}7321 \approx 220 + 41{,}5704 \approx 262 см^2.$$

Масъалаи 2. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос ба 10 см ва 17 см баробаранд. Яке аз диагоналҳои асос 21 см буда, диагонали калонаш 29 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипедро меёбем.



Расми 11

Ҳал. Теғаи паҳлуии CC_1-ро аз рӯйи теоремаи Пифагор меёбем (расми 11):

$$CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{(29-21)(29+21)} =$$
$$= \sqrt{8 \cdot 50} = \sqrt{400} = 20 \;\; см.$$

Мувофиқи хулосаи теоремаи 5 рӯяҳои паҳлуӣ росткунҷаҳоянд, бинобар ин

$S_{паҳл} = 2(10\cdot 20) + 2(17\cdot 20) = 1080\ см^2$.

Акнун бо формулаи Герон масоҳати секунҷаи ABC-ро меёбем:

$$p = \frac{21+17+10}{2} = 24см,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} =$$

$$= \sqrt{24\cdot 3\cdot 7\cdot 14} = 2\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 7^2} = 14\cdot 6 = 84см^2$$

ва $S_{асос} = 2S = 168см^2$. Ҳамин тариқ,

$$S_{пур} = S_{паҳл} + 2S_{асос} = 1080 + 2\cdot 168 = 1416\ см^2.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна призмаро параллелепипед меноманд?
2. Рӯяҳои ҳамсоя ва муқобили параллелепипед чӣ тавр фарқ карда мешаванд?
3. Тасдиқи теоремаи 5 ба кадом хосияти параллелограмм шабеҳ аст?
4. Чаро дар параллелепипед ду рӯяи дилхоҳи муқобилро ҳамчун асосҳо қабул кардан мумкин аст?
5. Дар параллелепипеди рост рӯяҳои паҳлуӣ чӣ гуна фигураанд?
6. Оё аз амалия мисоли параллелепипеди ростро оварда метавонед?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

42. Параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст. Нишон диҳед, ки кунҷҳои дурӯя, ки теғаҳояшон AA_1 ва CC_1 мебошанд, ба ҳамдигар баробаранд.

43. Магар асоси параллелепипеди моил росткунҷа шуда метавонад?

44. Порчае, ки маркази ду асоси параллелепипедро мепайвандад ба теғаҳои паҳлуӣ параллел аст. Инро исбот кунед.

45. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос ба 6 м ва 8 м баробар буда, кунҷи 30^{o}-ро ташкил медиҳанд. Теғаи паҳлуӣ 5 м аст. Масоҳати сатҳи пурраро ёбед.

46. Дар параллелепипеди рост теғаи паҳлуӣ 1 м буда, тарафҳои асос ба 23 дм ва 11 дм баробаранд. Диагоналҳои асос ҳамчун 2:3 нисбат доранд. Масоҳати буришҳои диагоналиро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

47. Дар призмаи секунҷаи рост тарафҳои асосҳо 4 см, 5 см ва 7 см буда, теғаи паҳлуӣ ба баландии калони асос баробар аст. Баландии призмаро ёбед.

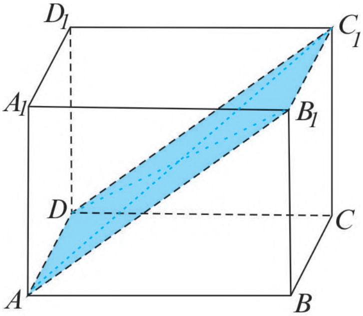
48. Тарафи хурди росткунҷа 6 см аст. Дарозии диагоналҳоро ёбед, агар онҳо ҳамдигарро дар тахти кунҷи 60^{o} буранд.

6. ХОСИЯТИ ДИАГОНАЛҲОИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Боз як далели ба параллелепипед хосбударо муқаррар менамоем.

Теоремаи 6. *Диагоналҳои параллелепипед дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи бурищ ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд.*

Исбот. Бигзор AC_1 ва DB_1 диагоналҳои параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бошанд (расми 12). Тарафи BC_1 ба BC параллел аст (мувофиқи теоремаи 1). ВС бошад, ба AD параллел аст. Пас теғаҳои AD ва B_1C_1 ба ҳам параллеланд ва дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Ин ҳамворӣ ҳамвориҳои рӯяҳои муқобили



Расми 12

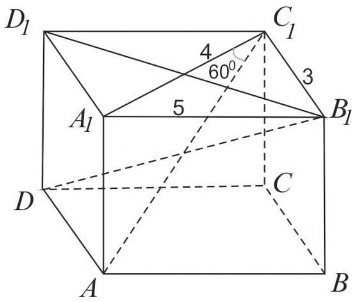
параллелепипедро аз рӯйи хатҳои DC_1 ва AB_1 мебурад. Аз сабаби параллелии ин рӯяҳо (теоремаи 5) ин хатҳо ба ҳам параллеланд. Инак, чоркунҷаи AB_1C_1D параллелограмм мебошад. Диагоналҳои параллелепипед AC_1 ва BD_1 диагоналҳои ин параллелограмманд. Пас аз рӯйи хосияти маъмули параллелограмм онҳо дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд.

Айнан ҳамин хел исбот карда мешавад, ки диагоналҳои BD_1 ва CA_1, инчунин BD_1 ва AC_1 бо ҳам бурида шуда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳисса тақсим мешаванд. Ҳамин тариқ, ҳар чор диагонали параллелепипед дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи буриш онҳо ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд. Теорема пурра исбот шудааст.

Эзоҳ. Мисли параллелограмм, нуқтаи буриши диагоналҳоро *маркази параллелепипед* меноманд.

Хулоса. *Дар параллелепипеди рост диагоналҳо ҷуфтан ба ҳамдигар баробаранд*.

Масъала. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос 3 см ва 5 см буда, яке аз диагоналҳои асос ба 4 см баробар аст. Диагонали калони параллелепипедро меёбем, агар маълум бошад, ки диагонали хурд бо ҳамвории асос кунҷи 60^o-ро ташкил медиҳад.



Расми 13

Ҳал. Диагонали дуюми асосро меёбем. Дар параллелограмм суммаи квадрати диагоналҳо ба суммаи квадрати тарафҳо баробар аст. Пас, диагонали дигари асос ба $\sqrt{2\cdot 3^2+2\cdot 5^2-4^2}=\sqrt{52}$ баробар буда, аз 4 калон аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки проексияи диагонали хурди параллелепипед (масалан, диагонали AC_1 дар расми 13), ки бо ҳамвории асос кунҷи 60^o-ро ташкил медиҳад, $A_1C_1=4$ мебошад. Аз секунҷаи росткунҷаи AA_1C_1 теғаи паҳлуӣ (баландии) параллелепипедро меёбем: $H=4tg60^o=4\sqrt{3}$. Аз секунҷаи росткунҷаи DD_1B_1, ки катетҳояш

$D_1B_1 = \sqrt{52}$ ва $DD_1 = H = 4\sqrt{3}$ мебошанд, диагонали калони параллелепипедро ҳосил мекунем:

$$DB_1 = \sqrt{(\sqrt{52})^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{52 + 16 \cdot 3} = \sqrt{52 + 48} = \sqrt{100} = 10.$$

Ҷавоб: диагонали калони параллелепипед 10 см аст.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Теоремаи 6 дар бораи чӣ маълумот медиҳад?
2. Дар исботи теоремаи 6 тарзи истифодаи хосияти параллелии рӯяҳои муқобили параллелепипедро (теоремаи 5) баён кунед.
3. Кадом хосияти диагоналҳои параллелограмм дар исбот ва чӣ тавр истифода карда шудааст?
4. Маркази параллелепипед чист?
5. Хулосаи теоремаи 6-ро баён кунед.

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

49. Тарафҳои асоси параллелепипеди рост ба $\sqrt{18}$ см ва 7 см, кунҷи байни онҳо ба 135°, теғаи паҳлуӣ ба 12 см баробаранд. Диагоналҳои параллелепипедро ёбед.

50. Тарафҳои асоси параллелепипеди рост ба 8см ва 5см, яке аз диагоналҳои асос ба 3,2 см ва диагонали калон ба 13 см баробар аст. Диагонали хурдашро ёбед.

51. Диагоналҳои параллелепипеди ростро, ки ҳамаи теғаҳояш ба *a* ва кунҷи асосаш ба 60° баробар аст, ёбед.

52. Асоси параллелепипеди рост ромб буда диагоналҳояш 10 см ва 24 см-анд. Баландии параллелепипед 10 см аст. Диагонали калони параллелепипедро ёбед.

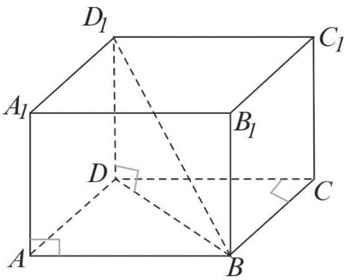
Масъалаҳо барои такрор

53*. Дар призмаи моили секунҷа ду рӯяи паҳлуӣ бо ҳам перпендикуляранд. Теғаи умумии онҳо аз ду теғаи дигар дар масофаи 12 см ва 35 см ҷойгир буда, ба 24 см баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии призмаро ёбед.

54. Периметри секунҷаи росткунҷа ба 30 см, суммаи квадратҳои тарафҳои он ба 338 см^2 баробар аст. Тарафҳои секунҷа ёфта шаванд.

7. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДИ РОСТКУНҶА. КУБ

I. Таърифи 1. Параллелепипеди рост, ки асосаш росткунҷа аст, *параллелепипеди росткунҷа* номида мешавад (расми 14).



Расми 14

Масалан, хишт, қуттиҳои гӯгирд ё сабзавот, хона ё ҳавзи шиноварӣ шакли чунин параллелепипедро доранд. Аз сабаби ҳолати хусусии параллелепипеди рост будани параллелепипеди росткунҷа (ПР) вай дорои хосиятҳои зерин мебошад: *Ҳамаи шаш рӯя росткунҷаҳоянд; рӯяҳои муқобил ба ҳамдигар параллеланд; дутои дилхоҳи онҳоро ба сифати асосҳо қабул кардан мумкин аст; диагоналҳо дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд.* Ин нуқта *маркази* параллелепипеди росткунҷа мебошад. Дар шакли теоремаҳо ду хосияти дигарро меорем, ки маҳз ба чунин параллелепипед хосанд. Нимҳамвориҳое, ки дар онҳо рӯяҳои ҳамсояи параллелепипед ҷойгиранд, кунҷҳои дурӯяро ташкил медиҳанд. Ин кунҷҳоро *кунҷҳои дурӯяи параллелепипед* меноманд.

Теоремаи 7. *Ҳамаи кунҷҳои дурӯяи параллелепипеди росткунҷа кунҷҳои ростанд.*

Исбот. Тасдиқи теорема возеҳ аст, чунки кунҷҳои рост будани кунҷҳои хаттии ин кунҷҳои дурӯя зоҳиран фаҳмоянд. Масалан, кунҷи дурӯяи рӯяҳои $ABCD$ ва ABB_1A_1 ба кунҷи A_1AB баробар аст, ки рост будани он аз таъриф бармеояд (расми 14). Рост будани кунҷҳои дурӯяи дигар ҳам ҳамин тавр муқаррар карда мешаванд.

II. Таърифи 2. Дарозии ҳар як се теға, ки дар як нуқта бурида мешаванд, *ченакҳо* ё *андозаҳои хаттии* параллелепипеди росткунҷа ном доранд.

Масалан, дар мисоли параллелепипеди росткунҷаи дар расми 14 овардашуда дарозии теғаҳои AB, AD ва AA_1 ченакҳо мебошанд. Дар зиндагии ҳаррӯза ин ченакҳо ҳамчун *дарозӣ, бар* ва *баландӣ* маъмуланд. Масалан, дар мисоли хона ё ҳавзи шиноварӣ.

Аз теоремаи Пифагор бармеояд, ки квадрати диагонали росткунҷа ба суммаи квадратҳои тарафҳояш баробар аст. Параллелепипеди росткунҷа ба ин монанд хосиятро дорост. Аниқаш, ҷумлаи зерин дуруст аст:

Теоремаи 8. *Квадрати диагонали параллелепипеди росткунҷа ба суммаи квадратҳои се ченакаш баробар аст.*

Исбот. Нишон медиҳем, ки дар параллелепипеди росткунҷаи $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$, масалан, баробарии

$$d^2 = D_1B^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$$

ҷой дорад (расми 14). Теғаи D_1D ба асос перпендикуляр аст, яъне кунҷи D_1DB кунҷи рост мебошад. Барои ҳамин аз секунҷаи D_1DB мувофиқи теоремаи Пифагор $D_1B^2 = DD_1^2 + DB^2$. Азбаски DB диагонали росткунҷаи $ABCD$ аст, пас $DB^2 = AB^2 + AD^2$ мешаванд. Инчунин $DD_1 = AA_1$. Аз ин се баробарӣ дурустии тасдиқи теорема бармеояд.

Хулоса. *Диагоналҳои параллелепипеди росткунҷа бо ҳамдигар баробаранд*.

Ҳамин тариқ, агар a, b, c ченакҳои параллелепипеди росткунҷа бошанд, он гоҳ квадрати дарозии диагонал бо формулаи $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ифода мешавад.

Масъалаи 1. Ченакҳои параллелепипеди росткунҷа ба 8, 9, 12 баробаранд. Дарозии диагоналро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи тасдиқи теоремаи 8

$$d^2 = 8^2 + 9^2 + 12^2 = 64 + 81 + 144 = 289.$$

Аз ин ҷо $d = \sqrt{289} = 17$.

III. Агар ченакҳои ПР (дарозӣ, бар ва баландии он) *а,в,с* бошанд, он гоҳ масоҳати сатҳи пурраи параллелепипед бо формулаи

$$S_{пур} = 2(ab + ac + bc)$$

ҳисоб карда мешавад. Чунки масоҳати сатҳи пурраи ПР ба ҳосили ҷамъи масоҳати ҳамаи шаш рӯя баробар аст.

Масъалаи 2. Диагонали ПР 5 буда, ченакҳояш *а,в,с* мебошанд. Маълум, ки $3a + \sqrt{7}b + 3c = 25$ аст. Масоҳати сатҳи пурраи ПР -ро меёбем.

Ҳал. Дарозии диагонал мувофиқи теоремаи 8 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 5$ аст. Барои ҳамин $a^2 + b^2 + c^2 = 25$. Мувофиқи шарти масъала $3a + \sqrt{7}b + 3c = 25$ ё $6a + 2\sqrt{7}b + 6c = 50$ аст. Пас,

$$a^2 + b^2 + c^2 - (6a + 2\sqrt{7}b + 6c) = 25 - 50 = -25$$

$$\text{ё } (a^2 - 6a) + (b^2 - 2\sqrt{7}b) + (c^2 - 6c) + 25 = 0.$$

Квадратҳои пурра ҷудо карда, ҳосил мекунем: $(a-3)^2 + (b-\sqrt{7})^2 + (c-3)^2 = 0$. Ягона қиматҳое, ки ин баробариро қаноат менамоянд $a = 3$, $b = \sqrt{7}$ ва $c = 3$ ҳастанд. Бинобар ин мувофиқи формулаи масоҳати сатҳи пурра дорем:

$$S_{пур} = 2(ab + ac + bc) = 2(3\cdot\sqrt{7} + 3\cdot 3 + 3\cdot\sqrt{7}) = 18 + 12\sqrt{17}.$$

Таърифи 3. Параллелепипеди росткунҷа, ки дар он ҳар се ченак ба ҳамдигар баробаранд, *куб* номида мешавад.

Дар куб ҳамаи шаш рӯя ба ҳамдигар баробар мебошанд. Куб ҳамаи он хосиятҳоеро, ки ба ПР мансубанд, дорад. Алалхусус, агар дарозии теғаи куб *а* бошад, он гоҳ диагонали он $d = \sqrt{3}a$ ва масоҳати сатҳи пуррааш $S_{пур} = 6a^2$ аст.

Масъалаи 3. Дарозии диагонали рӯяи куб ба $7\sqrt{2}$ см баробар аст. Дарозии диагонали кубро меёбем.

Ҳал. Агар теғаи куб ба *а* баробар бошад, он гоҳ диагонали рӯяи он ба $a\sqrt{2}$ баробар аст. Барои ҳамин

$a\sqrt{2} = 7\sqrt{2},$ яъне $a=7$ см. Мувофиқи формулаи дарозии диагонали куб $d = a\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ см мешавад.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна параллелепипедро ПР мегӯянд?
2. ПР ҳамчун параллелепипед дорои чӣ гуна хосиятҳо аст? Хосиятҳои танҳо ба ПР хосбударо номбар кунед.
3. Чаро дар ПР кунҷҳои дурӯя кунҷҳои рост буда, диагоналҳо ба ҳамдигар баробаранд.
4. Ченакҳои ПР кадомҳоянд?
5. Диагонали ПР бо кадом формула ҳисоб карда мешавад? Масоҳати сатҳи пуррааш - чӣ?
6. Чиро куб мегӯянд?
7. Призмаи рости квадратӣ (асосаш квадрат) аз куб чӣ фарқ дорад?
8. Масоҳати сатҳи пурраи куб бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

55. Ченакҳои ПР ба: а) 12, 16, 21; б) $\sqrt{39}$, 7, 9 баробаранд. Диагоналҳои онро ёбед.

56. Теғаи куб 7 м аст. Диагонали кубро ёбед.

57. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст. Кунҷи дурӯяи: а) ABB_1C -ро; б) A_1BB_1K-ро, ки K миёнаҷойи теғаи A_1D_1 аст, ёбед.

58*. Кунҷи тези байни ду диагонали кубро ёбед.

59. Дар ПР-и $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=12$ см, $BB_1=4$ см ва $BC=5$ см аст. Ёфта шавад: а) диагонали AC_1; б) масоҳати буриши ACC_1A_1 .

60. Дар ПР тарафҳои асос ба 7 см ва 24 см, баландӣ ба 8 см баробар аст. Масоҳати буриши диагоналии онро ёбед.

61. Дар ПР теғаи паҳлуӣ ба 5 см, масоҳати буриши диагоналӣ ба 205 см^2 ва масоҳати асос ба 360 см^2 баробар аст. Тарафҳои асосро ёбед.

62. Ҳосили ҷамъи ҳамаи теғаҳои ПР ба 16 м ва диагоналаш ба 3 м баробар аст. Масоҳати сатҳи пурраи онро ёбед.

63. Масоҳати сатҳи пурраи куб 24 м^2 аст. Теғаи онро ёбед.

64. Нишон диҳед, ки масоҳати сатҳи пурраи куб бо формулаи: а) $S_{пур} = 2d^2$, ки d дарозии диагонал аст; б) $S_{пур} = 3\sqrt{2}Q,$ ки Q масоҳати буриши диагоналӣ аст, ифода мешавад.

65. Дар ПР тарафҳои асос ҳамчун 7:24 нисбат доранд, масоҳати буриши диагоналӣ ба 50 см^2 баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуиро муайян кунед.

66*. Исбот кунед, ки агар ҳамаи диагоналҳои параллелепипед бо ҳамдигар баробар бошанд, он гоҳ вай росткунҷа аст.

67. Тарафҳои асоси ПР ба 3 м ва 4 м баробаранд. Диагонали параллелепипед ба ҳамвории асос кунҷи 45^o-ро ташкил мекунад. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипедро ёбед.

68. Диагонали ПР $5\sqrt{2}$ м буда, бо ҳамвории асос кунҷи 45^o -ро ташкил мекунад. Масоҳати сатҳи паҳлуии параллелепипедро ёбед, агар масоҳати асос 12 м^2 бошад.

69. Диагонали ПР-ро ёбед, агар вай бо ҳамвории асос кунҷи 60^o-ро ташкил дода, тарафҳои асос 3 м ва 4 м бошанд.

Масъалаҳо барои такрор

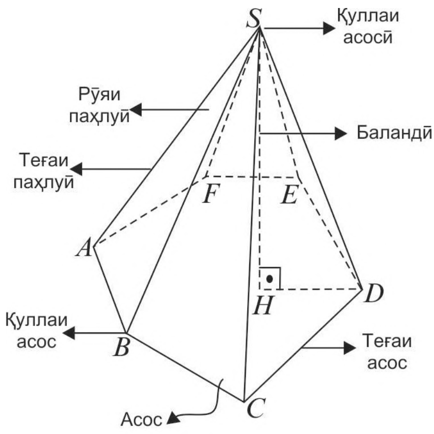
70. Дар призмаи секунҷа тарафҳои асос ба 3 м, 4 м ва 5 м, баландӣ ба 6 м баробаранд. Масоҳати сатҳи пурраи призма ёфта шавад.

71. Тарафҳои росткунҷа ҳамчун 4:1 нисбат дошта, масоҳаташ 400 см^2 аст. Тарафи калони росткунҷаро ёбед.

8. ПИРАМИДА

Мо бо пирамида, ҳамчун ҷисми геометрӣ ва ҳолати хусусии он – тетраэдр ҳангоми омӯзиши фанни геометрия дар синфи 10-ум шинос шуда будем. Дар ин ҷо баъзе тасвияҳои умумии ба ҳар гуна пирамида хосбударо васеътар муҳокима намуда, доир ба онҳо масъалаҳоро ҳал ва пешниҳод мекунем.

Таъриф. Бисёррӯяе, ки дар натиҷаи пайваст кардани нуқтаи додашудаи берунаи бисёркунҷаи ҳамвор бо ҳар як нуқтаи ин бисёркунҷа ҳосил мешавад, *пирамида* номида мешавад. Нуқтаи додашуда *қуллаи асосӣ,* бисёркунҷаи ҳамвор *асоси пирамида* ном доранд (расми 15).



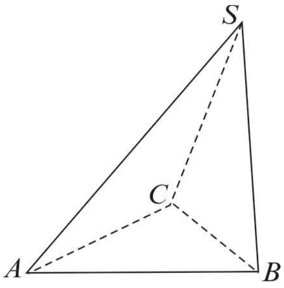
Расми 15

Пирамидаҳои Мисри қадим, ки оромгоҳи фиръавнҳо буда, асосашон квадрат аст ё бурҷҳои Кремли шаҳри Маскав мисоли пирамидаҳоянд. Қуллаи асосӣ ва қуллаҳои асос *қуллаҳои* пирамидаанд (Дар оянда агар махсус таъкид нашуда бошад, зери қуллаи пирамида қуллаи асосӣ фаҳмида мешавад.).

Сатҳи пирамида аз асос ва *рӯяҳои паҳлуӣ,* ки секунҷаҳоянд, иборат аст. Порчаҳое, ки қуллаи пирамидаро ба қуллаҳои асос пайваст мекунанд, *теғаҳои паҳлуӣ* ном доранд. Тарафҳои асосро *теғаҳои асос* ҳам мегӯянд. Порчае, ки аз қулла ба ҳамвории асос перпендикуляр фуроварда шудааст, *баландии пирамида* аст.

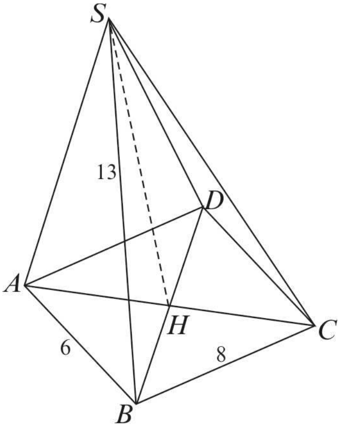
Пирамидаро мисли призма, аз рӯйи миқдори тарафҳои (кунҷҳои) асос номгузорӣ мекунанд. Пирамида *n-кунҷа* номида мешавад, агар асоси он бисёркунҷаи *n*-кунҷа бошад. Дар расми 15 пирамидаи шашкунҷа тасвир шудааст. Шашкунҷаи $ABCDEF$ асос, S қулла, SA, SB,…,SF теғаҳои паҳлуии он мебошанд. Рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои *ASB*, *BSC*,…,*FSA* буда, *SH* баландӣ аст.

Пирамидаи секунҷаро тетраэдр (tetrahedron) ҳам мегӯянд (аз ду калимаи юнонии tetra – чор ва hedra – асос, рӯя тартиб дода шуда, маънои tetrahedron чоррӯя аст). Тетраэдр дорои 4 рӯя, 6 теға ва 4 қулла мебошад (расми 16). Рӯяи дилхоҳи тетраэдрро ҳамчун асосаш қабул кардан мумкин аст.



Расми 16

Ҳангоми бисёркунҷаи барҷаста будани асоси пирамида, вай бисёррӯяи барҷаста аст. Бинобар ин барояш формулаи Эйлер (ниг. ба банди 1) дуруст аст. Яъне, байни миқдори рӯяҳо (*Р*), теғаҳо (*Т*) ва қуллаҳо (*Қ*) вобастагии Қ+Р-Т=2 ҷой дорад.



Расми 17

Масъала. Асоси пирамидаи чоркунҷа росткунҷаи тарафҳояш 6 см ва 8 см аст. Ҳар як теғаи паҳлуии пирамида 13 см аст. Баландии пирамидаро меёбем.

Ҳал. Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки баландии пирамида *SH* ҳамвории асос *ABCD*-ро дар нуқтаи буриши диагоналҳои росткунҷа мебурад. Ин диагоналҳо ба ҳамдигар баробар буда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешаванд (расми 17). Аз секунҷаи росткунҷаи *ABC*:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10. \text{ Пас } AH = \frac{AC}{2} = 5 \text{ см.}$$

Акнун аз секунҷаи росткунҷаи *AHS*:

$$\mathrm{SH} = \sqrt{\mathrm{AS}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

Ҷавоб: 12 см.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна бисёррӯя пирамида аст?
2. Асос, рӯяҳои паҳлуӣ, теғаҳо, қуллаҳо ва баландии пирамида чӣ тавр муайян карда мешаванд?
3. Пирамида аз рӯйи чӣ номгузорӣ карда мешавад?
4. Чӣ гуна пирамидаро тетраэдр меноманд?
5. Дар кадом ҳолат пирамида бисёррӯяи барҷаста аст?
6. Оё формулаи Эйлер барои пирамида низ ҷой дорад?
7. Рӯяҳои паҳлуии пирамида чӣ гуна фигураанд?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

72. Асоси тетраэдр секунҷаи баробарпаҳлуи асосаш 12 см ва тарафи паҳлуиаш 10 см аст. Рӯяҳои паҳлуӣ ба асос кунҷҳои дурӯяи ба 45^o баробарро ташкил медиҳанд. Баландии пирамидаро ёбед.

73. Секунҷаи баробарпаҳлу, ки асосаш 6 см ва баландиаш 9 см аст, асоси пирамида мебошад. Дар он теғаҳои паҳлуӣ бо ҳам баробар буда, дарозиашон 13 см аст. Баландии пирамидаро ёбед.

74. Асоси пирамида параллелограммест, ки тарафҳояш 3 см ва 7 см буда, яке аз диагоналҳояш 6 см аст. Баландии пирамида, ки аз нуқтаи буриши диагоналҳо мегузарад, 4 см аст. Теғаҳои паҳлуии пирамидаро ёбед.

75. Асоси тетраэдр секунҷаи баробартарафи тарафаш 9 см аст. Теғаи паҳлуӣ 6 см мебошад. Баландии тетраэдрро ёбед.

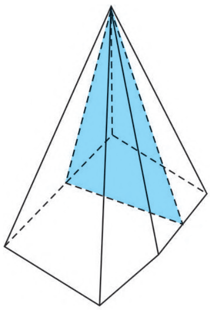
Масъалаҳо барои такрор

76. Ромби *ABCD*, ки тарафаш 8 см ва дар он $\angle A=45^o$ мебошад, дода шудааст. Аз нуқтаи *F* ба ҳамвории ромб перпендикуляри *FC* фуроварда шудааст. Масофаи нуқтаи *F* то тарафи *AD* ёфта шавад.

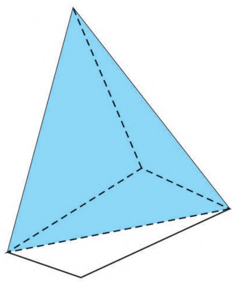
77. Дар секунҷаи росткунҷа яке аз катетҳо 3 см буда, котангенси кунҷи ба он часпида 0,75 аст. Гипотенузаро ёбед.

9. БУРИШИ ПИРАМИДА БО ҲАМВОРӢ

Ҳамворӣ рӯяҳои пирамидаро аз рӯйи порчаҳо мебурад. Бисёркунҷае, ки тарафҳояш ин порчаҳо мебошанд, *буриши пирамида* ё *буриш* ном дорад. Барои сохтани буриш кифоя аст, ки нуқтаҳои буриши ҳамвориро бо теғаҳо муайян карда, дутои чунин нуқтаро, ки дар як рӯя мехобанд, пайваст намоем. Буришҳои пирамида бо ҳамвориҳое, ки аз қуллаи асосии он мегузаранд, секунҷаҳо мебошанд (расми 18).

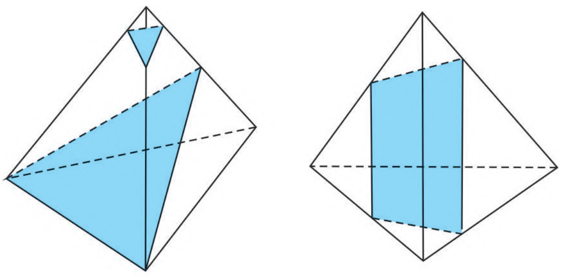


Расми 18



Расми 19

Дар пирамида буришҳое, ки онҳоро ҳамвориҳои аз рӯйи ду теғаи ҳамсоя набуда мегузашта ташкил мекунанд, *буришҳои диагоналӣ* ном доранд (расми 19). Онҳо низ секунҷаанд. Буришҳои тетраэдр, ки чор рӯя дорад, секунҷа ё чоркунҷа мебошанд (расми 20 а; б).



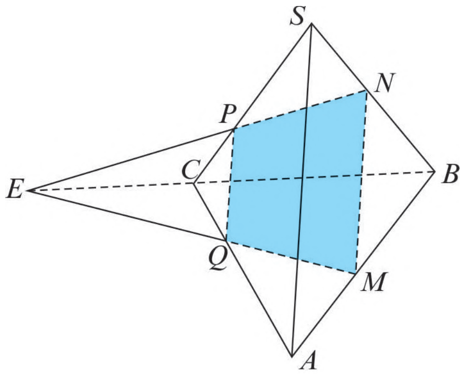
а) *б)*

Расми 20

Масъалаи зеринро доир ба сохтани буриш дар тетраэдр муоина мекунем.

Масъала. Дар теғаҳои AB, BC ва CS-и тетраэдри $SABC$ нуқтаҳои M, N ва P гирифта шудаанд (расми 21). Буриши тетраэдрро бо ҳамвории аз рӯйи ин нуқтаҳо гузаранда (ҳамвории MNP) месозем (Хатҳои рости PN ва BC параллел нестанд).

Ҳал. Дар аввал хатти ростеро месозем, ки аз рӯйи он ҳамвории MNP бо ҳамвории рӯяи ABC бурида мешавад. Нуқтаи M нуқтаи умумии ин ҳамвориҳост. Барои ёфтани боз як нуқтаи ин хатти рост порчаҳои PN ва BC-ро то буриданашон дар нуқтаи E давом медиҳем. E-нуқтаи матлуб аст.



Расми 21

Инак, ин ҳамвориҳо аз рӯйи хатти рости ME бурида мешаванд. Ин хат теғаи AC-ро дар нуқтаи Q мебурад. Чоркунҷаи $MNPQ$ чоркунҷаи матлуб мебошад.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Ҷаро буриши пирамида бо ҳамворӣ бисёркунҷа аст?
2. Буриши пирамида бо ҳамвориҳое, ки аз қуллаи асосии он мегузаранд, чӣ гуна фигураанд?
3. Чӣ гуна буришро буриши диагоналии пирамида мегӯянд?
4. Буриши пирамидаи n-кунҷа бисёркунҷаи $(n+1)$-кунҷа шуда метавонад? $(n+2)$-кунҷа чӣ?
5. Буришҳои тетраэдр чӣ гуна фигура буда метавонанд?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

78. Масъалаи дар матн муоинашударо ҳангоми параллел будани хатҳои рости PN ва BC ҳал кунед.

79. Дар призмаи секунҷаи $ABCA_1B_1C_1$ аз рӯйи теғаи AB ва қуллаи C_1 ҳамворӣ гузаронида шудааст.
Фигураи $C_1AB_1A_1$ чӣ гуна фигура аст?

80. Буриши ҳамвориро бо пирамидаи чоркунҷа, ки он аз рӯйи се нуқтаи ба теғаҳои гуногун тааллуқдошта мегузарад, созед.

81. Буриши ҳамвориро бо тетраэдр созед, агар маълум бошад, ки ҳамворӣ аз рӯйи нуқтаи яке аз теғаҳо ва ду нуқтаи рӯяҳои ин теғаро дарбарнагиранда мегузарад.

82. Аз рӯйи нуқтаи додашудаи рӯяи тетраэдр буриши ба асос параллелбударо созед.

83. Буриши ҳамвориро бо пирамида созед, агар ҳамворӣ аз рӯйи ягон нуқтаи асос ва яке аз теғаҳои паҳлуӣ гузарад.

Масъалаҳо барои такрор

84. Масоҳати се рӯяи параллелепипед ба 1 м^2, 2 м^2 ва 3 м^2 баробаранд. Масоҳати сатҳи пурраи ин параллелепипед чанд аст?

85. Тарафи паҳлуии секунҷаи баробарпаҳлуро ёбед, агар асоси он ба 18 см ва масоҳаташ ба 108 см^2 баробар бошад.

10. ПИРАМИДАИ САРБУРИДА

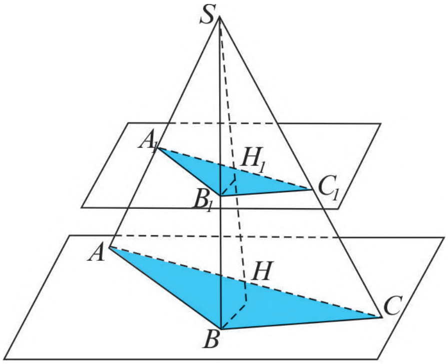
I. Теоремаи 9. *Агар ҳамвории ба асоси пирамида параллел тамоми теғаҳои паҳлуии пирамидаро бурад, он гоҳ:*

а) буриш ва асос ба ҳам параллеланд;

б) ин ҳамворӣ баландӣ ва теғаҳои паҳлуиро ба қисмҳои ба ҳам мутаносиб ҷудо мекунад;

в) бисёркунҷаҳои буриш ва асос ба ҳам монанданд.

Исбот. Исботи теоремаро барои пирамидаи секунҷа меорем. Бигузор асоси пирамидаи секунҷаи $SABC$ дар ҳамвории α ҷойгир аст ва SH баландиаш мебошад (расми 22). Фарз мекунем, ки пирамида бо ҳамвории β, ки ба α параллел аст, бурида шудааст ва секунҷаи $A_1B_1C_1$ буриш аст.



Расми 22

а) Порчаҳои A_1B_1 ва AB параллеланд. Чунки онҳо дар ҳамвориҳои параллел ҷойгир буда, қисмҳои буриши ҳамвории сеюм бо ин ду ҳамворӣ параллел мебошанд (ниг. ба теоремаи 10-и китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10-ум). Ҳамин тариқ, $AB \| A_1B_1$, $BC \| B_1C_1$, $AC \| A_1C_1$, $BH \| B_1H_1$. Яъне, тарафҳои ΔABC ва $\Delta A_1B_1C_1$ ҷуфт-ҷуфт бо ҳам параллеланд.

б) Аз параллелии порчаҳо ва теоремаи Фалес бармеояд, ки

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{SH_1}{SH}.$$

в) Аз мутаносибии тарафҳои секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$, мувофиқи аломати сеюми монандии секунҷаҳо тасдиқ карда метавонем, ки ин секунҷаҳо бо ҳам монанданд.

Теорема барои пирамидаи секунҷа исбот шуд. Дурустии ин теорема барои пирамидаи n-кунҷа бо тарзи ба пирамидаҳои секунҷа ҷудо кардани пирамида (бо ин тарз барои ба секунҷаҳо ҷудо кардани бисёркунҷаи асос бо осонӣ ноил шудан мумкин аст) ҳосил карда мешавад.

Хулоса. *Агар бо $S_{асос}$ масоҳати асос ва бо $S_{бур}$ масоҳати буриши параллелиро ишорат кунем*, *он гоҳ*

$$\frac{S_{бур}}{S_{асос}} = \frac{SH_1^2}{SH^2}.$$

Яъне, нисбати масоҳатҳо ба нисбати квадрати баландиҳо баробар аст.

Дар ҳақиқат, тавре медонем, масоҳатҳои ду бисёркунҷаи монанд ба квадратҳои тарафҳои мувофиқи онҳо мутаносиб аст, яъне, масалан,

$$\frac{S_{бур}}{S_{асос}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}. \quad \text{Вале} \quad \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SH_1}{SH}.$$

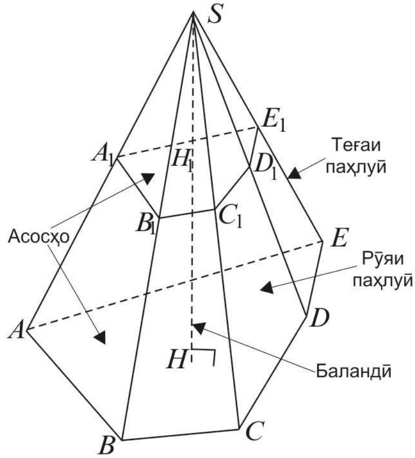
Ин дурустии хулосаро тасдиқ мекунад.

Масъалаи 1. Дар пирамида аз миёнаҷойи баландӣ ба асос буриши параллелӣ (буриши миёна) гузаронида шудааст. Масоҳати асос 60 см^2 аст. Масоҳати буришро меёбем.

Ҳал. Агар баландии пирамидаро бо H ишорат кунем, он гоҳ мувофиқи хулоса

$$\frac{S_{бур}}{S_{асос}} = \frac{(\frac{H}{2})^2}{H^2} = \frac{1}{4}.\ \text{Аз ин ҷо}\quad S_{бур} = \frac{S_{асос}}{4} = \frac{60}{4} = 15\ \text{см}^2.$$

II. Таъриф. Қисми пирамида, ки дар байни асос ва ҳамвории ба асос параллели онро буранда ҷойгир аст, *пирамидаи сарбурида* номида мешавад (расми 23).



Расми 23

Рӯяҳое, ки дар ҳамвориҳои параллел ҷойгиранд, *асосҳо* ном доранд. Онҳо мувофиқи теоремаи 9 бисёркунҷаҳои тарафҳои мувофиқашон параллел ва бо ҳам монананд. Буриш *асоси хурд* аст. Рӯяҳои дигари пирамидаи сарбуридаро чун пештара *рӯяҳои паҳлуӣ* мегӯянд. Онҳо трапетсияҳо мебошанд. Масалан, дар пирамидаи сарбуридаи $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$-и расми 23 порчаҳои AA_1, BB_1,… теғаҳои паҳлуӣ буда, трапетсияҳои ABB_1A_1, BCB_1C_1,… рӯяҳои паҳлуиānд. Порчаи H_1H-и ба асосҳо перпендикуляр баландӣ мебошад.

Масъалаи 2. Дар пирамидаи чоркунҷаи сарбурида тарафҳои яке аз асосҳо ба 6 см, 7см, 8см ва 9см баробаранд. Тарафи хурди асоси дигарӣ 5 см аст. Тарафҳои дигари ин асосро меёбем.

Ҳал. Агар тарафҳои номаълуми ин асосро бо x, y, z ишорат кунем, он гоҳ мувофиқи тасдиқи теоремаи 9 ба муодилаҳои $\frac{x}{7} = \frac{5}{6}$, $\frac{x}{8} = \frac{5}{6}$, $\frac{x}{9} = \frac{5}{6}$ соҳиб мешавем. Аз онҳо

меёбем: $x = \frac{35}{6}$; $y = \frac{20}{3}$; $z = \frac{15}{2}$.

Ҷавоб: $\frac{35}{6}$ см, $\frac{20}{3}$ см, $\frac{15}{2}$ см.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Буриши ҳамвории ба асоси пирамида параллел бо пирамида чӣ гуна фигура аст? Ин буриш дорои кадом хосиятҳо аст?

2. Кадом бисёрруя пирамидаи сарбурида аст? Вай аз пирамида чӣ тавр ҳосил мешавад?

3. Рӯяҳои паҳлуии пирамидаи сарбурида чӣ гуна чоркунҷаҳоянд?

4. Хулосаи теоремаи 9 дар бораи чӣ маълумот медиҳад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

86. Дар пирамида буриши ба асос параллел баландиро ба нисбати 3:4 ҷудо мекунад (аз қулла ба асос). Масоҳати буриш аз масоҳати асос 200 $см^2$ кам аст. Масоҳати асосро ёбед.

87. Баландии пирамида 16 м буда, масоҳати асосаш 512 $м^2$ аст. Буриши параллелӣ, ки масоҳаташ 50 $м^2$ аст, дар кадом масофа ҷойгир аст?

88. Дар пирамида масоҳати асос 150 $см^2$, масоҳати буриши параллелӣ 54 $см^2$ ва масофаи байни онҳо 14 см аст. Баландии пирамидаро ёбед.

89. Тарафҳои мувофиқи асосҳои пирамидаи сарбурида ҳамчун 13:17 нисбат доранд. Периметри буриши миёна 45 м аст. Периметри асосҳоро муайян кунед.

90. Масоҳати асосҳои пирамидаи сарбурида ба 25 $см^2$ ва 9 $см^2$ баробаранд. Масоҳати буриши миёнаро ёбед.

91. Масоҳати асосҳои пирамидаи сарбурида 18 $м^2$ ва 128 $м^2$ –анд. Масоҳати буриши параллелиро, ки баландиро ба нисбати 2:3 (аз асоси хурд сар карда) ҷудо мекунад, ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

92. Асоси параллелепипеди рост ромби диагоналҳояш 12 см ва 16 см мебошанд. Агар баландии параллелепипед 8 см бошад, масоҳати сатҳи пурраи он муайян карда шавад.

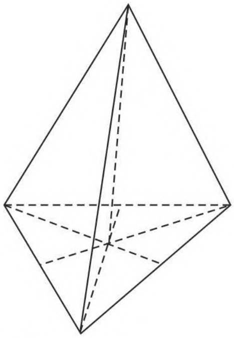
93. Дар секунҷаи баробарпаҳлу кунҷи назди қулла 120° буда, тарафҳои паҳлуӣ ба 10 см баробаранд. Берун аз секунҷа нуқтае дода шудааст, ки он аз ҳар як қуллаи секунҷа дар масофаи 26 см ҷойгир аст. Масофаи байни ин нуқта ва ҳамвории секунҷаро муайян кунед.

11. ПИРАМИДАИ МУНТАЗАМ

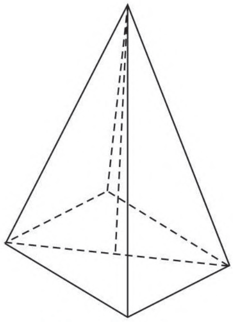
I. Тавре медонем, бисёркунҷа *мунтазам* номида мешавад, агар дар он тарафҳо ва кунҷҳо бо ҳам баробар бошанд. Масалан, секунҷаи баробартараф ё квадрат мисоли бисёркунҷаи мунтазаманд.

Таъриф. Агар асоси пирамида бисёркунҷаи мунтазам буда, баландиаш аз маркази ин бисёркунҷа гузарад, онро *пирамидаи мунтазам* меноманд.

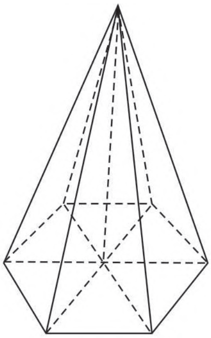
Дар расми 24 пирамидаҳои мунтазами секунҷа (тетраэдри мунтазам), чоркунҷа ва шашкунҷа оварда шудааст. Тавре маълум аст, маркази секунҷаи баробартараф нуқтаи буриши медианаҳо, маркази квадрат нуқтаи буриши диагоналҳо мебошад. Ин нуқтаҳо бошанд, маркази давраи дарункашида ё берункашидаи ин фигураҳо мебошанд. Дар умум гуфтан мумкин аст, ки маркази асоси пирамидаи мунтазам маркази давраи дарункашида ё берункашидаи асос аст.



Тетраэдри мунтазам



Пирамидаи мунтазами чоркунҷа

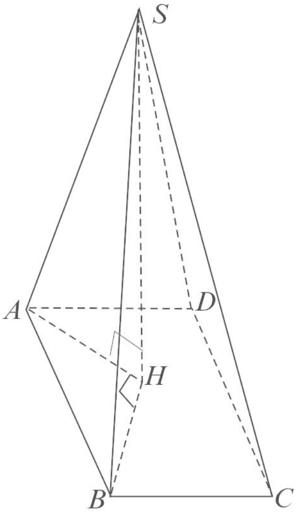


Пирамидаи мунтазами шашкунҷа

Расми 24

Хатти росте, ки баландии пирамидаро дар бар мегирад, *тири пирамида* ном дорад. Дар пирамидаи мунтазам:

1) *Теғаҳои паҳлуӣ бо ҳамдигар баробаранд*; 2) *Рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои бо ҳам баробари баробарпаҳлуянд;* 3) *Баландиҳои рӯяҳои паҳлуӣ, ки аз қулла ба асос фуроварда шудаанд, бо ҳамдигар баробаранд.* Ин баландиҳоро *апофема* меноманд.



Расми 25

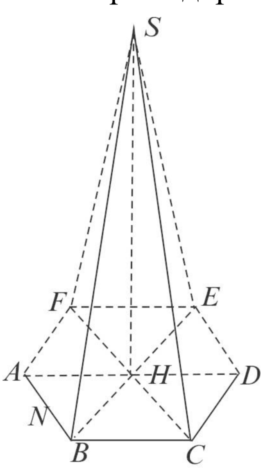
Исботи хосияти 1)-ро барои пирамидаи чоркунҷаи мунтазам (расми 25) меорем. Бигзор H маркази асос аст. ΔABH баробартараф буда, $\angle SHA=\angle SHB=90^o$. Пас, мувофиқи аломати дуюми баробарии секунҷаҳои росткунҷа $\Delta SHA=\Delta SHB$, яъне $SA=SB$. Айнан ҳамин гуна мулоҳизаронӣ ба баробарии $SB=SC$, баъд ба $SC=SD$ ва $SD=SA$ меорад.

Хосиятҳои 2) ва 3) хулосаҳои хосияти 1) мебошанд.

Масъалаи 1. Дар пирамидаи шашкунҷаи мунтазам теғаи асос 10 см ва баландӣ $\sqrt{69}$ см аст. Апофемаи пирамидаро меёбем.

Ҳал. Бигузор дар пирамидаи мунтазами $SABCDEF$ $AB=BC=10$ ва SN апофема аст (расми 26). Мувофиқи шарт $SH=\sqrt{69}$ см. Секунҷаи ABH баробартараф мебошад, пас

$BH=AH=AB=10$ см. Аз секунҷаи росткунҷаи SHB мувофиқи теоремаи Пифагор $SB^2=SH^2+HB^2=(\sqrt{69})^2+10^2=169$. Пас $SB=13$см. Апофема SN медианаи секунҷаи ASB аст, барои ҳамин



Расми 26

$AN = \frac{AB}{2} = 5$ см. Акнун аз секунҷаи росткунҷаи SNB:
$SB^2=SN^2+BN^2$ ё
$SN^2=SB^2-BN^2=13^2-5^2=169-25=144$; ва аз инҷо $SN=12$

Ҷавоб: дарозии апофемаи пирамидаи мунтазами мазкур 12 см аст.

II. Тавре гуфта будем, сатҳи пурраи пирамида аз асос ва рӯяҳои паҳлуӣ иборат аст (ниг. ба мавзӯи 8). Пас, масоҳати сатҳи паҳлуӣ ҳосили ҷамъи масоҳати рӯяҳои паҳлуӣ аст.

Теоремаи 10. *Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи мунтазам ба ҳосили зарби нисфи периметри асос бар апофема баробар аст.*

Исбот. Агар дарозии теғаи асоси пирамидаи мунтазами n-кунҷа a бошад, он гоҳ масоҳати як рӯяи паҳлуии он (ҳамчун масоҳати секунҷаи баробарпаҳлу) $\frac{al}{2}$ аст, ки дар ин ҷо l дарозии апофема мебошад. Аз сабаби баробарии рӯяҳои паҳлуӣ масоҳати ҳамаи онҳо $\frac{al}{2} \cdot n = \frac{pl}{2}$ мешавад, ки $p=an$ периметри асос аст. Теорема исбот шуд.

Ҳамин тариқ, барои пирамидаи мунтазами n-кунҷа

$$S_{пур} = S_{асос} + S_{паҳл} = S_{асос} + \frac{pl}{2}.$$

Агар ҳамвории ба асос параллел пирамидаи мунтазамро ба ду қисм ҷудо кунад, он гоҳ қисми дар байни асос ва ҳамворӣ ҷойгирбударо *пирамидаи сарбуридаи мунтазам* меноманд. Дар чунин пирамида асосҳо бисёркунҷаҳои мунтазаманд. Хатти росте, ки маркази асосҳоро мепайвандад *баландӣ* аст. Дар ин ҷо ҳам чун пештара *диагонал* гуфта, хатти ростеро меноманд, ки он ду қуллаи дар як рӯя нахобидаи пирамидаи сарбуридаро пайваст мекунад.

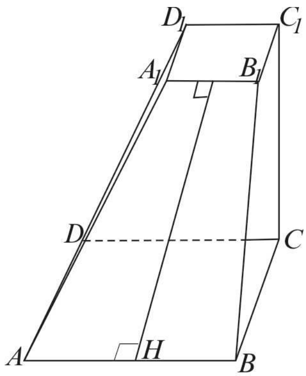
Рӯяҳои паҳлуии пирамидаи сарбуридаи мунтазам трапетсияҳои баробарпаҳлуи асосҳояшон якхелаи ба a ва b баробар мебошанд. Баландии ин трапетсияҳоро *апофема* мегӯянд.

Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки теоремаи зерин дуруст аст:

Теоремаи 11. *Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи сарбуридаи мунтазами n-кунҷа ба ҳосили зарби нисфи суммаи периметри асосҳо бар апофема баробар аст.*

Ба ибораи дигар, формулаи зерин ҷой дорад:

$$S_{паҳл} = \frac{(a+b)n}{2} \cdot l .$$



Расми 27

Масъалаи 2. Тарафҳои асосҳои пирамидаи сарбуридаи мунтазами квадратӣ мувофиқан ба 6 см ва 8 см баробар буда, апофемааш 5 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи ин пирамидаро меёбем.

Ҳал. Аввал масоҳати сатҳи паҳлуиро меёбем. Мувофиқи додашудаҳо $a=AB=8$ см, $b=A_1B_1=6см$ ва $l=HH_1=5см$ аст. (расми 27). Пас, аз рӯйи теоремаи 11

$$S_{паҳл} = \frac{(8+6)\cdot 4}{2}\cdot 5 = 140 см^2 .$$

$$S_{пур} = S_{паҳл} + S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1} = 140 + 8^2 + 6^2 = 240 \, см^2.$$

Ҷавоб: 240 см^2.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна пирамидаро мунтазам меноманд?
2. Маркази асоси пирамидаи мунтазам дар куҷо ҷойгир аст?
3. Чиро тири чунин пирамида мегӯянд?
4. Дар пирамидаи мунтазам теғаҳои паҳлуӣ, рӯяҳои паҳлуӣ ва баландии рӯяҳои паҳлуӣ чӣ гунаанд?
5. Апофемаи пирамидаи мунтазам гуфта, чиро мегӯянд?
6. Баландӣ, апофема ва диагонал дар пирамидаи сарбуридаи мунтазам чӣ тавр муайян карда мешаванд?
7. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи сарбуридаи мунтазам бо кадом формула ифода карда мешавад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

94. Дар пирамидаи мунтазами чоркунҷа масоҳати сатҳи паҳлуӣ ба 14,76 $м^2$, масоҳати сатҳи пурра ба 18 $м^2$ баробар аст. Дарозии тарафи асос ва баландии пирамидаро ёбед.

95. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам баландӣ 12 см буда, апофемаи рӯяи паҳлуӣ 15 см мебошад. Теғаи паҳлуии пирамидаро ёбед.

96. Тарафи асоси пирамидаи чоркунҷаи мунтазам ёфта шавад, агар баландии он H ва масоҳати сатҳи паҳлуяш S бошад.

97. Тарафи асоси пирамидаи чоркунҷаи мунтазам ва апофемаи онро ёбед, агар теғаи паҳлуӣ ба 10 см ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ ба 192 $см^2$ баробар бошад.

98. Тарафи асоси пирамидаи чоркунҷаи мунтазам 5 см, масоҳати сатҳи пурраи он 115 $см^2$ аст. Апофемаи пирамидаро ёбед.

99. Тарафи асоси пирамидаи секунҷаи мунтазами $SABC$ ба a, теғаи паҳлуиаш ба b баробар аст. Дар ин пирамида аз миёнаҷойи теғаҳои AB ва BC ба миёнаҷойи теғаи SB ҳамворӣ гузаронида шудааст. Масоҳати буришро бо пирамида ёбед.

100*. Баландии пирамидаи сарбуридаи мунтазами чоркунҷа 16 см, тарафҳои асосҳояш 24 см ва 40 см аст. Диагонали пирамидаи сарбурида ва масоҳати буриши диагоналии онро ёбед.

101. Масоҳати сатҳи пурраи пирамидаи секунҷаи мунтазамро, ки баландиаш 6 см ва кунҷи байни ҳамвориҳои рӯяи паҳлуӣ ва асос 60^o аст, ёбед.

102. Тарафҳои асосҳои пирамидаи сарбуридаи секунҷаи мунтазам ҳамчун 1:2 нисбат доранд. Баландии пирамидаи сарбурида H аст. Рӯяи паҳлуӣ бо ҳамвории асос кунҷи 45^o-ро ташкил мекунад. Масоҳати асосҳоро ёбед.

103. Дар пирамидаи сарбуридаи панҷкунҷа чандто диагонал гузаронидан мумкин аст? Дар пирамидаи сарбуридаи n-кунҷа чӣ?

104. Дар пирамидаи чоркунҷаи сарбуридаи мунтазам баландӣ 2 см, тарафҳои асосҳо 3 см ва 5 см мебошанд. Диагонали ин пирамидаи сарбуридаро ёбед.

105. Баландии пирамидаи сарбуридаи мунтазам 7 см, теғаи паҳлуӣ 9 см ва диагонал 11 см аст. Тарафи асосҳои пирамидаро ёбед.

106. Тарафҳои асосҳои пирамидаи сарбуридаи шашкунҷаи мунтазам ба 2 см ва 4 см, баландиаш ба 1 см баробаранд. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ёфта шавад.

107. Тарафҳои асосҳои пирамидаи сарбуридаи секунҷаи мунтазам ба 6 м ва 12 м баробаранд. Баландии он ба 1 м баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ёфта шавад.

108. Тарафҳои асосҳои пирамидаи чоркунҷаи сарбуридаи мунтазам 2 м ва 8 м, баландиаш 4 м аст. Масоҳати сатҳи пурраи пирамидаро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

109. Параллелепипеди росткунҷае дода шудааст, ки тарафҳои асоси он ба 4 см, 5 см ва теғаи паҳлуии он ба 3 см баробар аст. Масоҳати рӯяи калонтарини онро ёбед.

110. Дар секунҷаи ABC аз асоси D-и баландии AD ба тарафи AB параллел хатти рост гузаронида шудааст, ки он AC-ро дар нуқтаи K мебурад. AK/KC ёфта шавад, агар $S_{ADC} : S_{ABC} = \frac{3}{16}$ бошад.

§2. СИММЕТРИЯ ДАР БИСЁРРӮЯҲО

Дар синфи 10 табдилдиҳиҳои ҳаракат, симметрия, параллелкучониро дар фазо муоина карда будем. Алалхусус, табдилдиҳиҳои симметрия нисбат ба нуқта, нисбат ба хатти рост ва нисбат ба ҳамворӣ муфассал таҳқиқ шуда буданд. Дар ин параграф доир ба нуқтаҳо, хатҳои рост ва ҳамвориҳо, ки бисёррӯяҳо ҳамчун фигураҳои (ҷисмҳои) геометрӣ нисбат ба онҳо симметрианд, сухан меравад. Инчунин маълумоти ибтидоӣ нисбат ба бисёррӯяҳои мутлақо мунтазам оварда мешавад.

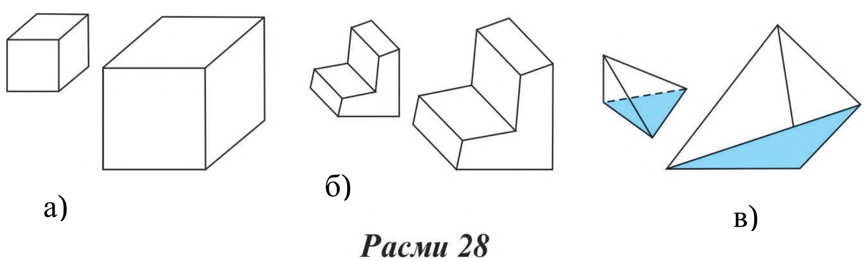
12. БАРОБАРӢ ВА МОНАНДИИ БИСЁРРӮЯҲО

Мисли ҳамворӣ, дар фазо ду фигура (ҷисми геометрӣ) *баробар* номида мешаванд, агар онҳо ҳангоми ягон ҳаракат ҳамҷоя шаванд. Масалан, ду призмаи n-кунҷа бо ҳамдигар баробаранд, агар асосҳо ва баландии онҳо баробар бошанд. Ҳамин тасдиқ нисбат ба ду пирамидаи n-кунҷа ҳам дуруст аст.

Дар планиметрия ду бисёркунҷаро, ки миқдори якхелаи тарафҳо доранд, монанд номида будем, агар кунҷҳои мувофиқи онҳо баробар буда, тарафҳои мувофиқашон мутаносиб бошанд. Ба ин мувофиқ, дар фазо таърифи зеринро дохил мекунем.

Таъриф. Ду бисёррӯя, ки дорои миқдори якхелаи рӯяҳоянд, *монанд номида мешаванд*, агар рӯяҳои онҳо монанд ва якхела ҷойгир буда, кунҷҳои дурӯяи мувофиқашон баробар бошанд.

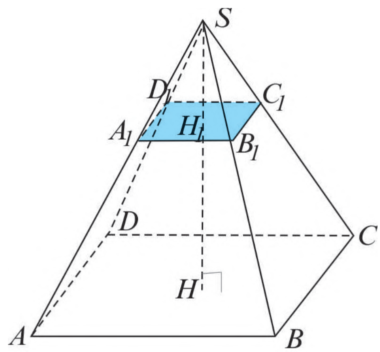
Бисёррӯяҳои дар қисми а) ва б)-и расми 28 овардашуда монанд буда, бисёррӯяҳои қисми в)-и расм монанд нестанд.



Расми 28

Нишон додан мумкин аст, ки ду бисёррӯя танҳо ҳамон вақт монанданд, агар чунин табдилдиҳии монанд (гомотетия) мавҷуд бошад, ки бо ин табдилдиҳӣ бисёррӯяҳо ҳамҷоя шаванд. Аз ин бармеояд, ки нисбатҳои ченакҳои хаттии мувофиқи ду бисёррӯяи монанд ба ҳам баробаранд. Яъне, агар k-коэффитсиенти монандӣ бошад, он гоҳ: 1) нисбати дарозии теғаҳои мувофиқ k аст. Нисбатҳои мувофиқи дарозиҳои баландиҳо, медианаҳо ва биссектрисаҳо низ ба k баробаранд; 2) нисбати параметрҳои дигари мувофиқи рӯяҳо, масалан, периметрҳо ё диагоналҳояшон k аст; 3) нисбатҳои масоҳатҳои мувофиқи асосҳо, сатҳҳои паҳлуӣ ва сатҳҳои пурра ба k^2 баробар аст.

Масъала. Пирамидаи чоркунҷаи баландиаш 10 см бо ҳамвории ба асос параллел, ки аз қулла дар масофаи 4 см ҷойгир аст, бурида шудааст. Нисбатҳои дарозии теғаҳои мувофиқ, периметрҳо ва масоҳатҳои буришу асоси пирамидаро меёбем.



Расми 29

Ҳал. Дар натиҷаи бурииш пирамидаи $SA_1B_1C_1D_1$ ҷудо карда мешавад (расми 29). Аз теоремаи 9 ва таъриф бармеояд, ки пирамидаҳои $SABCD$ ва $SA_1B_1C_1D_1$ монанданд. Мувофиқи шарт $SH=10$ см, $SH_1=4$ см аст. Пас, коэффитсиенти монандӣ чунин аст:

$$k = \frac{SH_1}{SH} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Инак, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = k = \dfrac{2}{5}$, $\quad \dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = k^2 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{25}$.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Дар кадом ҳолат ду бисёррӯя бо ҳам баробаранд?
2. Монандии бисёррӯяҳо чӣ тавр муайян карда мешавад?
3. Нисбат ба ченакҳои хаттии ду бисёррӯяи монанд чӣ гуфтан мумкин аст? Нисбат ба ченакҳои квадратиашон-чӣ?
4. Гомотетия гуфта, чиро мефаҳманд?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

111. Исбот кунед, ки ду куби теғаашон дилхоҳ ба ҳам монанданд.

112. Нисбати масоҳатҳои асосҳои ду призмаи рост $\frac{4}{9}$ аст. Коэффитсиенти монандиро, ки он ин ду призмаро ҳамҷоя мекунад, ёбед.

113. Ду пирамидаи мунтазами чоркунҷа бо коэффитсиенти монандии $k=\frac{1}{3}$ ба ҳам монанданд. Баландии яке аз онҳо 6 м, теғаи асосаш 4 м аст. Масоҳати рӯяи паҳлуии пирамидаи дигарро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

114. Исбот кунед, ки агар дар пирамидаи секунҷа ҳамаи рӯяҳо периметрҳои баробар дошта бошанд, он гоҳ рӯяҳо баробаранд.

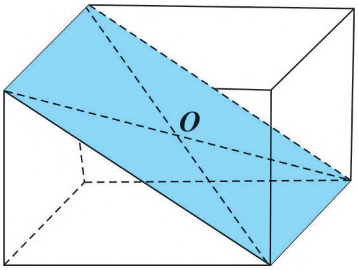
115. Баландии секунҷаи баробарпаҳлу 45 см буда, асосаш ба тарафи паҳлуӣ ҳамчун 4:3 нисбат дорад. Радиуси давраи дарункашидаро ёбед.

13. СИММЕТРИЯ ДАР ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД ВА ПИРАМИДА

Дар фазо табдилдиҳиҳои симметрияро нисбат ба нуқта (симметрияи марказӣ), нисбат ба хатти рост (симметрияи тирӣ) ва нисбат ба ҳамворӣ (симметрияи ойинавӣ) ҳангоми омӯзиши геометрия дар синфи 10-ум муоина карда будем. Акнун мавҷудияти чунин симметрияро дар бисёррӯяҳои мушаххас муайян менамоем. Хотирнишон мекунем, ки *нуқта (хатти рост, ҳамворӣ) маркази (тири, ҳамвории) ҷисм фигураи фазоӣ номида мешавад, агар ҳар як нуқтаи ҷисм (фигура) нисбат ба он ба нуқтаи дигари ҳамин ҷисм симметрӣ бошад.*

Бо симметрия мо дар табиат, санъати меъморӣ, техника ва зиндагӣ сари ҳар қадам вомехӯрем. Дар табиат дар шакли баргҳо ва гулҳои рустаниҳо, дар ҷойгиршавии узвҳои ҳайвонот симметрияро дидан мумкин аст. Ҳамаи кристалҳои дар табиат мавҷуда марказ, тир ва ҳамвории симметрияро доранд. Қисми зиёди биноҳо нисбат ба ҳамвориҳо симметрианд. Баъзе намуди деталҳо тири симметрия доранд. Масалан, асбоби дурбин, тарозуи паҳлудор, хатти шиддатнокиаш баланди барқ ва ғайраҳо.

а) *Маркази симметрия.* Дар теоремаи 6 (ниг. ба мавзӯи 6) муқаррар карда будем, ки диагоналҳои параллелепипед дар як нуқта бурида мешаванд ва ин нуқтаро *маркази параллелепипед* номида будем. Аз ин бармеояд, ки параллелепипед нисбат ба нуқтаи буриши диагоналҳояш ҷисми *мутамаркази симметрӣ* аст ва ин нуқта маркази симметрия мебошад (расми 30, нуқтаи O). Ин натиҷа амсоли вазъ дар ҳамвориро мемонад, ки мувофиқи он параллелограмм нисбат ба нуқтаи буриши диагоналҳояш фигураи мутамаркази симметрӣ буда, дар он ин нуқта маркази симметрия аст.



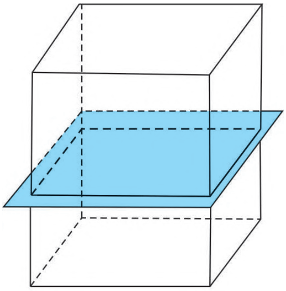
Расми 30

Дигар бисёррӯяҳои барҷаста, ғайр аз параллелепипед, маркази симметрия надоранд.

б) *Тири симметрия.* Дар росткунҷа хатҳои росте, ки аз нуқтаи буриши диагоналҳо гузашта, ба тарафҳои он параллеланд, тирҳои симметрияанд. Айнан, мисли ҳамин дар параллелепипеди росткунҷа (ПР) хатҳои росте, ки аз маркази он гузашта ба теғаҳои асос параллеланд, тирҳои симметрияи ПР мебошанд. ПР нисбат ба хатти росте, ки аз марказ гузашта, ба ҳамвории асос перпендикуляр аст, симметрӣ мебошад. Хулоса, се хатти рости ба ҳам ҷуфт-ҷуфт перпендикуляр, ки дар марказ ҳамдигарро мебуранд, тирҳои симметрияи ПР мебошанд. Бо ибораи дигар, маркази симметрияи ПР-ро ҳамчун ибтидои системаи росткунҷаи координатавӣ дар фазо қабул кардан мумкин аст. Ҳар як тири координатӣ тири симметрияи чунин параллелепипед аст.

Дар пирамидаи мунтазам тири он тири симметрия аст, яъне чунин пирамида нисбат ба тираш ҷисми симметрӣ мебошад.

в) *Ҳамвории симметрия.* ПР се ҳамвории симметрия дорад. Онҳо аз маркази симметрия гузашта, ба рӯяҳои муқобил параллеланд. Яъне, аз миёнаҷойи чор теғаи ба ҳам параллели параллелепипед мегузаранд. Дар расми 31 яке аз чунин ҳамвориҳо оварда шудааст. Нуқтаҳои охири теғаҳо нуқтаҳои симметрианд.

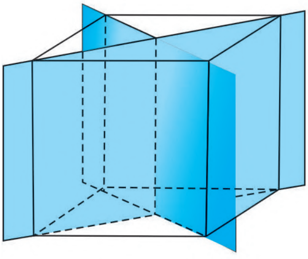


Расми 31

Агар ҳамаи андозаҳои хаттии ПР гуногун бошанд, он гоҳ вай ғайр аз ҳамвориҳои номбаршуда дигар ҳамвории симметрия надорад.

Дар сурате ки агар асоси параллелепипед квадрат бошад (яъне ду андозааш якхела бошад), он гоҳ вай боз ду ҳамвории симметрияро дорад. Онҳо ҳамвориҳои буриши диагоналӣ мебошанд, ки дар расми 32 оварда шудаанд.

Агар дар ПР ҳар се ченак якхела бошанд, он гоҳ дар он ҳар гуна буриши диагоналӣ ҳамвории симметрия аст. Ҳамин тариқ, куб 9-то ҳамвории симметрия дорад.
Дар пирамидаи мунтазам ҳамворие, ки аз қулла, маркази пирамида ва яке аз қуллаҳои асос гузаронида шудааст, ҳамвории симметрия аст.



Расми 32

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Симметрияҳои марказӣ ва тирӣ дар ҳаморӣ ва дар фазо чӣ тавр муайян карда мешаванд?

2. Дар фазо чӣ гуна ҳамвориро ҳамвории симметрия меноманд?

3. Кадом нуқта маркази симметрияи параллелепипед аст?

4. Кадом хатҳои рост тирҳои симметрияи ПР мебошанд?

5. Ҳамвориҳои симметрияи ПР ва пирамидаи мунтазам кадом ҳамвориҳоянд?

6. Чаро куб нуҳто ҳамвории симметрия дорад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

116. Нишон диҳед, ки ҳар гуна призма ақаллан якто ҳамвории симметрия дорад.

117. Призмаи секунҷаи мунтазам чандто тир ва ҳамвории симметрия дорад? Призмаи чоркунҷаи мунтазам чӣ?

118. Призмаи секунҷаи мунтазам маркази симметрия дорад? Призмаи чоркунҷаи мунтазам чӣ?

119. Параллелепипеди рост, ки ПР нест, чандто тири симметрия ва ҳамвории симметрия дорад?

120. ПР, ки куб нест, чандто тири симметрия ва ҳамвории симметрия дорад?

121. Куб чандто тири симметрия дорад?

Масъалаҳо барои такрор

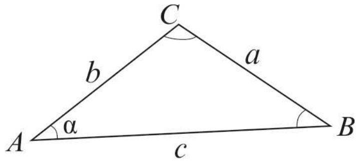
122. Диагонали куб 6 см аст. Масоҳати яке аз рӯяҳои онро ёбед.

123. Апофемаи пирамидаи чоркунҷаи мунтазам ба 5 см баробар аст. Тангенси кунҷи дурӯяи назди асос $\frac{4}{3}$ аст. Масоҳати сатҳи пурраи пирамидаро ёбед.

124*. Исбот кунед, ки агар дар секунҷаи ABC (расми 33) вобастагиҳои $a^3 + b^3 = c(a+b)$,

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{2}$$

иҷро шавад, он гоҳ ин секунҷа баробартараф аст.



Расми 33

14. БИСЁРРӮЯҲОИ МУТЛАҚО МУНТАЗАМ (БММ)

Таъриф. Бисёррӯяи барҷаста *мутлақо мунтазам* номида мешавад, агар ҳамаи рӯяҳои он бисёркунҷаҳои дорои миқдори якхелаи тарафҳои ба ҳам баробар бошанд ва агар дар ҳар як қуллаи бисёррӯя миқдори баробари теғаҳо ба ҳам дучор оянд.

Мисоли бисёррӯяи мутлақо мунтазам (БММ) куб аст. Дар он ҳамаи 6 рӯя квадратҳои ба ҳам баробар буда, дар ҳар як қуллааш расо 3 теға бо ҳам дучор меоянд.

Аз таъриф бармеояд, ки дар БММ рӯяҳо ба ҳамдигар баробаранд. Нишон додан мумкин аст, ки кунҷҳои дурӯя, ки онҳоро рӯяҳои теғаи умумӣ дошта ташкил медиҳанд, низ баробаранд.

Нишон дода шудааст, ки БММ-и n-кунҷа ҳангоми $n \geq 6$ будан вуҷуд надорад (исботи дурустии ин далелро намеорем, гарчанде на он қадар мураккаб аст). Барои ҳамин ҳар як қуллаи БММ танҳо қуллаи се, чор ё панҷ секунҷаи баробартараф ё ки се квадрат, ё се панҷкунҷаи мунтазам шуда метавонаду халос. Мувофиқан ба ин панҷ намуди БММ вуҷуд дорад (расми 34).

Онҳоро номбар карда, тавсиф мекунем:

1) *Тетраэдри мутлақо мунтазам** (чоррӯя) рӯяҳояш аз 4 секунҷаи баробартараф иборатанд. Ҳар як қуллаи он қуллаи се секунҷа аст. Яъне, дар ҳар як қуллаи он се теға ба ҳам дучор меоянд.

2) *Куб* (шашрӯя) ҳамаи 6-рӯяаш квадратанд. Ҳар як қуллаи куб қуллаи 3 квадрат аст.

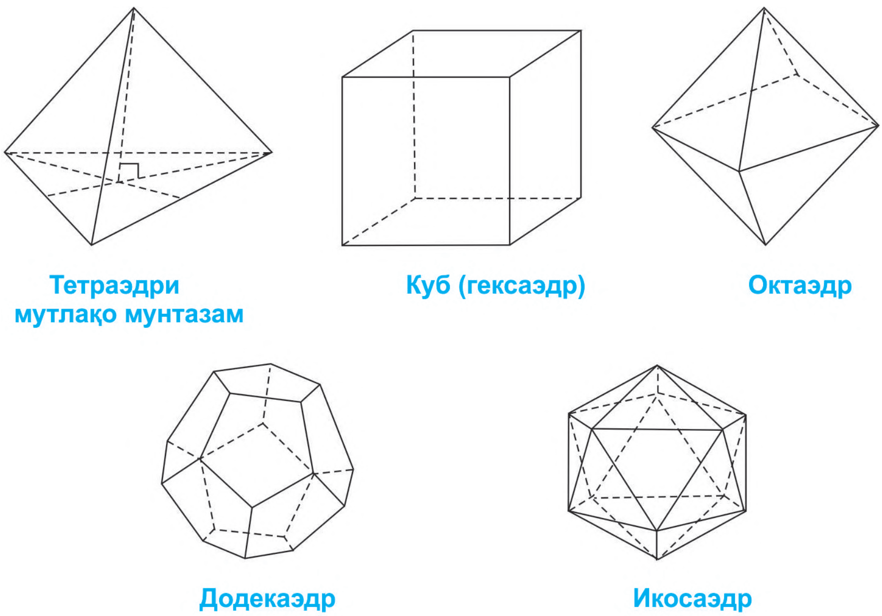
3) *Октаэдр* (ҳаштрӯя) ҳамаи 8 рӯяаш секунҷаҳои баробаранд. Ҳар як қуллааш қуллаи 4 секунҷа мебошад.

---

* Мо тетраэдри мутлақо мунтазам ва пирамидаи секунҷаи мунтазам (тетраэдри мунтазам)-ро аз ҳам фарқ мекунонем. Бар хилофи тетраэдри мутлақо мунтазам, ки ҳама теғаҳояш баробаранд, дар пирамидаи секунҷаи мунтазам теғаҳои паҳлуӣ метавонанд ба теғаҳои асос баробар набошанд.

4) *Додекаэдр* (дувоздаҳрӯя) аз 12 панҷкунҷаи мунтазам тартиб дода шудааст. Ҳар як қуллаи он қуллаи 3 панҷкунҷаи мунтазам аст.

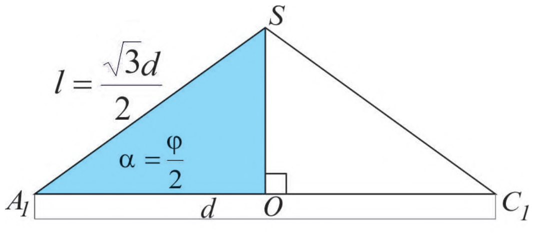
5) *Икосаэдр* (бистрӯя) аз 20-то секунҷаи баробартараф тартиб дода шудааст. Ҳар як қуллаи икосаэдр қуллаи 5 секунҷа аст.



Расми 34

Масъала. Кунҷҳои дурӯяи октаэдрро меёбем.

Ҳал. Октаэдр дар натиҷаи аз рӯйи асосҳо ҳамҷоя кардани ду пирамидаи баробар ҳосил мешавад (расми 34). Барои ҳамин кунҷи матлуб φ аз кунҷи назди асоси пирамида α ду маротиба калон аст, яъне $\alpha = \frac{1}{2}\varphi$. Буриши пирамидаро, ки аз қуллаи S ва миёнаҷойи ду теғаи асосҳои параллел мегузарад, дида мебароем. Агар A_1 ва C_1 миёнаҷойи теғаҳои асосҳо бошанд, он гоҳ буриш секунҷаи баробарпаҳлуест, ки асосаш A_1C_1 ба теғаи октаэдр d баробар аст. Тарафҳои паҳлуӣ $SA_1=SC_1$ ба апофемаи пирамида, яъне ба $l=\frac{\sqrt{3}}{2}d$ баробаранд. Дар айни ҳол $\angle SA_1C_1=\alpha=\frac{1}{2}\varphi$ (расми 35). Баландии SO-ро ба A_1C_1 гузаронида, аз секунҷаи SOA_1 меёбем: $\cos\frac{\varphi}{2}=\cos SA_1O=\frac{A_1O}{SA_1}=\frac{d}{2}:\frac{d\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Расми 35

Аз ин ҷо: $\varphi=2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна бисёррӯя бисёррӯяи мутлақо мунтазам номида мешавад?
2. Бисёррӯяҳои мутлақо мунтазамро номбар кунед ва онҳоро тавсиф намоед.
3. Тетраэдри мутлақо мунтазам аз пирамидаи секунҷаи мунтазам чӣ фарқ дорад?
4. Октаэдро чӣ гуна ҳосил кардан мумкин аст?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

124. Кунҷҳои дурӯяи тетраэдри мутлақо мунтазамро ёбед.

125. Нишон диҳед, ки ҳосили ҷамъи кунҷҳои ҳамвори назди ҳар як қуллаи додекаэдр ба 324° баробар аст.

126*. Исбот кунед, ки марказҳои рӯяҳои куб қуллаҳои октаэдранд ва баръакс, марказҳои рӯяҳои октаэдр қуллаҳои куб мебошанд.

127. Тетраэдри мутлақо мунтазам дорои кадом тирҳо ва ҳамвориҳои симметрия аст?

128. Дарозии теғаи октаэдр ба d баробар аст. Масоҳати сатҳи онро ёбед.

129. Масоҳати сатҳи тетраэдр ба Q баробар аст. Дарозии теғаи онро ёбед.

130*. Теғаи тетраэдри мутлақо мунтазам ба a баробар аст. Масоҳати буришро, ки квадрат аст, ҳисоб кунед.

Масъалаҳо барои такрор

131. Вектори (1; 2; 3) дода шудааст. Вектори ба он коллинеариро ёбед, ки ибтидояш нуқтаи (1; 1; 1) буда, интиҳояш дар ҳамвории Oxy ҷойгир аст.

132. Порчаи BD ба порчаи AC перпендикуляр буда, онро дар нуқтаи O ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунад. Маълум, ки $AB=5$ см, $AD=3,5$ см, $AO=3$ см аст. Периметрҳои чоркунҷаи $ABCD$ ва секунҷаи ABC-ро ёбед.

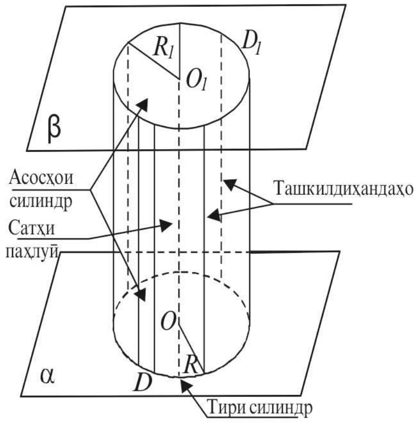
§3. ҶИСМҲОИ ЧАРХЗАНӢ

Ҷисмҳои муҳити атроф шаклҳои гуногун доранд. Дар байни онҳо на танҳо бисёррӯяҳо, балки ба ном ҷисмҳои чархзанӣ (гирд, лӯнда) ҳам вомехӯранд. Дар навбати аввал аз байни чунин ҷисмҳо силиндр, конус ва кураро номбар кардан даркор аст. Мо ба омӯзиши онҳо ҳамчун ҷисмҳои геометрӣ шурӯъ мекунем.

15. СИЛИНДР

Бигузор дар ҳамвории α, ки ба ҳамвории β параллел аст, доираи даврааш D-и радиусаш R ва марказаш O, инчунин хатти рости a, ки доираро намебурад, дода шудаанд (расми 36). Аз рӯйи ҳар як нуқтаи давраи D хатти рости ба a параллелро мегузаронем. Буриши ин хатҳо бо ҳамвории β давраеро ҷудо менамояд, ки онро бо D_1 ишорат мекунем. Порчаҳое, ки нуқтаҳои ин ду давраро бо ҳам пайваст мекунад, сатҳеро ташкил медиҳанд, ки он *сатҳи силиндрӣ* ном дорад.

Таъриф. Ҷисми геометрие, ки бо сатҳи силиндрӣ ва ду доираи давраашон D ва D_1 маҳдуд аст, *силиндр* (аниқаш, *силиндри гирд*) номида мешавад (расми 36). Калимаи силиндр юнонӣ буда (kylindros) маънояш ғелидан ё чарх задан аст. Ашёи гуногуни бо дасти одам сохташуда, масалан, қубур, истакон, ғӯлачуб ва ғайра шакли силиндрро доранд. Кӯлоҳи мардонае, ки дар асри 18 васеъ паҳн гашта буд, номи силиндрро дошт.

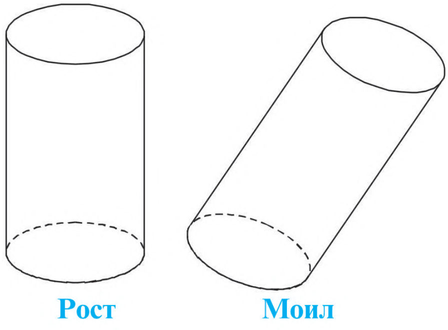


Расми 36

Порчаҳое, ки нуқтаҳои давраҳоро пайваст мекунанд, *ташкилдиҳандаҳои* силиндр номида мешаванд. Сатҳи силиндрӣ, ки аз ташкилдиҳандаҳо иборат аст, *сатҳи паҳлуии силиндр*, доираҳо бошанд *асосҳои силиндр* ном доранд. Ҳамин тариқ, сатҳи пурраи силиндр аз сатҳи паҳлуӣ ва доираҳо (асосҳо) иборат аст. Ба ибораи дигар, сатҳи силиндр аз қисмҳои ҳамвор ва қисми каҷ иборат аст. Сатҳи бисёррӯя бошад, танҳо аз қисмҳои ҳамвор иборат буд.

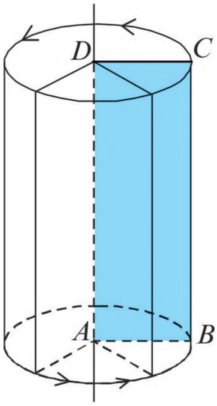
Дарозии перпендикуляри умумии ҳамвориҳои параллел *баландии силиндр* аст. Ташкилдиҳандаҳо ҳамчун хатҳои рости параллел, ки дар байни ду ҳамвории параллел ҷойгиранд, ба ҳамдигар баробаранд (теоремаи 10-и китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10-ум, саҳ. 43). Инчунин аз ҳар як нуқтаи сатҳи паҳлуии силиндр танҳо якто ташкилдиҳанда мегузарад. Радиуси давраҳои асос *радиуси силиндр* аст.

Силиндр рост номида мешавад, агар ташкилдиҳандаҳо ба ҳамвориҳои асос перпендикуляр бошанд, дар акси ҳол онро силиндри *моил* мегӯянд. Дар расми 37 силиндрҳои рост ва моил оварда шудаанд (Дар оянда асосан мо ба омӯзиши силиндри рост машғул мешавем. Агар махсус таъкид карда нашавад, зери мафҳуми силиндр силиндри рости гирдро мефаҳмем). Ба тарзи аёнӣ силиндри ростро ҳамчун ҷисме, ки дар натиҷаи дар атрофи яке аз тарафҳои худ чарх задани росткунҷа ҳосил мешавад, тасаввур кардан мумкин аст. Дар расми 38 силиндре оварда шудааст, ки он дар натиҷаи дар атрофи тарафи AD чарх задани росткунҷаи $ABCD$ ҳосил шудааст.



Расми 37

Порчаи хатти рост, ки маркази асосҳоро пайваст мекунад, *тири силиндр* ном дорад. Тир ба ташкилдиҳандаҳо параллел ва баробар аст.



Расми 38

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна ҷисми геометриро силиндри гирд меноманд?
2. Ташкилдиҳандаҳо, сатҳи паҳлуӣ, асосҳо ва баландии силиндр чӣ тавр муайян карда мешаванд?
3. Чӣ гуна силиндрро силиндри рост мегӯянд? Силиндри моил чӣ?
4. Чаро силиндрро ҷисми чархзанӣ ҳам мегӯянд?
5. Тири силиндр чӣ тавр муайян карда мешавад?
6. Мисоли силиндри ростро оред.

Масъалаҳо барои такрор

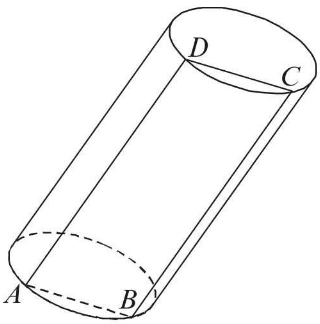
133. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипеди ростро, ки тарафҳои асосаш 8 ва 12-анд ва кунҷи 30^0-ро ташкил медиҳанд, ёбед агар теғаи паҳлуӣ 6 бошад.

134. Дар секунҷаи росткунҷа нуқтаи расиши давраи дарункашида гипотенузаро ба порчаҳои 5 см ва 12 см ҷудо мекунад. Катетҳои секунҷаро ёбед.

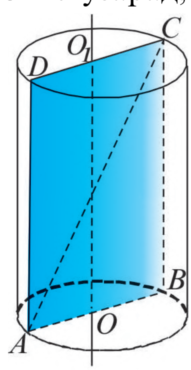
16. БУРИШИ СИЛИНДР БО ҲАМВОРӢ

Теоремаи 12. *Буриши ҳар гуна силиндри гирд бо ҳамворие, ки аз рӯйи ташкилдиҳанда мегузарад, параллелограмм аст.*

Исбот. Бигзор AD ташкилдиҳандаи силиндр аст, ки аз рӯйи он ҳамвории силиндрро буранда мегузарад. Ин ҳамворӣ асосҳоро аз рӯйи порчаҳои AB ва DC мебурад (расми 39). Мувофиқи теорема дар бораи порчаҳое, ки дар натиҷаи бо ҳамвории сеюм бурида шудани ду ҳамвории параллел ҳосил мешаванд (ниг. ба китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10, теоремаи 10), порчаҳои AB ва DC бо ҳам параллеланд. Ташкилдиҳандаи силиндр, ки аз нуқтаи C мегузарад, ба порчаи AD параллел аст ва хатти рости AB-ро дар нуқтаи B мебурад. Инак, $DC \parallel AB$ ва $AD \parallel BC$. Яъне, $ABCD$ параллелограмм мебошад. Теорема исбот шуд.



Расми 39



Расми 40

Аз ин теорема хулосаҳои зерин бармеоянд:

1. Дар силиндри рост буриши ҳамвории аз рӯйи ташкилдиҳанда гузаранда *росткунҷа аст.* Ин ҳамворӣ ба тири силиндр параллел мебошад.
2. *Буриши тирии силиндр* буришест, ки ҳангоми аз рӯйи ташкилдиҳанда ва тир гузаштани ҳамвории буранда ҳосил мешавад. Ин

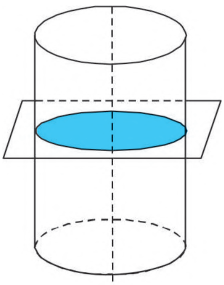
буриш низ росткунҷа аст (расми 40). Ду тарафи он ташкилдиҳандаҳо буда, ду тарафи дигараш диаметрҳои давраҳои асосҳо мебошанд.

3. Дар силиндри рости гирд баландӣ ба ташкилдиҳандаҳо параллел ва баробар аст.

Масъалаи 1. Радиуси асоси силиндр 2 м, баландиаш 3 м мебошад. Диагонали буриши тирии онро меёбем.

Ҳал. Диаметри асос AB=4м, баландӣ 00_1=CB=3м аст (расми 40). Пас, мувофиқи теоремаи Пифагор ҳосил мекунем:

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\,\text{м}.$$

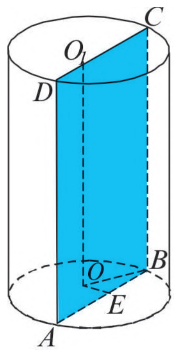


Расми 41

Акнун буриши силиндрро бо ҳамворие, ки ба асосҳо параллел аст, дида мебароем (расми 41). Параллелкӯчониро ба самти тири силиндр, ки ҳамвории параллелро бо ҳамвории асос ҳамҷоя мекунад, истифода карда, нишон додан мумкин аст, ки ин гуна ҳамворӣ сатҳи паҳлуиро аз рӯйи даврае мебурад, ки вай ба давраи асос баробар аст. Аз ин ҷо баробарии асосҳои силиндр, аз он ҷумла, баробарии *буришҳои перпендикулярӣ* (буриши ҳамвориҳое, ки ба ташкилдиҳандаҳо перпендикуляранд) бармеоянд.

Масъалаи 2. Баландии силиндр 6 см, радиуси асосаш 5 см аст. Масоҳати буришеро, ки ба тири силиндр параллел буда, аз он дар масофаи 4 см воқеъ мебошад, меёбем.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала 00_1 = CB=6 см, OB= 5 см, OE=4 см аст (расми 42). Секунҷаи OEB росткунҷа мебошад, бинобар ин



Расми 42

$$EB = \sqrt{OB^2 - OE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3\,\text{см};$$

$$AB = 3\text{ см}, \quad AB = 2\,AE = 6\text{ см};$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot CB = 6 \cdot 6 = 36\text{ см}^2.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Буриши силиндр бо ҳамворие, ки аз рӯйи ташкилдиҳанда мегузарад, чӣ гуна фигура аст?

2. Чӣ гуна буришро буриши тирӣ меноманд?

3. Бурише, ки ба асосҳо параллел аст, дорои чӣ гуна хосиятҳост?

4. Кадом буришро буриши перпендикулярӣ меноманд?

5. Агар силиндр бо ҳамвории аз рӯйи ташкилдиҳанда гузаранда, вале бо асосҳо параллел набуда бурида шавад, буриш кадом шаклро дорад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

135. Диагонали буриши тирии силиндр 48 см аст. Кунҷи байни ин диагонал ва ташкилдиҳанда 60^0 мебошад. Баландии силиндрро ёбед.

136. Буриши тирии силиндр квадрат буда, диагоналаш 20 см аст. Масоҳати асоси силиндрро ёбед.

137. Масоҳати буриши тирии силиндр 10 $м^2$, масоҳати асосаш 5 $м^2$ мебошад. Баландии силиндрро ёбед.

138. Баландии силиндр 12 см, радиуси асосаш 10 см аст. Силиндр бо ҳамвории ба тираш параллел чунон бурида шудааст, ки дар буриш квадрат ҳосил шудааст. Масофаи байни тири силиндр ва ҳамвории бурандаро ёбед.

139. Баландии силиндр 10 см аст. Масоҳати буриши ҳамворие, ки аз тири силиндр дар масофаи 9 см воқеъ буда, ба тир параллел мебошад, 240 $см^2$ аст. Радиуси силиндрро ёбед.

140*. Масоҳати асоси силиндр ба масоҳати асоси буриши тирӣ ҳамчун $\pi:4$ нисбат дорад. Кунҷи байни диагоналҳои буришҳои тириро ёбед.

141. Радиуси асоси силиндр 5 см, ташкилдиҳандааш 9 см мебошад. Масоҳати буриши тирии силиндрро ёбед.

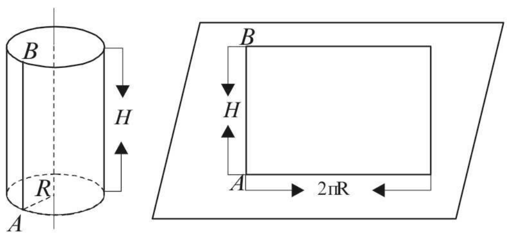
Масъалаҳо барои такрор

142. Асоси параллелепипеди рост ромби диагоналҳояш 12 см ва 16 см мебошад. Агар баландии параллелепипед 8 см бошад, масоҳати сатҳи пурраи онро муайян кунед.

143. Порчаи дарозиаш 10 см ҳамвориро мебурад. Охирҳои порча аз ҳамворӣ дар масофаҳои 5 см ва 3 см воқеъ-анд. Дарозии проексияи порчаро дар ҳамворӣ муайян кунед.

17. МАСОҲАТИ САТҲИ ПАҲЛУӢ ВА ПУРРАИ СИЛИНДР

Агар сатҳи паҳлуии силиндрро (расми 43, а) аз рӯйи ягон ташкилдиҳанда бурему онро дар ҳамворӣ паҳн намоем, он гоҳ росткунҷае ҳосил мекунем, ки дарозиаш ба дарозии давраи асоси силиндр, бараш ба дарозии ташкилдиҳандаи он баробар аст (расми 43 б). Ин росткунҷаро *паҳни* сатҳи паҳлуии силиндр меноманд. Агар H баландӣ ва R радиуси асоси силиндр бошад, он гоҳ масоҳати ин росткунҷа (паҳн), ки ҳамчун масоҳати сатҳи паҳлуии силиндр қабул карда мешавад, $2\pi RH$ мебошад. Инак,



а) б)

Расми 43

$$S_{паҳл} = 2\pi RH \ . \qquad (1)$$

Ҷумлаи зерин исбот шудааст.

Теоремаи 13. *Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндр ба ҳосили зарби дарозии давраи асос бар баландиаш баробар аст.*

Масоҳати сатҳи пурраи силиндр аз ҳосили ҷамъи масо-ҳатҳои асосҳо, ки ҳар кадомашон πR^2 аст ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ иборат аст, яъне

$$S_{пур} = 2S_{асос} + S_{паҳл} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R+H). \qquad (2)$$

Эзоҳ. Агар ду силиндри монанд дар натиҷаи чарх задани росткунҷаҳои монанд ҳосил шуда бошанд ва коэффитсиенти монандӣ k бошад, он гоҳ масоҳати сатҳи паҳлуӣ ё пурраи онҳо ҳамчун k^2 нисбат доранд.

Дар ҳақиқат, агар R_1, H_1 ва R_2, H_2 мувофиқан радиусҳои асос ва баландии онҳо ва $k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{H_1}{H_2}$ бошад, пас

$$\frac{S^{(1)}_{паҳл}}{S^{(2)}_{паҳл}} = \frac{2\pi R_1 H_1}{2\pi R_2 H_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{H_1}{H_2} = k \cdot k = k^2.$$

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки $\frac{S^{(1)}_{пур}}{S^{(2)}_{пур}} = k^2$.

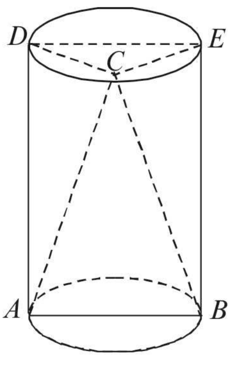
Масъалаи 1. Радиуси силиндр 6 см буда, баландиаш 4 см аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи онро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (1)

$S_{паҳл} = 2\pi RH = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi см^2$. Масоҳати сатҳи пурра аз рӯйи формулаи (2) ёфта мешавад:

$S_{пур} = 2\pi R(R+H) = 2\pi \cdot 6 \cdot (6+4) = 120 см^2$.

Масъалаи 2. Нӯгҳои диаметри яке аз асосҳои силиндр ва нуқтаи давраи асоси дигари он қуллаҳои секунҷаи баробарпаҳлуянд. Маълум, ки асоси секунҷа $8\sqrt{2}$ см ва паҳлуяш 10 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи силиндрро меёбем.



Расми 44

Ҳал. Мувофиқи додашудаҳои масъала нақшаи заруриро мекашем (расми 44). Дорем: $AB = 8\sqrt{2}$ см, $AC=BC=10$ см. Баландии силиндрро меёбем.

Бигзор АD ва ВE ташкилдиҳандаҳоянд. DE диаметр аст, чунки AB чунин аст. Яъне, $\angle DCE=90^0$ ҳамчун кунҷи ба диаметр такякунанда. Аз тарафи дигар, *AD* ба *DC* ва *BE* ба *EC* перпендикуляранд ва *AD=BE*, *AC=BC*. Аз баробарии ΔADC ва ΔBCE бармеояд, ки *DC=CE* мебошад. Ҳамин тариқ, ΔDCE - росткунҷаи баробарпаҳлу аст. Барои ҳамин, $DE^2=2DC^2$ ё $AB^2=2DC^2$, ё ки $(8\sqrt{2})^2 = 2DC^2$, яъне $DC=8$ см. Акнун аз ΔADC меёбем: $H = AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = $ $= \sqrt{100 - 64} = 6$ см ва мувофиқи формулаи (2):

$$S_{пур} = 2\pi R(R+H) = 2\pi \cdot 4\sqrt{2}(4\sqrt{2}+6) = 16\pi(4+3\sqrt{2})см^2.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна росткунҷаро паҳни сатҳи паҳлуии силиндр меноманд? Онро чӣ тавр ҳосил кардан мумкин аст?
2. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи силиндр бо кадом формулаҳо ҳисоб карда мешаванд?
3. Магар формулаҳои (1) ва (2) ҳангоми моил будани силиндр дурустанд?
4. Эзоҳ ба теоремаи 13 оид ба чӣ маълумот медиҳад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

144. Баландии силиндр аз радиуси асос 10 см зиёд буда, масоҳати сатҳи пуррааш 144π см^2 аст. Радиусро ёбед.

145. Радуси асоси силиндр *R* буда, масоҳати сатҳи паҳлуии он ба ҳосили ҷамъи масоҳати асосҳо баробар аст. Баландии силиндрро ёбед.

146. Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндр *S* аст. Масоҳати буриши тирии онро ёбед.

147. Масоҳати буриши тирии силиндр ба *Q* баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуиро ёбед.

148. Баландии силиндр чӣ қадар бояд бошад, то ки масоҳати сатҳи паҳлуии он аз масоҳати асос се маротиба калон бошад?

149. Росткунҷаи тарафҳояш 6 см ва 4 см дар атрофи тарафи хурд давр мезанад. Масоҳати сатҳи пурраи ҷисми ҳосилшударо муайян кунед.

150. Буриши тирии силиндр квадрати диагоналаш $2\sqrt{2}$ см мебошад. Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндрро ёбед.

151. Барои ранг кардани бушкаи силиндрӣ, ки диаметри асосаш 1,5 м ва баландиаш 3 м аст, чӣ қадар ранг лозим аст, агар маълум бошад, ки ба як метри квадратӣ 200 г ранг сарф мешавад?

152. Барои тайёр кардани турбаи дарозиаш 4 м ва диаметраш 40 см чӣ қадар тунука лозим аст, агар маълум бошад, ки барои мустаҳкам кардани турба ба миқдори 2,5% -и масоҳати сатҳи паҳлуии он тунука лозим аст.

153. Кунҷи байни ташкилдиҳанда ва диагонали буриши тирии силиндр φ буда, масоҳати асосаш S аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндрро ёбед.

154. Сатҳи паҳлуии силиндр аз квадрати диагоналаш d ҳосил шудааст. Масоҳати асоси силиндрро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

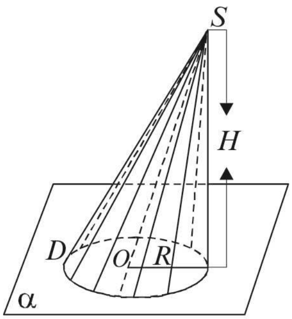
155. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи секунҷаи мунтазам чанд маротиба меафзояд, агар асоси онро 2 карат ва апофемаашро 3 карат зиёд кунем?

156. Баландии силиндр 6 см, радиуси асосаш 5 см аст. Нӯгҳои порчаи дарозиаш 10 см дар давраҳои асос ҷойгиранд. Масофаи ин порчаро то тир ёбед.

157. Кунҷҳои секунҷаи баробарпаҳлуро муайян кунед, агар кунҷи берунаи назди асос 118° бошад.

18. КОНУС

Бигузор дар ҳамвории α давраи D-и марказаш нуқтаи O ва нуқтаи S, ки дар α воқеъ нест, дода шудаанд. Ҳар як нуқтаи давраи D-ро бо нуқтаи S пайваст мекунем. Дар натиҷа сатҳеро ҳосил мекунем, ки он *сатҳи конусӣ* ном дорад (расми 45). Порчаҳое, ки нуқтаи S-ро бо давраи D пайваст мекунанд, *ташкилдиҳандаҳои* сатҳи конусӣ мебошанд.

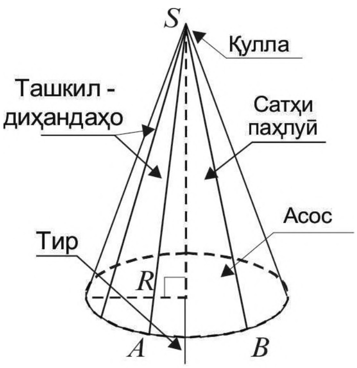


Расми 45

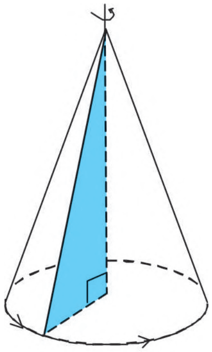
Таъриф. Ҷисми геометриро, ки бо сатҳи конусӣ ва доираи давраааш D маҳдуд аст, *конус* меноманд.

Нуқтаи S *қуллаи* конус аст. Порчаи OS-ро, ки аз маркази давра ва қулла мегузарад, *тири конус* мегӯянд (расми 45). Масофаи байни қуллаи S ва ҳамвории α *баландии конус* аст.

Порчаҳои SA, SB, … , ки нуқтаи S-ро бо давраи D пайваст мекунанд, *ташкилдиҳандаҳои конус*, сатҳи конусиро *сатҳи паҳлуии конус,* доираи давраааш D -ро *асоси конус* ном мебаранд. Аз рӯйи ҳар як нуқтаи сатҳи конусӣ танҳо якто ташкилдиҳанда мегузарад. *Сатҳи пурраи конус* аз асос ва сатҳи паҳлуии он иборат аст (расми 46).



Расми 46

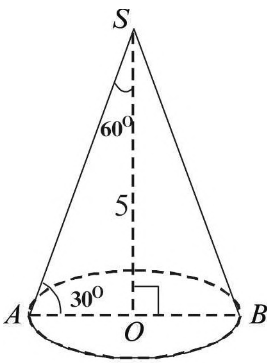


Расми 47

Агар тири конус ба асос перпендикуляр бошад, он гоҳ чунин конус *конуси рост* ном дорад, вагарна конусро *моил* мегӯянд. Дар расми 45 конуси моил ва дар расми 46 конуси рост оварда шудааст (Дар оянда агар махсус таъкид карда нашуда бошад, мо зери мафҳуми конус конуси ростро дар назар хоҳем дошт). Дар конуси рост ҳамаи ташкилдиҳандаҳо ба ҳамдигар баробаранд. Дар чунин конус баландӣ перпендикулярест, ки аз қулла ба асос фуроварда шудааст. Баландӣ аз маркази асос мегузарад.

Конуси ростро ба тарзи айёнӣ ҳамчун ҷисме, ки ҳангоми дар атрофи катет чарх задани секунҷаи росткунҷа ҳосил мешавад, тасаввур кардан мумкин аст (расми 47).

Масъала. Тарафи хурди секунҷаи росткунҷаи дорои кунҷи 30^0 ба 5 см баробар аст. Дар натиҷаи дар атрофи ин тараф чарх задани секунҷа конуси рост ҳосил шудааст. Ташкилдиҳанда, радиус ва кунҷи назди қуллаи конусро муайян мекунем.



Расми 48

Ҳал. Бигузор секунҷаи росткунҷаи SOA дар атрофи тарафи SO чарх мезанад (расми 48). Секунҷаи SAB буриши тирии конусест, ки дар натиҷаи чунин чархзанӣ ҳосил мешавад. Аз секунҷаи SOA ҳосил мекунем:

$$OA = SO \cdot tg\, 60^0 = SO \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ см.}$$

Инчунин, $SO = SA \sin 30^0 = \dfrac{SA}{2}$, $SA = 2SO = 2 \cdot 5 = 10$см.

Ҳамин тариқ, радиуси конус $R = OA = 5\sqrt{3}$ см. Ташкилдиҳандааш бошад, $l = SA = 10$ см аст. Аз сабаби баробарии секунҷаҳои SOA ва SOB кунҷи назди қуллаи конус $\angle BSA = 2 \cdot \angle OSB = 2 \cdot 60^0 = 120^0$ мешавад.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна сатҳро сатҳи конусӣ мегӯянд?
2. Конус ҳамчун ҷисми геометрӣ чӣ тавр муайян карда мешавад?
3. Чиҳоро қулла, ташкилдиҳанда, асос, сатҳи паҳлуии конус мегӯянд?
4. Баландии конус чӣ хел порча аст?
5. Чаро дар конуси рост ҳамаи ташкилдиҳандаҳо баробаранд?
6. Конуси ростро аёнӣ чӣ тавр тасаввур кардан мумкин аст?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

158. Радиуси асоси конус 3 м, баландиаш 4 м аст. Ташкилдиҳандаашро ёбед.

159. Ташкилдиҳанда 10 м буда бо радиуси асоси конус кунҷи 60^0-ро ташкил медиҳад. Баландиро ёбед.

160. Масъалаи дар матн овардашударо ҳангоми дар атрофи катети калон чарх задани секунҷа ҳал намоед.

Масъалаҳо барои такрор

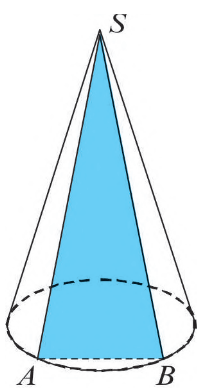
161. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос 10 см ва 17 см буда, яке аз диагоналҳои асос 21 см аст. Диагонали калони параллелепипед 29 см мебошад. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипедро ёбед.

162. Дар пирамидаи мунтазами секунҷа тарафи асос 9 см ва теғаи паҳлуӣ 6 см аст. Баландии пирамидаро ёбед.

19. БУРИШИ КОНУС БО ҲАМВОРӢ

Теоремаи 14. *Буриши конуси рост бо ҳамворие, ки аз қулла гузашта асосро мебурад, секунҷаи баробарпаҳлуест, ки паҳлуҳояш ташкилдиҳандаҳои конус мебошанд.*

Исбот. Бигзор ҳамворӣ аз қуллаи S гузашта, асоси конусро аз рӯйи хатти AB мебурад (расми 49). Хатҳои рости SA ва SB ҳам дар ҳамвории буранда ва ҳам дар сатҳи конусӣ ҷойгиранд, яъне онҳо хатҳои буриши хамворӣ бо сатҳи конусианд. Яъне, секунҷаи ASB буриш аст. Баробарпаҳлу будани он аз баробарии ташкилдиҳандаҳои конус бармеояд. Бо ҳамин теорема исбот шуд.



Расми 49

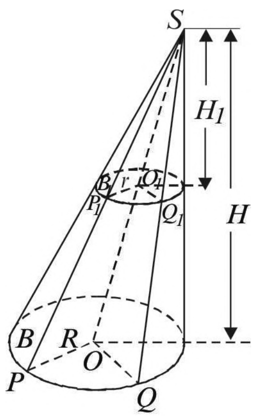
Фаҳмост, ки агар конус моил бошад, он гоҳ буриши конус бо ҳамворӣ секунҷа буда, баробарпаҳлу буданаш шарт нест.

Фарз мекунем, ки ҳамвории буранда аз рӯйи тири конус мегузарад. Дар ин ҳолат буриш секунҷаи баробарпаҳлуест, ки асосаш диаметри асоси конус аст. Чунин буришро *буриши тирии конус* меноманд.

Акнун ҳолатеро дида мебароем, ки ҳамвории буранда бо асоси конус параллел аст. Дар ин ҳолат бвриш *буриши параллелӣ* ном дорад.

Теоремаи 15. *Буриши параллелии ҳар гуна конуси гирд доира мебошад. Маркази давраи ин доира дар тири конус воқеъ аст.*

Исбот. Бигузор асоси конус доираи B, ки маркази давраааш дар нуқтаи O воқеъ аст, бошад. Буриши параллелӣ B_1 ба B параллел буда, O_1 нуқтаи буриши тири SO бо B_1 аст (расми 50). Агар ду нуқтаи дилхоҳи давраи асос P ва Q-ро гирифта, ташкилдиҳандаҳои PS ва QS-ро созем, онҳо буришро мувофиқан дар нуқтаҳои P_1 ва Q_1 мебуранд. Порчаҳои SP ва SO ҳамвории SPO ва порчаҳои SQ ва SO ҳамвории SQO-ро муайян мекунанд. Тавре медонем, агар ду ҳамвории параллел бо ҳамвории сеюм бурида шаванд, он гоҳ хатҳои буриши онҳо параллеланд (ниг. ба китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10, теоремаи 10). Бинобар ин $OP \| O_1P_1$ ва $OQ \| O_1Q_1$. Пас, секунҷаҳои SPO ва SP_1O_1, инчунин секунҷаҳои SQO ва SQ_1O_1 бо ҳам монанданд. Яъне, $\frac{OP}{O_1P_1} = \frac{SO}{SO_1}$, $\frac{OQ}{O_1Q_1} = \frac{SO}{SO_1}$



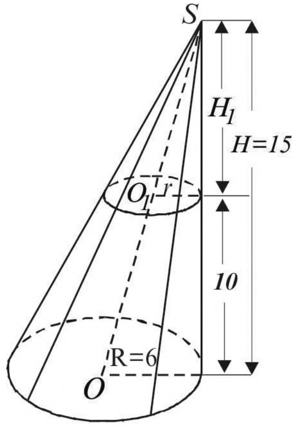
Расми 50

Аз ин ҷо $\frac{OP}{O_1P_1} = \frac{OQ}{O_1Q_1}$.

Вале $OP = OQ$, пас $O_1P_1 = O_1Q_1$. Ин нишон медиҳад, ки B_1 доира буда, O_1 маркази давраи он аст. Теорема исбот шуд.

Хулосаи 1. *Бурише, ки ба асос параллел аст, баландӣ ва ташкилдиҳандаҳоро ба қисмҳои мутаносиб ҷудо мекунад*, яъне

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{SQ_1}{SQ} = \frac{H_1}{H}.$$



Расми 51

Хулосаи 2. *Нисбати масоҳати буриши параллелӣ бар масоҳати асоси конус ба квадрати нисбати қисмҳои ба ҳам мутаносиб баробар аст*, яъне

$$\frac{S_{B1}}{S_B} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 = \left(\frac{SP_1}{SP}\right)^2.$$

Масъала. Баландии конуси моил 15 см ва радиуси асосаш 6 см аст. Ҳамвории ба асос параллел конусро дар масофаи 10 см аз асос мебурад. Масоҳати буришро меёбем.

Ҳал. Бо r радиус ва бо S_{B1} масоҳати буришро ишорат мекунем. Агар H_1 масофаи буриш то қуллаи S бошад (расми 51), он гоҳ мувофиқи хулосаи 1-и теорема $\frac{H_1}{H} = \frac{r}{R}$.

Қиматҳои додашудаҳоро гузошта, ҳосил мекунем:

$$\frac{15-10}{15} = \frac{r}{6}. \text{ Яъне, } r = 2 \text{ см.}$$

Пас

$$S_{B1} = \pi r_1^2 = 2^2 \cdot \pi = 4\pi \text{ см}^2.$$

Қайд мекунем, ки масъаларо бо истифодаи хулосаи дуюми теорема ҳам ҳал кардан мумкин аст. Агар бо S_B масоҳати асоси конусро ишорат кунем, он гоҳ мувофиқи хулосаи 2:

$$\frac{S_{B1}}{S_B} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^2 \quad \text{ё} \quad \frac{S_{B1}}{\pi R^2} = \left(\frac{15-10}{15}\right)^2, \text{ ё ки } \quad \frac{S_{B1}}{6^2 \cdot \pi} = \frac{25}{225} = \frac{1}{9}.$$

Аз ин ҷо $S_{B1} = 4\pi$ см^2.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Буриши конус бо ҳамворие, ки аз қуллааш мегузарад, чӣ гуна фигура аст?

2.Чӣ хел буришро буриши тирии конус меноманд?

3. Буриши параллелии конус чист?

4. Хосиятҳои буриши параллелии конусро номбар кунед.

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

163. Радиуси асоси конус R буда, буриши тириаш секунҷаи росткунҷа мебошад. Масоҳати буришро ёбед.

164. Нисбати масоҳати асоси конус бар масоҳати буриши тирии он ба π баробар аст. Кунҷи байни ташкилдиҳанда ва ҳамвории асосро ёбед.

165. Баландии конус H аст. Буриши параллелӣ дар кадом масофа бояд ҷойгир бошад, то ки масоҳаташ бо нисфи масоҳати асос баробар шавад?

166. Радиуси асоси конус R аст. Масоҳати буриши параллелиро, ки аз миёнаҷойи баландӣ мегузарад, ҳисоб кунед.

167. Баландии конус 20 см ва радиуси асосаш 25 см аст. Масоҳати буришеро, ки аз қулла мегузарад ва дар масофаи 12 см аз маркази давраи асос ҷойгир аст, ҳисоб кунед.

168. Ташкилдиҳандаи конус l, кунҷи назди қуллаи буриши тирӣ φ аст. Масоҳати асосро ёбед.

169. Масоҳати асоси конус Q буда, ташкилдиҳандааш l аст. Масоҳати буриши тирии онро ёбед.

170*. Ба ташкилдиҳандаи конус l аз миёнаҷойи баландӣ хатти рости параллел гузаронида шудааст. Дарозии порчаи ин хатро, ки дар дохили конус ҷойгир аст, ҳисоб кунед.

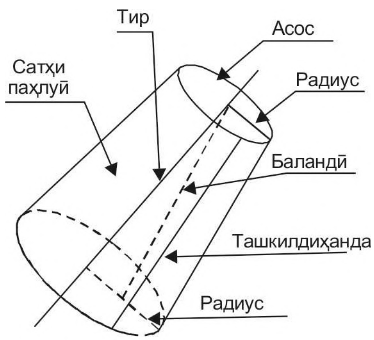
Масъалаҳо барои такрор

171. Кунҷи ҳамвори назди қуллаи пирамидаи шашкунҷаи мунтазам 30^0 буда, теғаи паҳлуӣ 2 м аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаро ёбед.

172. Маълум, ки $A=(0;\ 1;\ -1)$, $B=(1;\ -1;\ 2)$, $C=(3;\ 1;\ 0)$. Косинуси кунҷи C-и секунҷаи ABC-ро ёбед.

20. КОНУСИ САРБУРИДА

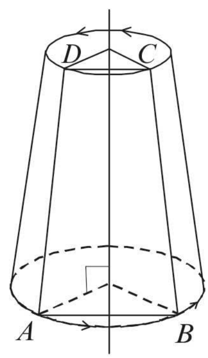
Таъриф. Қисми конус, ки дар байни асос ва ҳамвории ба асос параллел ҷойгир аст, *конуси сарбурида* номида мешавад (расми 52).



Расми 52

Асоси конус ва доираи буриш (ба асос параллел) *асосҳои конуси сарбуридаанд*. Хатти росте, ки аз маркази асосҳо мегузарад, *тир* ва порчае, ки ба асосҳо перпендикуляр аст, *баландӣ* мебошад. *Радиусҳои конуси сарбурида* радиуси асосҳоянд. Қисми сатҳи конусӣ, ки конуси сарбуридаро маҳдуд мекунад, *сатҳи паҳлуӣ* аст. Мувофиқан *ташкилдиҳандаҳои* конуси сарбурида порчаҳоянд, ки сатҳи конусии дар байни ду асос бударо ташкил медиҳанд.

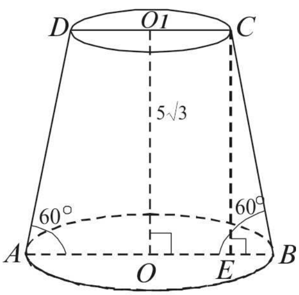
Агар конуси аввала рост бошад, он гоҳ ҳамаи ташкилдиҳандаҳо (онҳоро *апофема* ҳам мегӯянд) ба ҳамдигар баробар буда, баландӣ аз маркази асосҳо мегузарад. Дар ин ҳолат конуси сарбуридаро *конуси рости сарбурида* мегӯянд (Дар оянда агар махсус таъкид нашуда бошад, зери мафҳуми конуси сарбурида конуси рости сарбуридаро мефаҳмем).



Расми 53

Конуси сарбуридаро ҳамчун ҷисме, ки дар натиҷаи чарх задани трапетсияи росткунҷа дар атрофи тарафи паҳлуияш, ки ба асосҳо перпендикуляр мебошад, тасаввур кардан мумкин аст. Дар расми 53 конуси сарбуридае тасвир шудааст, ки дар натиҷаи дар гирди тарафи BC чарх задани трапетсияи росткунҷаи $ABCD$ ҳосил шудааст. Сатҳи паҳлуии ин конус дар натиҷаи чархзании тарафи AD, асосҳои конуси сарбурида бошанд, дар натиҷаи чархзании тарафҳои CD ва AB -и трапетсия ҳосил мешаванд.

Буриши конуси сарбурида бо ҳамворӣ айнан вазъи конусро мемонад (ниг. ба банди 19). Дар ин ҳолат буриши ҳамворие, ки ҳар ду асосро мебурад, аз он ҷумла буриши тирӣ ҳам, трапетсияи баробарпаҳлу мебошад.



Расми 54

Масъала. Ташкилдиҳандаи конуси сарбуридаи рост бо ҳамвории поёнии асос кунҷи 60^0 -ро ташкил медиҳад. Маълум, ки баландии конус $5\sqrt{3}$ см буда, диаметри асоси болоиаш 12 см аст. Диаметри асоси поёниро меёбем.

Ҳал. Бигузор $ABCD$ буриши тирии конус аст (расми 54). Мувофиқи додашудаҳои масъала $\angle ABC = 60^0$, $DC = 12$ см ва $OO_1 = CE = 5\sqrt{3}$ см, яъне $O_1C = \dfrac{CD}{2} = 6$ см. Аз секунҷаи росткунҷаи CEB меёбем:

$CE = BE \cdot tg 60^0 = \sqrt{3} \cdot BE$. Аз ин ҷо, $BE = \dfrac{CE}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5$ м.

Инак, радиуси асоси поёнӣ $OB = OE + EB = 6 + 5 = 11$ см.

Ҷавоб: $\alpha = 2 \cdot OB = 22$ см.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Конуси сарбурида аз конус чӣ тавр ҳосил карда мешавад?

2. Асосҳо, тир, сатҳи паҳлуӣ, радиуси асосҳо, баландӣ дар чунин конус чӣ тавр муайян карда мешаванд?

3. Конуси сарбуридаро ҳамчун ҷисми чархзанӣ чӣ тавр ҳосил кардан мумкин аст?

4. Буриши тири конуси сарбурида чӣ гуна фигура аст?

5. Кадом вақт дар конуси сарбурида баландӣ аз маркази асосҳо мегузарад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

173. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида 3 м ва 6 м-анд, баландӣ 4 м аст. Ташкилдиҳандаашро ёбед.

174. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида 11 см ва 16 см мебошанд, ташкилдиҳандааш 13 см аст. Масофаи байни маркази асоси хурдро то давраи асоси калон ёбед.

175. Баландии конуси сарбурида ба H баробар аст. Дарозии ташкилдиҳандаро ёбед, агар маълум бошад, ки вай ба асос кунҷи 30^0 -ро ташкил медиҳад.

176. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида 3 см ва 7 см, ташкилдиҳандааш 5 см мебошад. Масоҳати буриши тириро ёбед.

177. Аз миёнаҷойи баландии конуси сарбурида, ки масоҳати асосҳояш 4 м^2 ва 16 м^2 аст, ҳамвории ба асосҳо параллел гузаронида шудааст. Масоҳати буришро ёбед.

178. Масоҳати асоси конуси сарбурида ба 4 дм^2 ва 16 дм^2 баробар аст. Аз миёнаҷойи баландӣ ҳамвории ба асосҳо параллел гузаронида шудааст. Масоҳати буришро ёбед.

179. Дар конуси сарбурида масоҳати асосҳо ба 1 ва 49 баробаранд. Масоҳати буриши параллелӣ нимсуммаи онҳо аст. Ин бурииш баландии конусро ба кадом қисмҳо ҷудо мекунад?

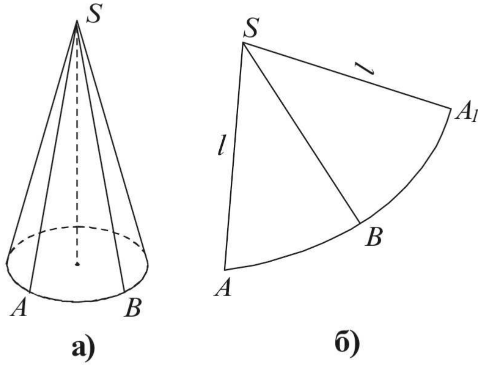
Масъалаҳо барои такрор

180. Масоҳати буриши тирии силиндр $\frac{6}{\pi}$ м^2 аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии силиндрро ёбед.

181. Дар сектори доиравӣ, ки камонаш 60^0 аст, доира кашида шудааст. Нисбати масоҳати ин секторро бар масоҳати доира ёбед.

21. МАСОҲАТИ САТҲИ ПАҲЛУИИ КОНУС

Агар сатҳи паҳлуии конусро мисли сатҳи паҳлуии силиндр (ниг. ба мавзӯи 17), аз рӯйи яке аз ташкилдиҳандаҳояш бурем ва онро дар ҳамворӣ паҳн созем, он гоҳ сектори доиравиро ҳосил мекунем (расми 55 а) ва б). Радиуси ин сектор (расми 55, б) ба ташкилдиҳандаи конус ва дарозии камони сектор ба дарозии давраи асоси конус баробар аст.



Расми 55

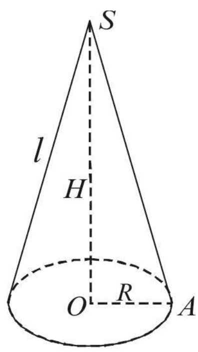
Масоҳати сатҳи паҳлуии конусро ба воситаи ташкилдиҳандааш l ва радиуси асосаш R ифода мекунем. Ин масоҳат ба масоҳати доиравии ABA_1S баробар аст. Бинобар ин $S_{паҳл} = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \alpha$, ки дар ин ҷо α ченаки градусии камони ABA_1 аст. Дарозии ин камон, ки дарозии давра аст, ба $2\pi R$ баробар мебошад. Яъне,

$2\pi R = \frac{\pi l}{180^0} \cdot \alpha$. Аз ин ҷо $\alpha = \frac{360^0 R}{l}$ ва

$$S_{паҳл} = \frac{\pi l^2}{360^0} \cdot \frac{360^0 R}{l} = \pi R l .$$

Дурустии ҷумлаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 16. *Масоҳати сатҳи паҳлуии конус ба ҳосили зарби нисфи дарозии давраи асос бар ташкилдиҳанда баробар аст.*



Расми 56

Масоҳати сатҳи пурраи конус бошад, бо формулаи

$$S_{пур} = S_{паҳл} + S_{асос} = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(l + R)$$

ҳисоб карда мешавад.

Масъалаи 1. Масоҳати сатҳи паҳлуии конусеро, ки радиуси асосаш 6 см, баландиаш 8 см аст, меёбем.

Ҳал. Мувофиқи додашудаҳо $R=6$ см, $H=8$ см (расми 56). Ташкилдиҳанда $l-$ро меёбем. Мувофиқи теоремаи Пифагор $SA^2=SO^2+OA^2$ ё $l^2=H^2+R^2=8^2+6^2=100$. Аз ин ҷо $l=10$ см ва $S_{паҳл}=\pi Rl=\pi\cdot 6\cdot 10=60\pi$ см^2.

Масъалаи 2. Суммаи масоҳатҳои сатҳҳои паҳлуии ду конуси монанд 68 см^2 аст. Нисбати ташкилдиҳандаҳояш 3:5 аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии ҳар як конусро меёбем.

Ҳал. Агар $S_{паҳл}^{(1)}$, $S_{паҳл}^{(2)}$ масоҳатҳои сатҳҳои паҳлуии конусҳо, l_1, l_2 ва R_1, R_2 мувофиқан ташкилдиҳандаҳо ва радиусҳои асосҳои онҳо бошанд, он гоҳ $\frac{S_{паҳл}^{(1)}}{S_{паҳл}^{(2)}}=\frac{\pi R_1 l_1}{\pi R_2 l_2}=\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{l_1}{l_2}$. Вале дар конусҳои монанд $\frac{l_1}{l_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{H_1}{H_2}$, ки H_1 ва H_2 баландиҳои конусҳо мебошанд.

Пас, $\frac{S_{паҳл}^{(1)}}{S_{паҳл}^{(2)}}=\frac{R_1^2}{R_2^2}=\frac{l_1^2}{l_2^2}=\frac{H_1^2}{H_2^2}$.

Ин натиҷаро истифода карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{S_{паҳл}^{(1)}}{S_{паҳл}^{(2)}}=\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25};\quad S_{паҳл}^{(1)}=\frac{9}{25}S_{паҳл}^{(2)}.$$

Вале $S_{паҳл}^{(1)}+S_{паҳл}^{(2)}=68$, пас $\left(\frac{9}{25}+1\right)S_{паҳл}^{(2)}=68$. Аз ин ҷо $S_{паҳл}^{(2)}=50$ см^2 ва $S_{паҳл}^{(1)}=18$ см^2

Ҷавоб: 18 см^2 ва 50 см^2.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Агар конусро бурида паҳн кунем, кадом фигура ҳосил мешавад?
2. Масоҳати сатҳи паҳлуии конус бо кадом формула ҳисоб мешавад?

3. Масоҳати сатҳи пурраи конусро бо кадом формула ҳисоб мекунанд?

4. Монанд будани ду конусро шарҳ диҳед.

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

182. Баландии конус 6 м, радиуси асосаш 8 м аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии онро ёбед.

183. Баландии конус 4 м, ташкилдиҳандааш 5 м аст. Масоҳати сатҳи пурраи конусро ёбед.

184. Палаткаи шакли конусдошта, ки баландиаш 3,5 м ва диаметри асосаш 4 м аст, бо матоъ рӯпӯш карда шудааст. Барои ин чанд метри квадратӣ матоъ сарф шудааст?

185. Боми манораи силоснигоҳдорӣ шакли конусро дорад. Баландии бом 2 м ва диаметри манора 6 м аст. Барои рӯйпуш кардани бом чанд дона тунукаи оҳанини андозааш 0,7x1,4 ($м^2$) зарур аст, агар маълум бошад, ки барои мустаҳкам кардани тунукаҳо 10%-и оҳани зарурӣ сарф шудааст.

186. Масоҳати сатҳи нӯги манораи конусӣ ба 250 $м^2$, диаметри асосаш 9 м аст. Баландии ин нӯгро ҳисоб кунед.

187. Хордае, ки аз охири диаметр гузаронида шудааст, дар гирди диаметр чарх мезанад. Дарозии диаметр 25 см ва дарозии хорда 20 см аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии ҷисми ҳосилмешударо ёбед.

188. Секунҷаи баробарпаҳлу дар атрофи баландиаш чарх мезанад. Тарафҳои ин секунҷаро ёбед, агар периметри он ба 30 см ва масоҳати сатҳи пурраи ҷисми чархзанӣ ба 60π $см^2$ баробар бошад.

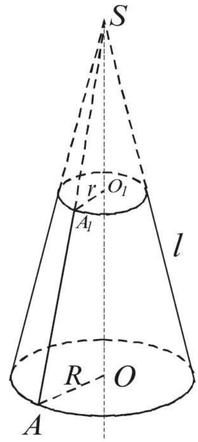
Масъалаҳо барои такрор

189. Асоси пирамида росткунҷаи тарафҳояш 6 см ва 15 см аст. Баландӣ, ки 4 см аст, аз нуқтаи буриши диагоналҳои асос мегузарад. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаро ёбед.

190. Диагоналҳои ромб ба 10 см ва 24 см баробаранд. Тарафи ромбро ёбед.

22. МАСОҲАТИ САТҲИ ПАҲЛУИИ КОНУСИ САРБУРИДА

Бигузор R ва r радиусҳои асос ва l ташкилдиҳандаи конуси сарбурида аст (расми 57). Масоҳати сатҳи паҳлуии ин конусро бо воситаи ин се бузургӣ R, r ва l ифода менамоем. Барои ин конуси сарбуридаро то конуси муқаррарӣ пурра менамоем. Агар S қуллаи ин конус, SA ташкилдиҳандааш бошад, он гоҳ мувофиқи теоремаи 16 масоҳати сатҳи паҳлуии ин конус $S^{(1)}_{пахл} = \pi R \cdot SA$ аст. Мувофиқи ҳамон теорема масоҳати сатҳи паҳлуии конусе, ки радиуси асосаш r аст, ба $S^{(2)}_{паҳл} = \pi r \cdot SA_1$ баробар мебошад. Возеҳ аст, ки



Расми 57

$S_{паҳл} = S^{(1)}_{паҳл} - S^{(2)}_{паҳл} = \pi R \cdot SA - \pi r \cdot SA_1 = \pi R(SA_1 + A_1A) - \pi r \cdot SA_1$. Бо назардошти он ки $AA_1 = l$ аст, ҳосил мекунем:

$$S_{паҳл} = \pi Rl + \pi(R - r)SA_1 .$$

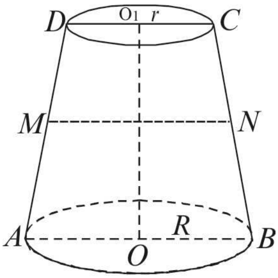
Ташкилдиҳандаи SA_1-ро ба воситаи l, R ва r ифода мекунем. Секунҷаҳои росткунҷаи SO_1A_1 ва SOA ба ҳам монанданд, чунки кунҷи тези умумӣ доранд, бинобар ин $\frac{SA_1}{SA} = \frac{r}{R}$ ё $\frac{SA_1}{SA_1 + l} = \frac{r}{R}$. Аз ин ҷо $SA_1 \cdot R = SA_1 \cdot r + lr$ ва

$SA_1(R - r) = lr$, $SA_1 = \frac{lr}{R - r}$. Ҳамин тариқ,

$$S_{паҳл} = \pi Rl + \pi(R - r) \cdot \frac{lr}{R - r} = \pi(R + r)l \ .$$

Тасдиқи зерин исбот шудааст.

Теоремаи 17. *Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси сарбурида ба нисфи ҳосили зарби нимсуммаи дарозии давраҳои асос бар ташкилдиҳанда баробар аст.*



Расми 58

Масъалаи 1. Дарозии порчае, ки миёнаҷойи тарафҳои буриши тирии конуси сарбуридаро пайваст мекунад 12 см буда, ташкилдиҳандааш 5 см аст. Масоҳати сатҳи паҳлуии ин конусро меёбем.

Ҳал. Тавре медонем (банди 20), буриши тирии конуси сарбурида трапетсияи баробарпаҳлуи $ABCD$ мебошад (расми 58). Агар M ва N миёнаҷойи AD ва BC бошанд, он гоҳ $12 = MN = \frac{AB + DC}{2} = \frac{2R + 2r}{2} = R + r$.

Пас, $S_{паҳл} = \pi(R + r)l = \pi \cdot 12 \cdot 5 = 60\pi$ см^2.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси сарбурида ба чӣ баробар аст?
2. Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси сарбурида бо кадом формула ифода мешавад?
3. Формулаеро нависед, ки масоҳати сатҳи пурраи конуси сарбурида бо он ҳисоб карда шавад.
4. Теоремаро дар бораи хатти миёнаи трапетсия баён кунед.

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

191. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида R ва r буда, ташкилдиҳанда бо асос кунҷи 60^0-ро дар бар мегирад. Масоҳати сатҳи паҳлуии конусро ёбед.

192. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида ва ташкилдиҳандаи он ҳамчун 1:4:5 нисбат дошта, баландиаш 8 см аст. Масоҳати сатҳи паҳлуиашро ёбед.

193. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида 6 м ва 14 м буда, масоҳати сатҳи пуррааш ба 572π м^2 баробар аст. Баландии ин конусро ёбед.

194. Баландии конуси сарбурида 63 см, ташкилдиҳандааш 65 см ва масоҳати сатҳи паҳлуиаш 26π дм^2 аст. Радиусҳои асосҳоро ёбед.

195. Сатил шакли конуси сарбуридаро дорад, ки радиуси асосҳояш 15 см ва 10 см-анд. Ташкилдиҳанда 30 см мебошад. Чӣ қадар ранг зарур аст, то 100-то ҳамин гуна сатил аз даруну берун ранг карда шавад, агар маълум бошад, ки ба 1 м^2 150г ранг сарф мешавад?

196. Барои сохтани карнай, ки диаметри як канораш 0,43 м, диаметри канори дигараш 0,036 м ва ташкилдиҳандааш 1,42 м аст, чанд метри квадратӣ вараҷи латунӣ лозим аст?

197. Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси сарбурида S, радиусҳои асосҳо R ва r-анд. Масоҳати сатҳи паҳлуии конуси пурраро ёбед.

198. Масоҳати асосҳои конуси сарбурида Q ва q буда, ташкилдиҳандааш бо асос кунҷи 60^0-ро ташкил медиҳад. Масоҳати сатҳи паҳлуии ин конусро ёбед.

199. Дар конуси сарбурида аз рӯйи баландӣ H, ташкилдиҳанда l ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ S, масоҳати буриши тириро ёбед.

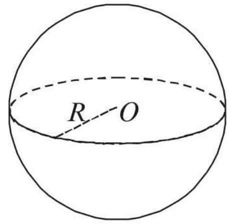
200. Масоҳати буриши тирии конуси сарбуридаро ёбед, агар масоҳатҳои асос Q, q ва масоҳати сатҳи паҳлуӣ S дода шуда бошанд.

Масъалаҳо барои такрор

201. Баландии конус $\frac{2}{3}$ ҳиссаи диаметри асоси онро ташкил мекунад. Нисбати масоҳати асоси онро бар масоҳати сатҳи паҳлуияш ёбед.

202. Диагонали квадрат ба 12 см баробар аст. Масоҳати квадратро ёбед.

23. СФЕРА ВА КУРА

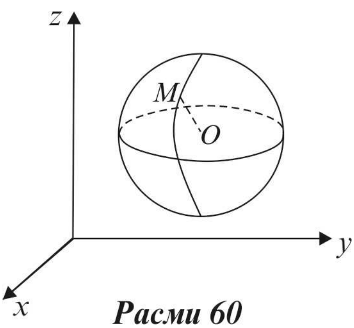


Расми 59

Шабоҳати давра дар фазо сфера аст.

Таърифи 1. *Сфера* гуфта, сатҳеро меноманд, ки вай аз нуқтаҳои аз нуқтаи додашуда дар масофаи доимӣ ҷойгир буда сохта шудааст (расми 59).

Нуқтаи додашудаи O *маркази сфера*, масофаи доимии R *радиуси сфера* ном дорад. Порчае, ки ду нуқтаи дилхоҳи сфераро пайваст мекунад, *хорда* номида мешавад. Хордае, ки аз марказ мегузарад *диаметри сфера* мебошад. Зоҳиран фаҳмост, ки мисли давра, дар сфера ҳам диаметр дучандаи радиус аст. Нӯгҳои диаметрро *нуқтаҳои ба ҳам диаметрии муқобили* сфера мегӯянд. Сфераро ҳамчун фигурае, ки дар натиҷаи дар гирди диаметр чарх задани нимдавра ҳосил мешавад, тасаввур кардан мумкин аст.



Расми 60

Муодилаи сфераро дар системаи росткунҷавии координатаи *Oxyz* менависем. Фарз мекунем, ки маркази сфера дар нуқтаи *O (a; b; c)* ҷойгир аст (расми 60). Мувофиқи таърифи 1 барои ҳар гуна нуқтаи сфера *M(x; y; z)* масофаи байни он ва маркази сфера *O (a; b; c)* адади доимии ба радиус баробар мебошад: $MO=R$ ё $MO^2=R^2$. Агар формулаи масофаи байни ду нуқтаро истифода барем, он гоҳ баробарии болоро ин тавр навишта метавонем:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ин баробариро муодилаи сфера дар фазо меноманд. Дар ин муодила $a=b=c=0$ гузошта, муодилаи сфераро, ки марказаш дар ибтидои координатаҳо ҷойгир буда, радиусаш R аст, ҳосил мекунем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Масалан, муодилаи сфера, ки марказаш дар нуқтаи (2; 0; -1) ва радиусаш $\sqrt{5}$ аст, чунин мебошад:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5.$$

Масъала. Исбот мекунем, ки муодилаи $x^2 + 6x + y^2 - 2y + z^2 = 0$ муодилаи сфера аст. Марказ ва радиуси ин сфераро меёбем.

Ҳал. Табдилоти заруриро иҷро мекунем:

$$0 = x^2 + 6x + y^2 - 2y + z^2 = x^2 + 2\cdot 3x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 =$$

$$= (x^2 + 2\cdot 3x + 9) + (y^2 - 2y + 1) + z^2 - 10 = (x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 10.$$

Аз ин ҷо:

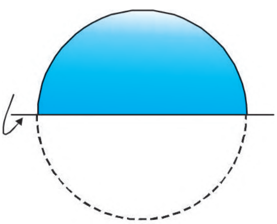
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 10 = (\sqrt{10})^2.$$

Инак, муодилаи мазкур муодилаи сфераи марказаш дар нуқтаи O(-3; 1; 0) ва радиусаш $R = \sqrt{10}$ мебошад.

Таърифи 2. Ҷисми геометрӣ, ки сатҳи он сфера аст, *кура* номида мешавад.

Марказ, радиус, хорда, диаметр, нуқтаҳои ба ҳам диаметрии муқобили сфераеро, инчунин марказ, радиус, хорда, диаметр, нуқтаҳои ба ҳам диаметрии муқобили кура ҳам мегӯянд.

Зоҳиран фаҳмост, ки кура ҳамаи нуқтаҳоеро, ки аз марказ дар масофаи аз радиус зиёд набуда ҷойгиранд, дар бар мегирад (аз он ҷумла марказро низ).



Расми 61

Кура мисли силиндр ва конус ҷисми чархзанӣ аст. Вай ҳангоми дар атрофи диаметри худ чарх задани нимдоира ҳосил мешавад (расми 61).

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна сатҳро сфера меноманд?
2. Марказ, радиус, хорда, диаметр, нуқтаҳои ба ҳам диаметрии муқобили сфера чӣ тавр муайян карда мешаванд?
3. Муодилаи сфераро, ки марказ ва радиусаш дода шудааст, нависед.
4. Чӣ гуна ҷисмро кура мегӯянд?
5. Чаро кура ҷисми чархзанӣ аст?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

203. Муодилаи сфераро нависед, ки марказаш дар нуқтаи O ва радиусаш R аст, агар: а) $O(-1;\ 2;\ 1),\ R=2;$ б) $O(2;\ 0;\ -3),\ R=\sqrt{3}$ бошад.

204. Муодилаи сфераро, ки аз рӯйи нуқтаи A гузашта, марказаш O аст, нависед, агар: а) $A(2;\ 3;\ 4), O(1;\ 0;\ -2);$ б) $A(-1;\ 2;\ -3),\ O(0;\ -3;\ -1)$ бошад.

205. Магар ба сфераи марказаш дар нуқтаи O (1; -2; 0) ва радиусаш 3 буда, нуқтаи: а) (3; -3; 1), б) (1; -2; 3) тааллуқ дорад?

206. Координатаҳои марказ ва радиуси сфераро ёбед, агар муодилааш:
а) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=1;$ б) $(x+3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=16$ бошад.

207. Исбот кунед, ки муодилаи: а) $x^2+2x+y^2+z^2=3;$ б) $x^2-8x+y^2+4y+z^2=0$ муодилаи сфера аст. Координатаҳои марказ ва радиуси онро ёбед.

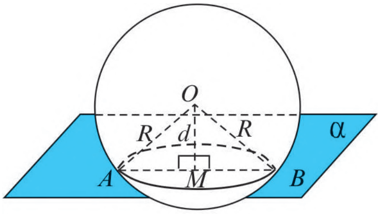
Масъалаҳо барои такрор

208. Диагонали куб 3 см аст. Масоҳати сатҳи пурраи кубро ёбед.

209. Росткунҷа дар давраи радиусаш 5 см дарункашида буда, дарозии як тарафаш 8 см мебошад. Тарафи дигари росткунҷаро ёбед.

24. БУРИШИ СФЕРА ВА КУРА БО ҲАМВОРӢ

Теоремаи 18. *Ҳар гуна буриши сфера бо ҳамворӣ давра аст. Маркази ин давра асоси перпендикулярест, ки аз маркази сфера ба ҳамвории буранда фуроварда шудааст.*



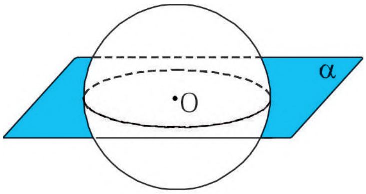
Расми 62

Исбот. Бигузор сфераи марказаш O бо ҳамвории α бурида мешавад (расми 62) ва M асоси перпендикуляр аст. Ду нуқтаи дилхоҳи A ва B-и буришро мегирем, яъне ин нуқтаҳо ҳам ба сфера ва ҳам ба ҳамворӣ тааллуқ доранд. Ин нуқтаҳоро ба нуқтаи M пайваст мекунем. Порчаи OM ба α перпендикуляр аст, пас вай ба ҳар гуна хатти рости дар ин ҳамворӣ воқеъбуда, перпендикуляр мебошад. Аз ин ҷо $OM \perp MA$ ва $OM \perp MB$.

Агар радиусҳои OA ва OB-ро гузаронем, он гоҳ ду секунҷаи ба ҳам баробари росткунҷаи OMA ва OMB-ро ҳосил мекунем. Аз баробарии ин секунҷаҳо бармеояд, ки $MA = MB$. Аз сабаби ихтиёрӣ будани нуқтаҳои A ва B ҳосил мекунем, ки ҳамаи нуқтаҳои буриш аз нуқтаи M дар масофаи баробар воқеанд ва дар ҳамвории α ҷойгиранд. Аз ин ҷо бармеояд, ки фигураи дар натиҷаи буриши сфера бо ҳамвории α ҳосилшаванда давраест, ки марказаш дар нуқтаи M буда, радиусаш $MA = MB = \sqrt{R^2 - d^2}$ аст, ки дар ин ҷо d масофаи маркази сфера то буриш мебошад. Теорема пурра исбот шуд.

Агар ҳамвории буранда аз маркази сфера гузарад, он гоҳ вай *ҳамвории диаметрӣ* буда, буриши ҳосилшуда *давраи калон* ном дорад.

Айнан ҳамин тавр, мисли теоремаи 18 исбот кардан мумкин аст, ки буриши кура бо ҳамворӣ доираест, ки марказаш асоси перпендикуляри аз маркази доира ба ҳамвории буранда гузаронидашуда мебошад. *Ҳамвории диаметрӣ* ва *доираи калони кура* ҳамон тавре ки барои сфера муайян шуда буданд (бо иваз кардани калимаи давра ба калимаи доира), муайян мешаванд.



Расми 63

Хосиятҳои зерин ба осонӣ исбот мешаванд: 1) Маркази давраи калон маркази сфера аст; 2) Давраҳои калони сфера ба ҳамдигар баробаранд; 3) Хатти буриши ду давраи калон диаметри умумии онҳо ва сфера аст; 4) Аз рӯйи ду нуқтаи сфера фақат ва фақат якто давраи калон гузаронидан мумкин аст; 5) Фақат якто радиуси сфера ба хорда перпендикуляр аст. Вай аз миёнаҷойи хорда мегузарад; 6) Аз ду хордаи давраи калон ҳамонаш ба марказ наздик аст, ки дарозии калонтарро дорад ва баръакс; 7) Аз рӯйи се нуқтаи дилхоҳи сфера давра (на ҳамеша калон) гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.

Фаҳмост, ки хосиятҳои 1) – 7) бо иваз кардани калимаҳои сфера ба кура ва давра ба доира дурустанд.

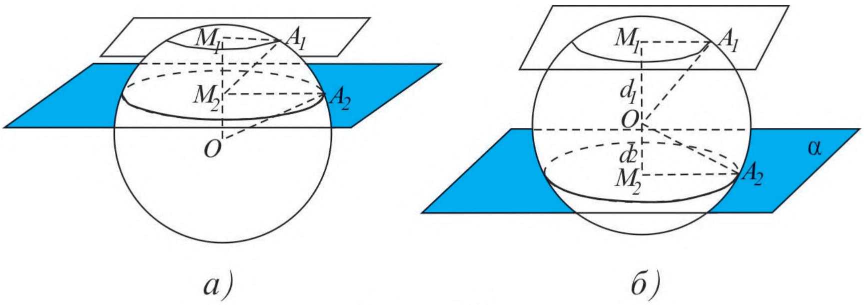
Масъалаи 1. Муайян мекунем, ки буриши сфераи $x^2+y^2+z^2=4$ бо ҳамвории $y-z=2$ кадом фигура аст.

Ҳал. Масофаро аз маркази сфера $O(0;0;0)$ то ҳамвории $y-z=2$ муайян мекунем (Масофаи байни нуқтаи $M(a;b;c)$ ва ҳамвории $Ax+By+Cz-D=0$ аз рӯйи формулаи $d=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}|a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C-D|$ ҳисоб карда мешавад).

Дорем: $d=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}|0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot(-1)-2|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Аз сабаби он ки $\sqrt{2}=d<R=2$ аст, пас ҳамворӣ сфераро аз рӯйи давра мебурад.

Аз тарзи ҳал дида мешавад, ки ҳангоми $d > R$ будан, ҳамворӣ сфераро намебурад. Дар сурате ки агар $d = R$ шавад, он гоҳ ҳамворӣ ба сфера расанда аст.

Масъалаи 2. Ду бурише, ки дар натиҷаи буриши кураи радиусаш 13 см бо ҳамвориҳои параллел ҳосил шудаанд, дорои радиусҳои 5 см ва 12 см мебошанд. Масофаи байни ҳамвориҳои бурандаро меёбем.



Расми 64

Ҳал. Вобаста ба он ки маркази кура дар байни ҳамвориҳо ҷойгир аст ё на, тарзи ҳал ва ҷавоби масъала гуногун аст.

Ҳолати якум. Маркази кура дар байни ҳамвориҳои буранда ҷойгир нест (расми 64, а). Ба секунҷаҳои росткунҷаи OM_1A_1 ва OM_2A_2 теоремаи Пифагорро татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$d_1 = OM_1 = \sqrt{OA_1^2 - M_1A_1^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\text{см},$$

$$d_2 = OM_2 = \sqrt{OA_2^2 - M_2A_2^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\ \text{см}.$$

Аз расм аён аст, ки масофаи матлуб $M_1M_2 = d_1 - d_2 = 12 - 5 = 7$ см аст.

Ҳолати дуюм. Маркази кура дар байни ҳамвориҳои буранда ҷойгир аст (расми 64, б). Айнан мисли ҳолати якум дорем: $d_1 = 12$ см ва $d_2 = 5$ см . Бинобар ин масофаи байни ҳамвориҳо $MM_2 = d_1 + d_2 = 12 + 5 = 17$ см. мебошад.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Буриши сфера бо ҳамворӣ чӣ гуна фигура аст? Буриши кура бо ҳамворӣ чӣ?

2. Ҳамвории диаметрӣ чӣ гуна ҳамвориро мегӯянд?

3. Давраҳои калони сфера (кура) чӣ гуна буришанд?

4. Хосиятҳои давраи (доираи) калони сфераро (кураро) номбар кунед.

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

210. Ҳангоми буриши сфераи $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ бо ҳамвории: а) $x = 2$; б) $11x + 19y - 7z = 0$; в) $x + y - z + 9 = 0$ кадом фигура ҳосил мешавад?

211. Курае, ки радиусаш 41 дм аст, бо ҳамвории масофааш аз марказ 9 дм буда бурида шудааст. Масоҳати буришро ёбед.

212. Радиуси кура R аст. Аз охири радиус дар зери кунҷи 60^0 ҳамворӣ гузаронида шудааст. Масоҳати буришро муайян кунед.

213. Радиуси кураи Замин R аст. Дарозии давраи доираи параллелӣ ба чанд баробар аст, агар арзи он 60^0 бошад?

214. Шаҳри N дар 60^0 арзи шимол ҷойгир аст. Дар муддати 1 соат аз сабаби дар атрофи тири худ чарх задани Замин кадом масофаро ин пункт тай мекунад, агар радиуси Замин 6000 км бошад?

215*. Дар сфера се нуқта дода шудааст, ки масофаашон мувофиқан 6 см, 8 см ва 10 см аст. Радиуси сфера 13 см мебошад. Масофаи байни маркази сфера ва ҳамвориеро, ки аз рӯйи ин се нуқта мегузарад, ҳисоб кунед.

216*. Диаметри кура 15 м аст. Берун аз кура нуқтаи A дода шудааст, ки дар масофаи 10 м аз сатҳи кура (сфера) ҷойгир аст. Дар сфера дарозии чунин davraеро ёбед, ки ҳамаи нуқтаҳои он аз нуқтаи A дар масофаи 20 м воқеъ бошанд.

Масъалаҳо барои такрор

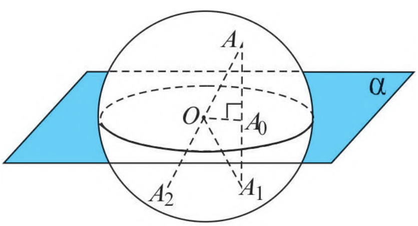
217. Секунҷаи росткунҷаи гипотенузааш 17 см ва яке аз катетҳояш 8 см дар атрофи ҳамин катет давр мезанад. Масоҳати сатҳи пурраи ҷисми ҳосилшударо ёбед.

218. Масоҳати доираи дарункашидаи шашкунҷаи мунтазами дарозии тарафаш 4 см бударо ҳисоб кунед.

25. СИММЕТРИЯ ДАР КУРА

Зоҳиран дарк кардан мумкин аст, ки ҳар гуна хатти росте, ки аз маркази доира мегузарад, тири симметрияи он аст. Дар фазо хосияти ба он монандро кура дорост. Вай нисбат ба ҳар гуна ҳамвории диаметрӣ симметрӣ мебошад. Ин тасдиқро ҳамчун теорема меорем.

Теоремаи 19. *Ҳар гуна ҳамвории диаметрии кура ҳамвории симметрияи он аст. Маркази кура маркази симметрия мебошад.*



Расми 65

Исбот. Бигузор α ҳамвории диаметрӣ ва A нуқтаи дилхоҳи кураи марказаш дар нуқтаи O-и радиусаш R аст (расми 65). Нуқтаи A_1-ро, ки ба нуқтаи A нисбат ба ҳамвории α симметрӣ аст месозем. Ҳамвории α ба порчаи AA_1 перпендикуляр буда, онро дар нимаҷояш мебурад. Секунҷаҳои AOA_o ва A_1OA_o ҳамчун секунҷаҳои росткунҷа ба ҳамдигар баробаранд, бинобар ин $AO=OA_1$. Вале $AO \le R$ аст, пас $OA_1 \le R$, яъне нуқтаи ба нуқтаи A симметрӣ нисбат ба ҳамвории α ба кура тааллуқ дорад. Ҳамвории симметрияи кура будани ҳамвории диаметрӣ исбот шуд.

Акнун бигзор A_2 нуқтаест, ки ба нуқтаи A нисбат ба маркази кура симметрӣ аст. Пас $OA_2 = OA \leq R$, яъне нуқтаи A_2 ба кура тааллуқ дорад. Теорема пурра исбот шудааст.

Эзоҳи 1. Тасдиқи теорема дуруст аст, агар ба ҷойи кура сфера муоина карда шавад. Яъне, сфера нисбат ба марказаш ва ҳамвории диаметриаш симметрӣ аст.

Эзоҳи 2. Зоҳиран фаҳмост, ки ҳар гуна хатти росте, ки аз марказ мегузарад, тири симметрияи кура (сфера) аст.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Нуқта, тир ва ҳамвории симметрия дар кура кадомҳоянд?
2. Теоремаро доир ба ҳамвории симметрия будани ҳамвории диаметрӣ барои сфера исбот кунед.
3. Давраҳои калони сфера (кура) чӣ гуна буришанд?
4. Оё миқдори ҳамвориҳои симметрияи кура ё сфера охирноканд? Агар на, пас чаро?
5. Хатти росте, ки аз маркази сфера мегузарад, чиро ифода мекунад?

Масъалаҳо барои такрор

219. Ташкилдиҳандаи конус l ба ҳамвории асос дар зери кунҷи 60^0 моил аст. Масоҳати сатҳи пурраи конусро ёбед, агар $l = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$ см бошад.

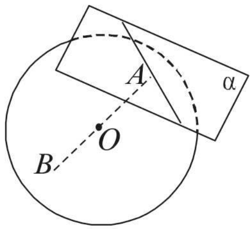
220. Масоҳати секунҷаи росткунҷаро, ки катеташ 2,5 см ва гипотенузааш $\sqrt{70{,}25}$ см аст, ёбед.

26. ХАТТИ РОСТ ВА ҲАМВОРИИ БА КУРА РАСАНДА

Таъриф. Ҳамворӣ ба кура (сфера) *расанда* номида мешавад, агар вай бо кура (сфера) танҳо якто нуқтаи умумӣ дошта бошад.

Нуқтаи умумии A-ро, ки ҳам ба ҳамворӣ ва ҳам ба кура тааллуқ дорад, *нуқтаи расиши* ҳамворӣ ва кура меноманд (расми 66).

Теоремаи зерин ба нишонаи расиши хатти рост ва давра шабоҳат дорад.



Расми 66

Тероемаи 20. *Барои он ки ҳамворӣ ба кура расанда бошад, зарур ва кифоя аст, ки вай ба диаметри кура перпендикуляр буда, аз охираш гузарад.*

Исбот. *Кифоягӣ*. Бигзор AB диаметри кура буда, нуқтаи A ба ҳамвории α тааллуқ дорад ва AB ба α перпендикуляр аст. Яъне, радиуси OA перпендикулярест, ки аз маркази кура ба ҳамворӣ фуроварда шудааст. Пас, масофа аз маркази кура то ҳамворӣ ба радиус баробар аст. Ин нишон медиҳад, ки ҳамворӣ ва кура танҳо якто нуқтаи умумӣ доранд, яъне ҳамворӣ ба кура расанда аст.

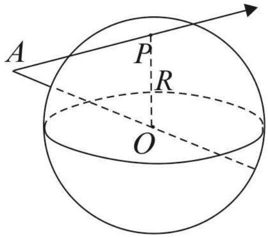
Зарурӣ. Бигзор A нуқтаи расиши ҳамвории α ва кураи марказаш O мебошад (расми 66). Нишон медиҳем, ки OA ба α перпендикуляр аст.

Фарз мекунем, ки чунин нест, яъне радиуси OA ба ҳамвории α моил аст ва масофа аз маркази кура то ҳамвории α аз радиус хурд аст. Барои ҳамин кура ва ҳамворӣ аз рӯйи доира бурида мешаванд. Ин бошад, ба расанда будани ҳамвории α зид аст. Ҳамин тариқ, кура ва ҳамворӣ якто нуқтаи умумӣ доранд. Зиддияти ҳосилшуда нишон медиҳад, ки радиуси OA ба α перпендикуляр аст. Теорема пурра исбот шуд.

Бигузор дар фазо хатти рост дода шудааст. Вай метавонад бо кура нуқтаи умумӣ надошта бошад ва ё дуто ё якто нуқтаи умумӣ дошта бошад. Дар ҳолати якум хатти рост кураро намебурад, дар ҳолати дуюм кураро мебурад ва дар ҳолати сеюм ба кура *расанда* аст. Фаҳмост, ки хатти рости расанда дар ҳамвории расанда ҷойгир аст. Инчунин аз ҳар як нуқтаи сатҳи кура (сфера) миқдори беохири хатҳои рости расанда гузаронидан мумкин аст. Аз нуқтаи берун аз кура ҷойгиршуда бошад, ба он миқдори беохири хатҳои рости расанда ва ҳамвориҳои расандаро гузаронидан мумкин аст.

Эзоҳ. Возеҳ аст, ки тасдиқоти дар боло овардашуда дурустанд, агар дар онҳо калимаи кураро ба сфера иваз намоем.

Масъала. Масофаи байни маркази кура O ва нуқтаи A 10 см аст. Радиуси кура $R = 6$ см мебошад. Дарозии порчаи расандаро, ки аз нуқтаи A ба кура гузаронида шудааст, меёбем.



Расми 67

Ҳал. Зоҳиран фаҳмост, ки нуқтаи A берун аз кура воқеъ аст (расми 67). Расандаи AP-ро гузаронида, нуқтаи расиш P-ро бо марказ пайваст карда, секунҷаи росткунҷаи AOP-ро ҳосил мекунем. Аз ин мувофиқи теоремаи Пифагор $AP^2 = AO^2 - OP^2$ ё $AP^2 = AO^2 - R^2 = 10^2 - 6^2 = 64$. Инак, $AP = 8$ см.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна ҳамвориро ҳамвории ба кура (сфера) расанда меноманд?

2. Нишонаи ба кура расанда будани ҳамвориро баён карда, онро шарҳ диҳед.

3. Аз ҳар як нуқтаи сфера ба он чандто ҳамвории расанда гузаронидан мумкин аст? Агар нуқта дар беруни сфера ҷойгир бошад чӣ?

4. Дар кадом ҳолат хатти рост ба кура расанда ва ё буранда мебошад?

5. Дар кадом ҳолат хатти рост кураро намебурад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

221. Тарафҳои секунҷа ба 13 см, 14 см ва 15 см баробаранд. Масофаро аз ҳамвории секунҷа то маркази кура, ки тарафҳои секунҷа ба он расандаанд ёбед, агар радиуси кура 5 см бошад.

222. Диагоналҳои ромб ба 15 см ва 20 см баробаранд. Радиуси кура 10 см буда, ҳамаи тарафҳои ромб ба он расандаанд. Масофаи маркази кураро то ҳамвории ромб ёбед.

223. Сфераи радиусаш R ба рӯяҳои кунҷи дурӯяи бузургиаш φ расанда аст. Масофаро аз маркази сфера то теғаи кунҷи дурӯя ёбед.

224. Сфера ба рӯяҳои кунҷи дурӯяи бузургиаш 120^0 расанда аст. Радиуси сфераро ёбед, агар масофаи байни маркази сфера то теғаи кунҷи дурӯя a бошад.

225*. Радиуси сфера 112 см аст. Нуқтаи дар ҳамвории расанда ҷойгирбуда аз нуқтаи расиш дар масофаи 15 см ҷойгир аст. Масофаи байни ин нуқта ва нуқтаи ба он наздиктарини сфераро ҳисоб кунед.

Масъалаҳо барои такрор

226. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 12 см аст. Берун аз ҳамвории секунҷа нуқтае гирифта шудааст, ки он аз ҳар се қуллаи секунҷа дар масофаи 10 см воқеъ мебошад. Масофаи байни ин нуқта ва ҳамвории секунҷаро муайян кунед.

227. Кунҷҳои секунҷа ҳамчун 3:7:8 нисбат доранд. Кунҷи калонтарини секунҷаро ёбед.

§4. ҲАҶМИ БИСЁРРӮЯҲО

27. МАФҲУМИ ҲАҶМИ ҶИСМ

Барои чен кардани масофаи байни ду нуқта *воҳиди дарозӣ*, ки дарозии порчаи ихтиёран интихобшуда аст (миллиметр, сантиметр, детсиметр, метр, километр ва ғайра), истифода карда мешавад. Андозаи ин масофа ба адади он миқдор воҳиде, ки дар масофаи мазкур меғунҷад, баробар аст. Ба ин монанд барои чен кардани масоҳати фигура мо квадратро, ки тарафаш воҳиди интихобшудаи дарозӣ аст, истифода мебарем. Чунин квадрат *квадрати воҳидӣ* ном дорад. Масоҳати сатҳи додашуда ба миқдори квадратҳои воҳидӣ, ки фигура онҳоро дар бар мегирифт, баробар буд.

Барои чен кардани ҳаҷм *куби воҳидӣ*, ки теғааш ба воҳиди дарозӣ, масоҳати рӯяаш ба квадрати воҳидӣ (сантиметри квадратӣ, метри квадратӣ ва ғайра) баробар аст, истифода карда мешавад. Чунин куб *воҳиди ҳаҷм* ном дорад.

Таърифи 1. Миқдори воҳидҳои ҳаҷм, ки ҷисми геометрӣ (призма, пирамида, силиндр, кура ва ғайраҳо) онҳоро дар бар мегирад, *ҳаҷми ҷисм номида мешавад* (Дар айни ҳол талаб карда намешавад, ки ин миқдор бо адади бутун ифода шавад).

Агар теғаи куби воҳиди ҳаҷм 1 см бошад, он гоҳ ҳаҷм бо сантиметри кубӣ (см^3); агар теғаи куби воҳидӣ 1 м бошад, ҳаҷм бо метри кубӣ (м^3) чен карда мешавад. Агар теғаи куб 1 км бошад, он гоҳ ҳаҷм бо километри кубӣ (км^3) чен карда мешавад ва ғайра.

Априорӣ (бе исбот ё ки ҳамчун гипотеза) қабул карда шудааст, ки барои ҷисмҳои геометрӣ ду *постулати* зерин дурустанд:

1. *Ба ҳар гуна ҷисми геометрӣ ба таври ягона адади* *мусбати мувофиқ гузоштан мумкин аст, ки он ҳаҷми ҷисм мебошад.*

2. *Агар ҷисм ба ҷисмҳои бо ҳам қисми умумӣ надошта ҷудо карда шуда бошад, он гоҳ ҳаҷми он аз суммаи ҳаҷмҳои ҳар як қисм иборат аст.*

Масалан, тавре дар оянда хоҳем дид, ҳар гуна призма ё пирамидаи n-кунҷаро ба миқдори охирноки призма ё пирамидаҳои секунҷа ҷудо кардан мумкин аст. Мувофиқи постулати 2 агар, масалан, ҳаҷми пирамидаи секунҷаро ёфта тавонем, пас ҳаҷми пирамидаи дилхоҳи n–кунҷаро ёфта метавонем. Постулати 2 *хосияти аддитивии ҳаҷм* ном дорад.

Таърифи 2. Агар ҳаҷми ду ҷисм бо ҳам баробар бошад, ҷисмҳоро *баробарбузург* меноманд.

Фаҳмост, ки мафҳумҳои ҷисмҳои бо ҳам баробар ва ҷисмҳои бо ҳам баробарбузург маънои гуногунро доранд. Масалан, призма ва пирамида баробарбузург шуда метавонанд, вале асло бо ҳам баробар нестанд.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Воҳиди ҳаҷм чӣ гуна куб аст?
2. Ҳаҷми ҷисм чӣ тавр муайян карда мешавад?
3. Постулатҳои ҳаҷмро номбар намоед.
4. Дар кадом ҳолат ду ҷисм баробарбузурганд?
5. Ҷисмҳои баробарбузург ҳамеша бо ҳам баробаранд?

Масъалаҳо барои такрор

228. Баландии ПР 12 см буда, тарафҳои асосаш 8 см ва 6 см-анд. Масоҳати буриши диагоналиро ёбед.

229. Росткунҷаи тарафҳояш 32 см ва 24 см дарункашида аст. Радиуси давра ёфта шавад.

28. ҲАҶМИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Аввал ба ёфтани ҳаҷми параллелепипеди росткунча (ПР) машғул мешавем. Барои ёфтани ҳаҷми ПР, ки андозаҳояш дода шудаанд, тасдиқи зеринро беисбот қабул мекунем: *нисбати ҳаҷми ду ПР, ки асосҳои якхела доранд, ба нисбати баландиҳояшон баробар аст*. Дарозӣ, бар ва баландии ПР -ро *андозаҳои хаттиаш* меноманд.

Теоремаи 21. *Ҳаҷми ПР, ки андозаҳои хаттиаш* a, b, c *мебошанд, бо формулаи* $V = abc$ *ҳисоб карда мешавад.*

Исбот. Куберо, ки воҳиди чен кардани ҳаҷм аст, яъне андозаҳояш 1, 1, 1 аст, интихоб мекунем. Баъд се ПР-и андозаҳояшон $a,1,1$; $a,b,1$ ва a,b,c-ро мегирем. Ҳаҷми онҳоро бо V_1, V_2 ва V ишорат мекунем. Аз сабаби он ки андозаи дилхоҳи ПР-ро ҳамчун баландӣ қабул кардан мумкин аст, мувофиқи тасдиқи дар боло овардашуда $\frac{V_1}{1} = \frac{a}{1}$, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{b}{1}$, $\frac{V}{V_2} = \frac{c}{1}$ мешавад. Ҳар се ин баробариро узв ба узв зарб мекунем: $\frac{V_1}{1} \cdot \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V}{V_2} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1}$, яъне $V = abc$.

Дурустии теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Маълум, ки агар ҳар як теғаи кубро 1 м зиёд кунем, он гоҳ ҳаҷми куб 7 м³ зиёд мешавад. Чанд будани теғаи кубро меёбем.

Ҳал. Агар теғаи кубро бо x ишорат кунем, он гоҳ ҳаҷми он ба x^3 баробар мешавад. Мувофиқи шарти масъала $(x+1)^3 - x^3 = 7$ ё $3x^2 + 3x + 1 = 7$ ё ки $3x^2 + 3x - 6 = 0$. Аз ин муодилаи квадратӣ

$$\boldsymbol{x}_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 6 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{81}}{6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; \;\; x_1 = -2, \;\; x_2 = 1.$$

Танҳо решаи мусбат маънои геометриро дорад. Инак, теғаи куб 1 м аст.

Аз теорема чунин хулосаҳо бармеоянд:

Хулосаи 1. *Ҳаҷми ПР ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.*

Дар ҳақиқат, рӯяи теғаҳояш ба a ва b баробарро ҳамчун асоси ПР қабул мекунем. Пас масоҳати асос S ба $a \cdot b$ ва баландии H ба c баробар мешавад, яъне

$$V = abc = S \cdot H .$$

Амалан дуруст будани ин хулосаро барои ҳар гуна параллелепипед нишон додан мумкин аст. Аниқаш, ҳ*аҷми параллелепипеди дилхоҳ* (моил, рост, росткунҷа) *ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.* Вале мо бо овардани тасвияи ҳамин тасдиқ маҳдуд шуда, исботашро намеорем.

Хулосаи 2. *Ҳаҷми куби теғааш a бо формулаи $V = a^3$ ҳисоб карда мешавад.*

Масъалаи 2. Масоҳати се рӯяи ПР ба 2 м^2 , 3 м^2 ва 6 м^2 баробаранд. Ҳаҷми онро меёбем.

Ҳал. Нишон медиҳем, ки агар Q_1, Q_2, Q_3 масоҳатҳои рӯяҳо бошанд, он гоҳ $V = \sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}$ мешавад. Дар ҳақиқат, агар a, b, c андозаҳои ПР бошанд, он гоҳ $V = abc$**,** $ab = Q_1$**,** $bc = Q_2$**,** $ac = Q_3$ аст. Аз ин баробариҳо ҳосил мекунем:

$$b = \frac{Q_2}{c}, \; a = \frac{Q_3}{c} \; , \; Q_1 = ab = \frac{Q_2}{c} \cdot \frac{Q_3}{c} \quad c^2 = \frac{Q_2 Q_3}{Q_1}, \quad c = \sqrt{\frac{Q_2 Q_3}{Q_1}} .$$

Ҳамин тариқ,

$$V = abc = \frac{Q_3}{c} \cdot \frac{Q_2}{c} \cdot c = \frac{Q_2 Q_3}{c} = \frac{Q_2 Q_3}{\sqrt{\frac{Q_2 Q_3}{Q_1}}} = \sqrt{Q_1 Q_2 Q_3} .$$

Қиматҳои додашудаи масъаларо истифода карда, меёбем:

$$V = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = 6 \text{ м}^3 .$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чиро андозаҳои хаттии ПР меноманд?

2. Ҳаҷми ПР бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?

3. Ҳаҷми параллелепипеди дилхоҳро бо кадом формула ёфтан мумкин аст?

4. Барои чӣ ҳаҷми куб бо формулаи $V = a^3$ ифода мешавад?

5. Агар масоҳатҳои се рӯяи ПР маълум бошанд, он гоҳ ҳаҷми онро чӣ гуна ёфтан мумкин аст?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

230. Ҳаҷми ПР-ро, ки тарафҳои асосаш a ва b буда, баландиаш h аст, ёбед, агар:

а) $a = 11$, $b = 12$, $h = 15$; б) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 10\sqrt{10}$ бошад.

231. Диагонали куб $3\sqrt{3}$ см аст. Ҳаҷми кубро ёбед.

232. Асоси ПР квадрат аст. Диагонали рӯяи паҳлуии параллелепипед, ки 8 см аст, бо ҳамвории асос кунҷи 30^0-ро ташкил мекунад. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

233. Андозаҳои ПР 15 м, 50 м ва 36 м-анд. Теғаи куберо, ки бо ин параллелепипед баробарбузург аст, муайян намоед.

234. Андозаҳои хишт ба 25 см, 12 см ва 6,5 см баробаранд. Массааш 3,51 кг аст. Зичии хиштро ёбед.

235. Андозаҳои чӯби чоррахаи (брусок) росткунҷа 3 см, 4 см, 5 см-анд. Агар ҳар теғаи онро ба x сантиметр зиёд кунем, он гоҳ масоҳати сатҳаш 54 $см^2$ зиёд мешавад. Ҳаҷми чӯб чӣ тавр тағйир меёбад?

236. Андозаҳои ПР ба 8 см, 12 см ва 18 см баробаранд. Теғаи куберо, ки бо ин параллелепипед баробарбузург аст, муайян кунед.

237. Диагоналҳои ПР, ки 18 см аст, бо ҳамвории рӯяи паҳлуӣ кунҷи 30^0 ва бо теғаи паҳлуӣ кунҷи 45^0-ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

238. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос $2\sqrt{2}$ см ва 5 см буда, кунҷи 45^0-ро ташкил медиҳанд. Диагонали хурди параллелепипед 7 см аст. Ҳаҷми онро ёбед.

239. Дар параллелепипеди рост тарафҳои асос ба 13 см ва 37 см, диагонали калони асос ба 40 см баробар аст. Теғаи паҳлуӣ ба диагонали калони параллелепипед ҳамчун 15:17 нисбат дорад. Ҳаҷми ин параллелепипедро ёбед.

240. Асоси параллелепипеди моил параллелограмми $ABCD$, ки $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм ва $BD = 6$ дм аст, мебошад. Масоҳати буриши диагоналии AA_1C_1C 1 $м^2$ буда, ба ҳамвории асос перпендикуляр аст. Ҳаҷми параллелепипедро ҳисоб кунед.

241. Рӯяҳои параллелепипед ромбҳои тарафашон a ва кунҷи тезашон 60^0-аи ба ҳам баробар мебошанд. Ҳаҷми ин параллелепипеди моилро ёбед.

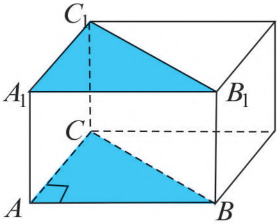
Масъалаҳо барои такрор

242. Масоҳати сатҳи паҳлуии конус 11 ва дарозии ташкилдиҳандааш $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ аст. Масоҳати асоси конусро ёбед.

243. Кунҷҳои асоси трапетсия 90^0 ва 45^0 мебошанд. Яке аз асосҳо аз дигарӣ ду маротиба калон буда ба 24 см баробар аст. Тарафи паҳлуии хурди трапетсияро ёбед.

29. ҲАҶМИ ПРИЗМА

Дар аввал фарз мекунем, ки призмаи додашуда призмаи рост буда, асосаш секунҷаи росткунҷа мебошад. Нишон медиҳем, ки *ҳаҷми чунин призма ба ҳосили зарби масоҳати* *асос бар баландӣ баробар аст.* Призмаи $ABCA_1B_1C_1$-ро, ки дар он $\angle A = 90^0$ аст, то параллелепипеди росткунҷа ҳосил кардан пурра мекунем (расми 68). Мувофиқи хулосаи 1-и банди 28 ҳаҷми параллелепипеди ҳосилшуда ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст, яъне ба $2S_{ABC} \cdot H$, ки дар ин ҷо S_{ABC} масоҳати секунҷаи ABC ва H баландии призма мебошанд. Ҳамвории C_1CB параллелепипедро ба ду призмаи рост ҷудо мекунад, ки яке аз онҳо призмаи додашуда аст. Ин призмаҳо ба ҳамдигар баробаранд, чунки асосҳо ва баландии баробар доранд. Пас, ҳаҷми призмаи додашуда ба нисфи ҳаҷми параллелепипед баробар аст. Ҳамин тариқ,



Расми 68

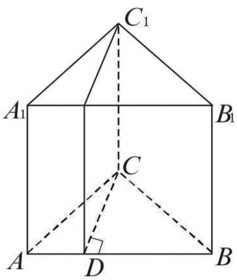
$$V = \frac{1}{2}(2S_{ABC} \cdot H) = S_{ABC} \cdot H$$, ки исботаш зарур буд.

Акнун натиҷаи ҳосилшударо умумӣ менамоем.

Теоремаи 22. *Ҳаҷми призмаи рост ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландиаш баробар аст.*

Исбот. Теоремаро аввал барои призмаи секунҷаи рост исбот менамоем. Баъд дурустии онро барои призмаи рости дилхоҳ нишон медиҳем.

Бигзор $ABCA_1B_1C_1$ призмаи секунҷаи рости ҳаҷмаш V ва баландиаш H мебошад (расми 69). Дар ΔABC чунин баландиеро мегузаронем, ки он секунҷаро ба ду секунҷа ҷудо менамояд (порчаи CD дар расми 69) (Дар ҳар гуна секунҷа чунин баландӣ ҳаст). Ҳамвории CC_1D призмаи додашударо ба ду призмаи секунҷаи асосҳояшон секунҷаҳои росткунҷаи ACD ва DBC ҷудо менамояд. Пас, мувофиқи натиҷаи пеш аз тасвияи шарти теорема омада,



Расми 69

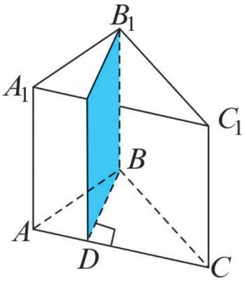
ҳаҷмҳои онҳо V_1 ва V_2 мувофиқан ба $S_{ACD} \cdot H$ ва $S_{DBC} \cdot H$ баробаранд. Мувофиқи хосияти аддитивии ҳаҷм

$$V = V_1 + V_2 = S_{ACD} \cdot H + S_{DBC} \cdot H = (S_{ACD} + S_{DBC}) \cdot H = S_{ABC} \cdot H.$$

Дурустии теорема барои призмаи рости дилхоҳ аз он бармеояд, ки ҳар гуна призмаи ростро ба якчанд призмаи рости секунҷа ҷудо кардан мумкин аст.

Эзоҳ. Тасдиқи теорема на ин ки барои призмаи рост, балки барои ҳар гуна призма дуруст аст. Яъне, *ҳаҷми ҳар гуна призма* (аз он ҷумла, призмаи моил) *ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландиаш баробар аст*.

Масъалаи 1. Дар призмаи рости $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 2\sqrt{5}$ см, $BC = 4\sqrt{5}$ см, $AA_1 = 10$ см ва $\angle ABC = 90^0$ аст. Ҳамвории аз рӯйи теғаи BB_1 гузаранда ба рӯяи ACC_1A_1 перпендикуляр аст (расми 70). Ҳаҷми худи призма ва ҳаҷми призмаҳои $ABDA_1B_1D_1$ ва $BDCB_1D_1C_1$ -ро меёбем.



Расми 70

Ҳал. Дар аввал ҳаҷми худи призмаро меёбем:

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 10 = 200 \text{ см}^3.$$

Барои ёфтани ҳаҷми призмаи $ABDA_1B_1D_1$ масоҳати асоси он – масоҳати секунҷаи ADB-ро меёбем. Мувофиқи теоремаи Пифагор аз секунҷаи росткунҷаи

$ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 20 + 80 = 100$ ё AC=10 см. Азбаски BD баландии ΔABC аст, аз рӯйи вобастагии Уқлидус $AB^2 = AD \cdot AC$. Яъне, $(2\sqrt{5})^2 = AD \cdot 10$. Аз ин ҷой $AD=2$ см, $DC=AC-AD=10-2=8$ см. Боз мувофиқи вобастагии Уқлидус дорем:

$BD^2 = AD \cdot DC$, $BD^2 = 2 \cdot 8 = 16$, $BD=4$ см.

$$V_{ABDA_1B_1D_1} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} AD \cdot BD \cdot AA_1 = \quad = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 = 40 \text{ см}^3.$$

Мувофиқи хосияти аддитивии ҳаҷм ҳосил мекунем:

$$V_{BDCB_1D_1C_1} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{ABDA_1B_1D_1} = 200 - 40 = 160 \text{ см}^3.$$

Масъалаи 2. Асоси призмаи моил ромбест, ки диагоналҳояш 5 см ва 6 см мебошанд. Баландии ин призма 10 см аст. Ҳаҷмашро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи эзоҳ ҳаҷми призмаи мазкур ба ҳосили зарби масоҳати ромб бар баландӣ баробар аст. Масоҳати ромб бошад, нисфи ҳосили зарби диагоналҳояш аст, яъне $S = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$ см^2. Пас, $V = S \cdot H = 15 \cdot 10 = 150$ см^3.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Тасдиқ доир ба ҳаҷми призмаи рости асосаш секунҷаи росткунҷа хулосаи кадом теорема аст?

2. Чаро ақаллан яке аз баландиҳо секунҷаро ба ду секунҷа ҷудо мекунад, яъне тарафи муқобилро мебурад?

3. Теоремаи 22-ро баён намоед.

4. Дар мисоли призмаи панҷкунҷа сохтанҳоеро, ки барои исботи теорема лозиманд, гузаронед.

5. Дар исботи теоремаи 22 кадом хосияти ҳаҷм истифода мешавад ва чанд маротиба?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

244. Ҳаҷми призмаи рости $ABCA_1B_1C_1$-ро ёбед, агар $AB = 5$ см, $AC = 3$ см, CB=7 см ва масоҳати калонтарини рӯяи паҳлуӣ 35 см^2 бошад.

245. Тарафҳои асоси призмаи секунҷаи мунтазам ба a баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ба суммаи масоҳати асосҳо баробар мебошад. Ҳаҷми призмаро ёбед.

246. Диагонали призмаи чоркунҷаи мунтазам 3,5 м буда, диагонали рӯяи паҳлуӣ 2,5 м аст. Ҳаҷми призмаро ҳисоб кунед.

247. Ҳаҷми призмаи n- кунҷаи мунтазамро, ки ҳар як теғаи он a аст ҳисоб кунед, агар: а) n=3; б) n=4; в) n=6 бошад.

248. Қубури чуянӣ буриши квадратӣ дорад. Бари берунаи он 2,5 см, ғафсии деворчаҳо 3 см аст. Қубури дарозиаш 1 м чӣ қадар вазн дорад? (Вазни хос 7,3).

249. Баландии призмаи рости секунҷа 5 м, ҳаҷмаш 24 $м^3$ аст. Масоҳати рӯяҳои паҳлуии он ҳамчун 17:17:16 нисбат доранд. Тарафҳои асосро ёбед.

250. Масоҳати асоси призмаи рости секунҷа 4 $см^2$ буда, масоҳати рӯяҳои паҳлуиаш 9 $см^2$, 10 $см^2$ ва 17 $см^2$ мебошад. Ҳаҷмашро муайян кунед.

251. Хоктеппаи роҳи оҳан шакли трапетсияро дорад, ки асоси поёниаш 14 м, асоси болоиаш 8 м ва баландиаш 3,2 м аст. Ба як километр хоктеппа чанд метри кубӣ хок рост меояд?

252. Дар призмаи секунҷаи моил тарафҳои асос 5 м, 6 м ва 9 м-анд. Теғаи паҳлуӣ 10 м буда, бо ҳамвории асос кунҷи 45^0-ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми призма ёфта шавад.

253. Теғаҳои паҳлуии призмаи секунҷаи моил ба 15 м баробаранд. Масофаи байни онҳо 26 м, 25 м ва 17 м аст. Ҳаҷми призмаро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

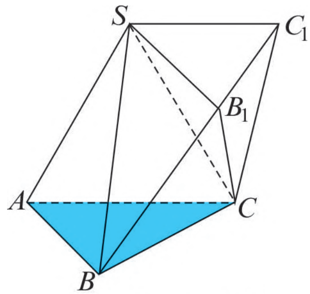
254. Дар призмаи секунҷаи рост тарафҳои асос 3 м, 4 м ва 5 м буда, баландӣ 6 м аст. Масоҳати сатҳи пурраи призмаро ёбед.

255. Асосҳои трапетсияи баробарпаҳлу 6 см ва 10 см мебошанд. Диагоналаш 10 см аст. Масоҳати трапетсияро ёбед.

30. ҲАҶМИ ПИРАМИДА

Теоремаи 23. *Ҳаҷми пирамида ба ҳосили зарби масоҳати асос бар сеяки баландӣ баробар аст.*

Исбот. Теоремаро аввал барои пирамидаи секунҷа исбот мекунем. Бигзор $SABC$ пирамидаи секунҷа аст. Онро бо ҳамон асос ва ҳамон баландӣ, ки пирамида дорад, то призмаи секунҷа ҳосил кардан пурра менамоем (расми 71). Призмаи ҳосилшуда аз се пирамидаи секунҷа иборат аст: пирамидаҳои $SABC$, SCC_1B_1 ва $SBCB_1$. Зоҳиран фаҳмост, ки $\Delta CC_1B_1 = \Delta CBB_1$.



Расми 71

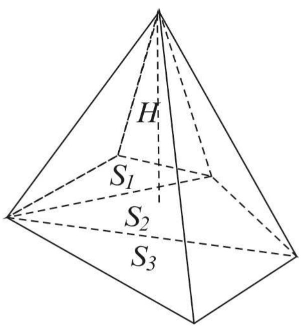
Яъне, масоҳати асосҳои пирамидаҳои дуюму сеюм якхелаанд. Инчунин баландиашон, ки аз қуллаи S фуроварда шудааст, умумӣ мебошад. Пас, ин ду пирамида ҳаҷми якхела доранд (ниг. ба банди 27).

Асосҳои пирамидаҳои якум ва сеюм (секунҷаҳои SAB ва BB_1S) низ бо ҳам баробаранд, баландии онҳо, ки аз қуллаи C мегузарад, умумӣ аст. Барои ҳамин онҳо низ ҳаҷми баробар доранд. Ҳамин тариқ, ҳар се пирамида дорои ҳаҷми баробаранд ва ҳосили ҷамъи ҳаҷмҳои онҳо ба ҳаҷми призмаи секунҷа баробар аст. Пас, агар баландии призмаро бо H ишорат кунем, он гоҳ

$$3V_{SABC} = V_{ABCSB_1C_1} = S_{ABC} \cdot H \text{ ё}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H .$$

Хулоса, дурустии теорема барои пирамидаи секунҷа нишон дода шудааст.



Расми 72

Акнун исботи теоремаро барои пирамидаи дилхоҳ меорем. Асоси ин пирамидаро ба секунҷаҳо ҷудо мекунем (дар расми 72 ин ҷудокунӣ барои пирамидаи панҷкунҷа нишон дода шудааст). Пирамидаҳои секунҷа, ки асосҳояшон ин секунҷаҳо ва қуллаашон қуллаи пирамидаи додашуда мебошанд, дар ҳамҷоягӣ пирамидаи додашударо ташкил медиҳанд. Аз рӯйи принсипи аддитивии ҳаҷм ҳаҷми пирамида ба ҳосили ҷамъи пирамидаҳои онро таш-килдиҳанда баробар аст. Ин пирамидаҳо дорои баландии умумии H, ки баландии пирамидаи додашуда аст, мебошанд. Мувофиқан, агар бо $S_1, S_2, \cdots, S_n$ масоҳати асосҳои пирамидаҳои секунҷаро ишорат кунем, он гоҳ

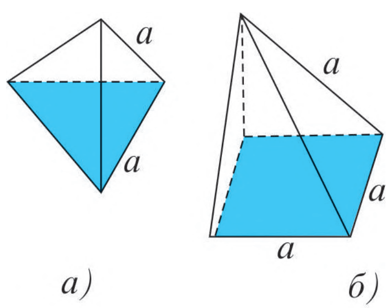
$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) = \frac{1}{3}SH .$$

Инак, ҳаҷми призма ба $\frac{1}{3}SH$ ё ба сеяки ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Ҳаҷми пирамидаи квадратиро, ки баландиаш 9 см ва теғаи асосаш 8 см аст, меёбем.

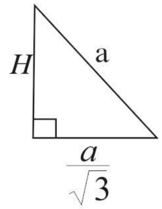
Ҳал. Асоси пирамида квадрат буда, масоҳаташ $8^2 = 64$ см^2 аст. Пас, мувофиқи теоремаи 23 ҳаҷми пирамида $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 9 = 64 \cdot 3 = 192$ см^3 мебошад.

Масъалаи 2. Ҳаҷми тетраэдри мутлақо мунтазам ва пирамидаи мунтазами чоркунҷаро, ки теға-ашон ба *a* баробар аст, меёбем.



Расми 73

Ҳал. 1) Масоҳати асоси тетра-эдри мутлақо мунтазам (расми 73, а) ба $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ баробар аст. Баландиашро меёбем. Баландӣ аз маркази асос мегузарад, ки он маркази давраи берункашида буда, аз қуллаи асос дар масофаи $\frac{a}{\sqrt{3}}$ ҷойгир аст. Пас, дар асоси теоремаи Пифагор (расми 74)



Расми 74

$H^2 = a^2 - (\frac{a}{\sqrt{3}})^2 = \frac{2}{3}a^2$, яъне $H = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$. Барои ҳамин ҳаҷми чунин тетраэдр

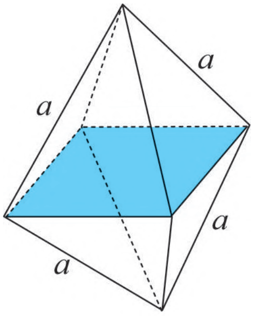
$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

2) Мулоҳизаҳои дар қисми 1) бударо барои пирамидаи мунтазами чоркунҷа такрор карда меёбем, ки $S = a^2$,

$$H^2 = a^2 - (\frac{a}{\sqrt{2}})^2 = \frac{a^2}{2}, \; H = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3}S \cdot H = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2a^3}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\ a^3}}{6}.$$

Масъалаи 3. Ҳаҷми октаэдро, ки теғааш 9 см аст, меёбем.



Расми 75

Ҳал. Октаэдр дар натиҷаи аз рӯйи асос болои ҳамдигар гузоштани ду пирамидаи мунтазами чоркунҷаи ҳамаи теғаҳояш ба ҳамдигар баробар ҳосил мешавад (расми 75). Пас, агар теғаи октаэдр ба a баробар бошад, он гоҳ мувофиқи хосияти аддитивии ҳаҷм ва натиҷаи масъалаи 2 ҳаҷми октаэдр ба $V = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{6} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ баробар аст. Бо назардошти $a=9$ см ҳосил мекунем $V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 9^3 = 243\sqrt{2}$ см^3.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Исботи теорема доир ба ҳаҷми пирамида ба баробарбузургии чӣ гуна пирамидаҳо асос карда шудааст?

2. Аввал теоремаро барои пирамидаи секунҷа, баъд барои пирамидаи дилхоҳ исбот кунед.

3. Ҳаҷми тетраэдри мутлақо мунтазам, пирамидаи квадратии мунтазам ва октаэдр ба воситаи теғаашон чӣ тавр ифода карда мешавад?

4. Раванди ҳосил кардани формулаи ҳаҷми октаэдр ба чӣ асос карда шудааст?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

256. Ҳаҷми пирамидаи квадратиро ёбед, агар баландии он 7 см ва теғаи асосаш 6 см бошад.

257. Аз рӯйи тарафи асос a ва теғаи паҳлуии b ҳаҷми пирамидаҳои мунтазами секунҷа ва шашкунҷаро ёбед.

258. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам баландӣ 3 м, теғаи паҳлуӣ 5 м аст. Ҳаҷмашро ёбед.

259. Баландии пирамидаи секунҷаи мунтазам H буда, теғаи паҳлуӣ бо ҳамвории асос кунҷи 60^0-ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми пирамидаро ҳисоб кунед.

260. Теғаи тетраэдри мутлақо мунтазам a аст. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва ҳаҷми онро ёбед.

261. Масоҳати сатҳи пурраи тетраэдри мутлақо мунтазам ба S баробар аст. Ҳаҷмашро ёбед.

262. Яке аз иншооти азимҷуссаи дунёи қадим – пирамидаи Хеопс дар Миср шакли пирамидаи чоркунҷаи мунтазамро дорад, ки баландиаш 150 м ва теғаи паҳлуиаш 220 м аст. Ҳаҷми пирамидаи Хеопсро ёбед.

263. Асоси пирамида росткунҷаи тарафҳояш 9 м ва 12 м буда, ҳар як теғаи паҳлуиаш ба 12,5 м баробар аст. Ҳаҷми пирамидаро ёбед.

264*. Асоси пирамида секунҷаи тарафҳояш 39 см, 17 см ва 28 см аст. Ҳар як теғаи паҳлуӣ ба 22,9 см баробар аст. Ҳаҷми ин пирамидаро ёбед.

265. Яке аз теғаҳои пирамидаи секунҷа 4 см ва ҳар як теғаи дигараш 3 см аст. Ҳаҷми пирамидаро ёбед.

266. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубест, ки теғааш 2 см мебошад. Ҳаҷми пирамидаи ACB_1D_1 -ро ёбед.

267. Теғаҳои пирамидаи асосаш чоркунҷаи $ABCD$ ба 13 см баробаранд. Маълум, ки $\angle BAD = 90^0$, $AB = 2\sqrt{21}$ см, $AD = 4$ см ва $BC = 6$ см мебошад. Ҳаҷми ин пирамидаро ёбед.

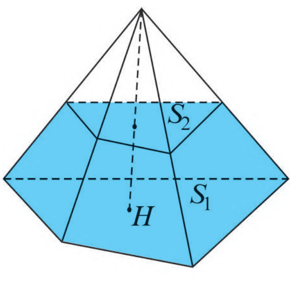
Масъалаҳо барои такрор

268. Масоҳати сатҳи паҳлуии пирамидаи Хеопсро ёбед (ниг. ба масъалаи 262).

269. Масоҳати доираи дарункашидаи шашкунҷаи мунтазами дарозии тарафаш 4 см бударо ҳисоб кунед.

31. ҲАҶМИ ПИРАМИДАИ САРБУРИДА

Теоремаи 24. *Ҳаҷми пирамидаи сарбурида ба сеяки зарби баландӣ бар ҳосили ҷамъи масоҳати асосҳо ва миёнаи геометрии онҳо баробар аст.*



Расми 76

Исбот. Бигзор пирамидаи сарбурида дода шудааст (расми 76). S_1 ва S_2 ($S_1>S_2$) масоҳати асосҳо, H баландии ин пирамидаанд. Нишон медиҳем, ки ҳаҷми чунин пирамида бо формулаи

$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$$

ҳисоб карда мешавад. Пирамидаи сарбуридаро то ҳосил кардани пирамида пурра менамоем. Бигзор L баландии ин пирамида аст. Ҳаҷми пирамидаи матлуб ба фарқи ҳаҷмҳои ду пирамида баробар аст: яке бо асоси масоҳаташ S_1 ва баландиаш L, дигарӣ бо асоси масоҳаташ S_2 ва баландиаш L-H. Ин пирамидаҳо бо ҳам монанданд (ниг. ба мавзӯи 12). Дар пирамидаҳои монанд нисбати масоҳати асосҳо ба квадрати нисбати баландиҳо баробар аст, бинобар ин $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{L}{L-H}\right)^2$. Яъне, $\frac{L}{L-H}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$, $L\sqrt{S_2}=L\sqrt{S_1}-H\sqrt{S_1}$. Аз ин ҷо: $L=\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}$. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида мувофиқи нишондоди дар боло қайдшуда чунин аст:

$$V=\frac{1}{3}\left[S_1\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}-S_2\left(\frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}-H\right)\right]=$$

$$=\frac{H}{3}\cdot\frac{S_1\sqrt{S_1}-S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}=\frac{H}{3}\cdot\frac{\left(S_1\sqrt{S_1}-S_2\sqrt{S_2}\right)\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)}{\left(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}\right)\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)}=$$

$$=\frac{H}{3}\cdot\frac{S_1^2+\sqrt{S_1S_2}\,(S_1-S_2)-S_2^2}{S_1-S_2}=\frac{H}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right).$$

Формулаи заруриро ҳосил кардем. Бо ҳамин теорема исбот шуд.

Масъала. Асосҳои пирамидаи сарбурида квадратҳои тарафашон 8 см ва 5 см мебошанд. Баландии ин пирамида 6 см аст. Ҳаҷмашро меёбем.

Ҳал. Аз сабаби квадрат будани асосҳо $S_1=8^2=64$ см^2, $S_2=5^2=25$ см^2 аст. Мувофиқи формулаи ҳаҷми пирамидаи сарбурида дорем:

$$V=\frac{H}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)=\frac{6}{3}\cdot\left(64+\sqrt{64\cdot 25}+25\right)=$$

$$=2(89+8\cdot 5)=2(89+40)=2\cdot 129=258\text{см}^3.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чаро ҳангоми пурра намудани пирамидаи сарбурида ду пирамидаи монанд ҳосил мешавад?

2. Кадом хосияти пирамидаҳои монанд дар исботи теорема истифода карда шудааст?

3. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида ба кадом формула ифода карда мешавад?

4. Оё аз формулаи ҳаҷми пирамидаи сарбурида формулаи ҳаҷми пирамидаи дилхоҳ бармеояд?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

270. Чоҳ шакли пирамидаи сарбуридаи квадратиро дошта, чуқуриаш 1,5 м, тарафи асоси квадрати поёнаш 0,8 м ва болояш 1,2 м аст. Вай чанд литр обро ғунҷонида метавонад?

271. Теғаи паҳлуии пирамидаи сарбуридаи чоркунҷаи мунтазам 3 м, тарафҳои асосҳо 5 м ва 1 м-анд. Ҳаҷми пирамидаро ёбед.

272. Масоҳати асосҳои пирамидаи сарбурида ба 245 $м^2$ ва 80 $м^2$, баландии пирамидаи пурракардашуда 35 м аст. Ҳаҷми пирамидаи сарбуридаро ёбед.

273. Баландии пирамидаи сарбурида 15 м ва ҳаҷми он 475 $м^3$ аст. Масоҳати асосҳо ҳамчун 4:9 нисбат доранд. Ин масоҳатҳоро ёбед.

274. Ҳаҷми пирамидаи сарбуридаи чоркунҷаи мунтазам ба 430 $м^3$, баландиаш ба 10 м ва тарафи яке аз асосҳояш 8 м аст. Тарафи асоси дигарашро ёбед.

275. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида 76 $м^3$, баландиаш 6 м ва масоҳати яке аз асосҳо 18 $м^2$ аст. Масоҳати асоси дигарро ёбед.

276. Дар пирамидаи сарбурида фарқи масоҳатҳои асосҳо 6 $см^2$, баландӣ 9 см ва ҳаҷм 42 $см^3$ аст. Масоҳати асосҳоро ёбед.

277. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида ба 1720 $м^3$, баландиаш 20 м ва тарафҳои мувофиқи ду асосаш ҳамчун 5:8 нисбат доранд. Масоҳати асосҳоро ёбед.

278. Дар пирамидаи сарбуридаи секунҷа, ки баландиаш 10 м аст, тарафҳои яке аз асосҳо ба 27 м, 29 м ва 52 м баробаранд. Периметри асоси дигар 72 м аст. Ҳаҷми пирамидаи сарбурида ёфта шавад.

Масъалаҳо барои такрор

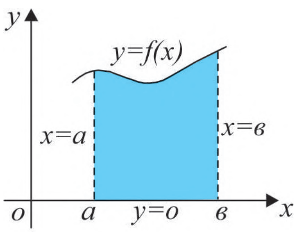
279. Барои кадом қимати α векторҳои $\vec{a}(2;\ 3;\ 4)$ ва $\vec{b}(\alpha;\ -6;\ 8)$ параллеланд?

280. Дарозии ҳар як теғаи призмаи секунҷаи рост $2\sqrt{3}$ м аст. Ҳаҷми призмаро ёбед.

§5. ҲАҶМИ ҶИСМҲОИ ЧАРХЗАНӢ

32. ҲАҶМИ СИЛИНДРИ РОСТ

Ҳангоми омӯхтани татбиқи интеграл дар курси алгебра барои синфи 11 махсус қайд карда будем, ки яке аз муҳимтарин соҳаи татбиқи он ин ҳисоби ҳаҷми ҷисмҳои геометрӣ аст. Дар ҳамон ҷо мо ин татбиқро наоварда, таъкид карда будем, ки он дар курси геометрия муфассал омӯхта мешавад. Акнун ин татбиқро дар мисоли ҳисоби ҳаҷми ҷисмҳои чархзанӣ дида мебароем.

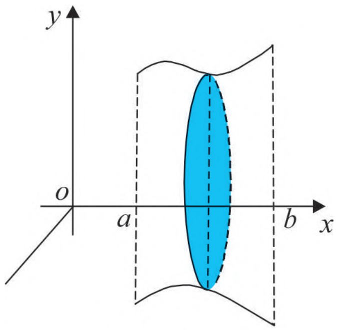


Расми 77

1. Ҳаҷми ҷисме, ки дар натиҷаи чархзании трапетсияи каҷхатта ҳосил мешавад. Бигзор дар порчаи $[a;b]$ функсияи ғайриманфии $y = f(x)$ дода шудааст.

Таъриф. Фигурае, ки бо графики функсия, тири абсисса ва хатҳои рости $x=a$, $x=b$ маҳдуд аст, *трапетсияи каҷхатта* ном дорад (расми 77).

Ҳангоми дар атрофи тири абсисса чарх занондани трапетсияи каҷхатта фигураеро ҳосил мекунем, ки вай *фигураи чархзанӣ* ном дорад. Буриши ҳамвории ба тири *ох* перпендикуляр буда, бо ин фигураи чархзанӣ доира ё нуқта аст (расми 78). Бо $S(x)$ масоҳати ин доираро, ки марказаш дар нуқтаи x ҷойгир буда, радиусаш ба $f(x)$ баробар аст, ишорат мекунем. Фаҳмост, ки $S(x) = \pi \ f^2(x)$ мебошад. Агар ҳаҷми ҳосилшударо бо V ишорат кунем, он гоҳ аз таърифи интеграл истифода карда, нишон додан мумкин аст, ки

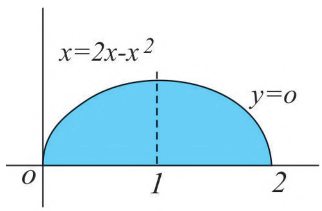


Расми 78

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (1)$$

Ин формуларо априорӣ (беисбот) қабул карда, аз рӯйи он ҳаҷми ҷисмҳои чархзаниро меёбем.

Масъалаи 1. Трапетсияи каҷхатта бо муодилаҳои $y = 2x - x^2$ ва $y = 0$ дода шудааст. Ҳаҷми ҷисмеро, ки дар натиҷаи чархзании ин трапетсия ҳосил мешавад, меёбем.



Расми 79

Ҳал. Трапетсияи каҷхаттаро схемавӣ тасвир мекунем (расми 79). Мувофиқи формулаи (1) дорем:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \left[4\int_0^2 x^2 dx - 4\int_0^2 x^3 dx + \int_0^2 x^4 dx \right] = \pi \left[4 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 4 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 + \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 \right] =$$

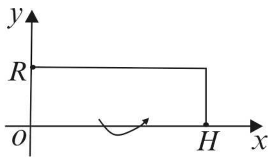
$$= \pi \left[\frac{32}{3} - 2^4 + \frac{2^5}{5} \right] = \pi \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) = \pi \cdot \frac{160 - 240 + 96}{15} = \frac{16\pi}{15}$$

воҳиди кубӣ.

II. Ҳаҷми силиндри рост. Тавре қайд карда будем, силиндри ростро аёнӣ ҳамчун ҷисме, ки дар натиҷаи чарх задани росткунҷа дар атрофи яке аз тарафҳои худ ҳосил мешавад, тасаввур кардан мумкин аст (ниг. ба мавзӯи 15).

Ба ин такя карда, аз рӯйи формулаи (1) ҳаҷми чунин силиндрро меёбем.

Бигзор силиндри рости радиуси асосаш R ва баландиаш H дода шудааст. Ин гуна силиндрро дар натиҷаи росткунҷаи тарафҳояш R ва H бударо дар атрофи тарафи H чарх занондан ҳосил кардан мумкин аст (расми 80) (инчунин ниг. ба расми 38-и мавзӯи 15). Агар тири абсиссаро аз рӯйи тарафи H-и росткунҷа равон кунем, он гоҳ муодилаи тарафи муқобил $y=R$ мешавад. Яъне, дар ин ҳолат нақши трапетсияи каҷхаттаро росткунҷае, ки муодилаи тарафҳояш $y=0$, $y=f(x)=R$, $x=0$, $x=H$ аст, иҷро мекунад. Барои ҳамин мувофиқи формулаи (1) ҳаҷми силиндри рост чунин мешавад:



Расми 80

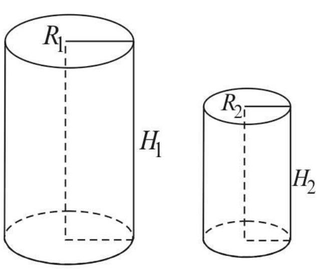
$$V = \pi \int_0^H f^2(x)dx = \pi \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 H = S \cdot H \ .$$

Дар формулаи охирин $S = \pi R^2$ масоҳати асоси силиндр, ки доираи радиусаш R аст, мебошад. Ҳамин тариқ, дурустии ҷумлаи зерин нишон дода шудааст.

Теоремаи 25. *Ҳаҷми силиндри рост ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.*

Эзоҳи 1. Теоремаи 25 барои силиндри моил ҳам дуруст аст. Исботи онро намеорем.

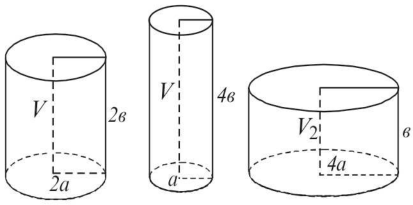
Эзоҳи 2. Нисбати ҳаҷмҳои ду силиндри рости монанд (расми 81) ба куби нисбати радиусҳояшон ё ба куби нисбати баландиҳояшон баробар аст, яъне



Расми 81

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2 .$$

Масъалаи 2. Фирмаи хӯрокистеҳсолкунанда дар қатори қуттии мавҷуда боз истеҳсоли ду қуттии навро пешниҳод кард, ки ҳар сеи онҳо силиндршакланд. Радиуси қуттии якум аз радиуси қуттии мавҷуда ду маротиба хурд, баландиаш ду маротиба зиёд аст. Мувофиқан, радиуси қуттии дуюм бошад, нисбат ба қуттии мавҷуда ду маротиба зиёд ва баландиаш ду маротиба кам аст. Нархи ҳар се қуттӣ якхелааст. Хариди кадом қуттӣ беҳтар (фоидаовар) аст?



Расми 82

Ҳал. Аз рӯйи додашудаҳои масъала ҳаҷми қуттиҳоро меёбем (расми 82):

$$V = \pi(2a)^2 \cdot 2b = 8\pi a^2 b,$$

$$V_1 = \pi a^2 \cdot 4b = 4\pi a^2 b,$$

$$V_2 = \pi(4a)^2 \cdot b = 16\pi a^2 b,$$

Мебинем, ки ҳаҷми қуттии дуюм аз ҳаҷми қуттии мавҷуда ду ва аз ҳаҷми қуттии якум 4 маротиба зиёд аст. Пас, харидани қутии сеюм муфид мебошад.

Масъалаи 3. Ҳосили ҷамъи ҳаҷми ду силиндри рости монанд 140 см^3 аст. Масоҳати сатҳҳои паҳлуии онҳо ҳамчун 4:9 нисбат доранд. Ҳаҷми ҳар як силиндрро меёбем.

Ҳал. Бигзор V_1 ва V_2, S_1 ва S_2, R_1 ва R_2 мувофиқан ҳаҷм, масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва радиуси силиндрҳо бошанд. Мувофиқи хосияти монандии силиндрҳо (ниг. ба мавзӯи 17) дорем:

$\frac{4}{9} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$, яъне $\frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$. Акнун аз рӯйи эзоҳи 2 ҳосил мекунем:

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}.$$

Аз ин ҷо $V_1=\frac{8}{27}V_2$.

Аз тарафи дигар, $V_1+V_2=140$ ё $\frac{8}{27}V_2+V_2=140$, $\frac{35}{27}V_2=140$, $V_2=\frac{140\cdot 27}{35}=4\cdot 27=108$, $V_1=140–V_2=140–108=32$.

Ҷавоб: 32 см³ ва 108 см³.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна фигураро трапетсияи каҷхатта меноманд?
2. Ҳаҷми фигурае, ки дар натиҷаи дар гирди тири абсисса чарх задани трапетсияи каҷхатта ҳосил мешавад, бо кадом формула ёфта мешавад?
3. Ҳаҷми силиндри рост ба чӣ баробар аст? Ҳаҷми силиндри моил чӣ?
4. Оид ба нисбати ҳаҷмҳои ду силиндри рости монанд чӣ гуфтан мумкин аст?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

281. Ҳаҷми ҷисмеро, ки дар натиҷаи чархзании трапетсияи каҷхаттаи сарҳадаш бо муодилаҳои: а) $y=x^2$, $x=1$, $y=0$; б) $y=x^3$, $x=2$, $y=0$; в) $y=1\text{-}x^3$, $x=2$, $y=0$ додашуда, дар атрофи тири абсисса ҳосил мешавад, ҳисоб кунед.

282. Радиус ва баландии силиндр дода шудааст: а) $R=7$ см, $H=5$ см; б) $R=3$ м, $H=4$ м. Ҳаҷми силиндрро ёбед.

283. Баландии силиндр ба дучандаи радиусаш баробар аст. Хаҷми силиндр 128π см³ аст. Баландӣ ва масоҳати сатҳи паҳлуии силиндрро ёбед.

284. Диагонали росткунҷа бо яке аз тарафҳои он кунҷи α-ро ташкил медиҳад. Нисбати ҳаҷмҳои силиндрҳоеро, ки онҳо ҳангоми дар гирди тарафҳои ҳамсоя чарх задани росткунҷа ҳосил мешаванд, ёбед.

285*. Зарфи шишагии обдор, ки шакли силиндрро дорад, уфуқӣ хобонда шудааст. Агар радиуси асос 6 см, баландии зарф 10 см ва баландии об аз замин 3 см бошад, он гоҳ ҳаҷми оби дар зарф бударо ёбед.

286. 25 метр сими мисӣ дорои массаи 100,7 г аст. Диаметри симро ёбед (зичии мис 8,94 г/см^3 мебошад).

287. Қубури қурғошимӣ (зичии қурғошим 11,4 г/см^3 аст), ки ғафсии деворчааш 4 мм мебошад, дорои диаметри дохилии 13 мм аст. 25 м чунин қубур чӣ қадар масса дорад?

Масъалаҳо барои такрор

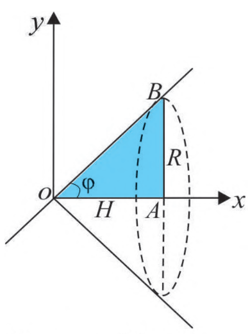
288. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}(-1;\ 2;\ -2)$ ва $\vec{b}(6;\ 3;\ -6)$-ро ёбед.

289. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам теғаи паҳлуӣ ба $6\sqrt{2}$ см ва кунҷи байни ин теға ва ҳамвории асос ба 45^0 баробаранд. Ҳаҷми ин пирамидаро ҳисоб кунед.

290. Нисбати ҳаҷмҳои тетраэдри мутлақо мунтазам ва пирамидаи чоркунҷаи мунтазамро, ки теғаашон a аст, ёбед.

33. ҲАҶМИ КОНУСИ РОСТ

Теоремаи 26. *Ҳаҷми конуси рост ба сеяки ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст.*



Расми 83

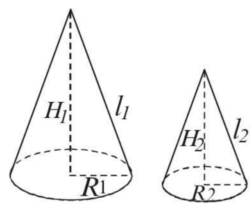
Исбот. Тавре дар мавзӯи 18 қайд кардем, конуси рост ҷисми геометриест, ки ҳангоми дар атрофи катет чарх занондани секунҷаи росткунҷа ҳосил мешавад. Бигзор конус ҳангоми дар атрофи хатти рости OA чарх задани секунҷаи росткунҷаи OAB $(\angle A=90^0)$ ҳосил шудааст (расми 83). Дар ҳамвории OAB системаи росткунҷаи координатиро, ки ибтидояш нуқтаи O ва тири абсиссааш аз рӯйи хатти ОА равон карда шудааст, дохил мекунем. Муодилаи хатти рости OB

$y=kx$ мебошад, ки $k = tg\varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{R}{H}$ аст. Яъне, муодилаи хатти рости OB $\quad y = \frac{R}{H}x$ аст (Секунҷаи OAB ҳолати хусусии трапетсияи каҷхатта мебошад. Вай бо тири абсисса, графики функсияи $y = \frac{R}{H}x$ ва хатти рости $x=R$ маҳдуд аст). Барои ёфтани ҳаҷми конус формулаи (1)-и банди 32 –ро татбиқ карда, ҳосил мекунем:

$$V = \pi\int_O^H y^2(x)dx = \pi\int_O^H \left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx = \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_O^H x^2 dx = \pi\cdot\left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_O^H =$$

$$= \frac{\pi R^2 H^3}{H^2\cdot 3} = \frac{\pi R^2\cdot H}{3} = \frac{S_{асос}\cdot H}{3}.$$

Теорема исбот шуд.



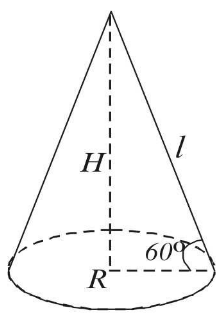
Расми 84

Эзоҳи 1. Теорема барои конуси моил низ дуруст аст. Исботро барои конуси моил намеорем.

Эзоҳи 2. Нисбати ҳаҷмҳои ду конуси рости монанд (расми 84) ба куби нисбати радиусҳояшон ё ба куби нисбати баландиҳояшон, ё ки ба куби нисбати ташкилдиҳандаҳояшон баробар аст:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2.$$

Масъалаи 1. Ташкилдиҳандаи конус 6 см буда, бо ҳамвории асос кунҷи 60^0-ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми ин конусро меёбем.



Расми 85

Ҳал. Нақшаи заруриро сохта, (расми 85) мебинем, ки $\frac{H}{l} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

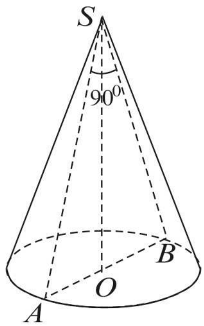
$H = \frac{\sqrt{3}l}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 6}{2} = 3\sqrt{3}$, $\quad \frac{R}{l} = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$,

$R = \frac{l}{2} = \frac{6}{2} = 3$ см. Пас, мувофиқи теорема дорем:

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = 9\sqrt{3}\pi \text{ см}^3.$$

Масъалаи 2. Буриши тирии конус секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлуест, ки масоҳаташ 9 м^2 мебошад. Ҳаҷми конусро меёбем.

Ҳал. Бигзор SAB буриши тирии конус аст (расми 86). SO баландӣ ва $SA=SB$ ташкилдиҳандаҳоянд. Тавре медонем (ниг. ба мавзӯи 19), асоси секунҷаи буриш диаметри асоси конус мебошад. Секунҷаи SOB баробарпаҳлу аст, чунки $\angle BSO=\angle OBS=45^0$. Пас, $H=SO=OB=R$, яъне баландии конус ба радиуси асос баробар аст. Радиуси асосро меёбем. Мувофиқи шарти масъала



Расми 86

$$9м^2 = S_{бур} = \frac{AB \cdot SO}{2} = \frac{2R \cdot R}{2} = R^2, \text{ яъне}$$

$R=3$ м ва $V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi R^3}{3} = \frac{\pi \cdot 3^3}{3} = 9\pi$ м^3.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Ҳаҷми конуси рост ба чӣ баробар аст?
2. Магар теорема барои конуси моил дуруст аст?
3. Формулаи ҳаҷми конуси рост ба баландӣ ва радиуси асос чӣ гуна вобастагӣ дорад?
4. Магар гуфтан мумкин аст, ки хосияти нисбати ҳаҷмҳои ду конуси монанд хулосаи аломати монандии секунҷаҳои росткунҷа аст?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

291. Баландии конус 10 см ва радиуси давраи асосаш 3 см мебошад. Ҳаҷми конусро ёбед.

292. Баландии конус 9 см, ташкилдиҳандааш 15 см аст. Ҳаҷми ин конусро ёбед.

293. Радиуси яке аз ду конусҳои монанд аз радиуси дигарӣ 4 маротиба зиёд аст. Нисбати ҳаҷмҳои ин конусҳоро ёбед.

294. Баландии тӯдаи ғалладона, ки шакли конусро дорад, 2,4 м буда, дарозии давраи асосаш 20 м аст. Ҳаҷми тӯдаи ғаладона чӣ қадар ҳаст, агар массаи 1 $м^3$-и ғалладона 750 кг бошад?

295. Қуми тӯбкардашуда шакли конусеро дорад, ки радиуси асосаш 2 м ва ташкилдиҳандааш 2,5 м аст. Ҳаҷми тӯби қумро ёбед.

296. Дарозии ташкилдиҳандаи конус l, дарозии давраи асосаш C аст. Ҳаҷми конусро ёбед.

297. Баландии конуси рост аз баландии конуси дигар ду маротиба зиёд аст. Радиуси асоси якум ба нисфи радиуси асоси конуси дуюм баробар аст. Нисбати ҳаҷмҳои ин конусҳоро ёбед.

298. Секунҷаи баробартарафи тарафаш a дар гирди тарафи худ чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми ҳосилшударо ҳисоб кунед.

299*. Секунҷаи росткунҷа, ки катетҳояш a ва b-анд, дар атрофи гипотенуза чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми ҳосилшударо ёбед.

300*. Секунҷаи росткунҷаи катеташ a ва кунҷи ба он часпидааш β дар атрофи гипотенуза чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми ҳосилмешударо ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

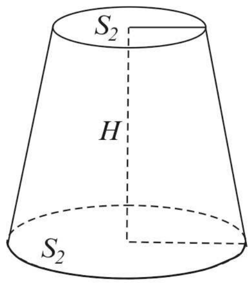
301. Векторҳои $\vec{a}(6;\ 2;\ 1)$ ва $\vec{b}(0;\ -1;\ 2)$ дода шудаанд. Дарозии вектори $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ёфта шавад.

302. Буриши тирии силиндр квадратест, ки диагоналаш ба 4 см баробар аст. Ҳаҷми силиндрро ёбед.

34. ҲАҶМИ КОНУСИ САРБУРИДА

Ду тарзи ҳисоб кардани ҳаҷми конуси сарбуридаро муоина мекунем: ҳисоби ҳаҷм ҳамчун ҷисми чархзанӣ ва ҳисоби ҳаҷм бо истифодаи вобастагиҳои байни ҷисмҳои монанд.

Теоремаи 27. *Ҳаҷми конуси сарбурида ба сеяки ҳосили зарби баландӣ ба суммаи масоҳатҳои асосҳо ва миёнаи геометрии онҳо баробар аст.*



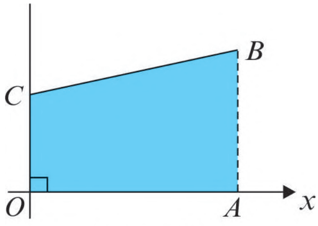
Расми 87

Исбот. Бигзор конуси сарбуридаи баландиаш H, радиусҳои асосҳояш R_1 ва R_2 $(R_1>R_2)$, масоҳати асосҳояш $S_1 = \pi R_1^2$ ва $S_2 = \pi R_2^2$ дода шудааст (расми 87). Нишон медиҳем, ки ҳаҷми он бо формулаи

$$V = \frac{\pi H}{3}\left[S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right]$$

ҳисоб карда мешавад. Тавре қайд кардем, ду тарзи ҳосил кардани ин формуларо меорем.

1). Дар мавзӯи 20 нишон дода будем, ки конуси сарбуридаро ҳамчун ҷисме, ки дар натиҷаи чарх занондани трапетсияи росткунҷа дар гирди тарафи паҳлуиаш, ки ба асосҳо перпендикуляр аст, тасаввур кардан мумкин аст. Агар дар системаи росткунҷаи координатӣ трапетсияи росткунҷаи $OABC$-ро (расми 88), ки қуллаҳояш нуқтаҳои $A\ (H;\ 0)$, $B\ (H;\ R_2)$ ва $C\ (0;\ R_1)$ аст, гирифта, онро дар атрофи тири абсисса чарх занонем, он гоҳ конуси сарбуридаи мазкурро ҳосил мекунем. Муодилаи хатти рости CB-ро ҳамчун муодилаи хатти рости аз болои ду нуқта гузаранда менависем:



Расми 88

$$\frac{y-R_1}{R_2-R_1}=\frac{x-0}{H-0}, \text{ яъне } y=R_1+\frac{x}{H}(R_2-R_1).$$

Мувофиқи формулаи (1)-и мавзӯи 32 ҳаҷми конуси сарбурида чунин мешавад:

$$V=\pi\int_0^H y^2dx=\pi\int_0^H\left[R_1+\frac{x}{H}(R_2-R_1)\right]^2dx=$$

$$=\pi\int_0^H\left[R_1^2+\frac{2x}{H}(R_2-R_1)\cdot R_1+\frac{x^2}{H^2}(R_2-R_1)^2\right]dx=$$

$$=\pi\left[\int_0^H R_1^2dx+\frac{2(R_2-R_1)\cdot R_1}{H}\cdot\int_0^H xdx+\frac{(R_2-R_1)^2}{H^2}\cdot\int_0^H x^2dx\right]=$$

$$=\pi\left[R_1^2x\Big|_0^H+\frac{2(R_2-R_1)\cdot R_1}{H}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^H+\frac{(R_2-R_1)^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H\right]=$$

$$=\pi\left[R_1^2H+(R_2-R_1)\cdot R_1\cdot H+\frac{(R_2-R_1)^2\cdot H}{3}\right]=$$

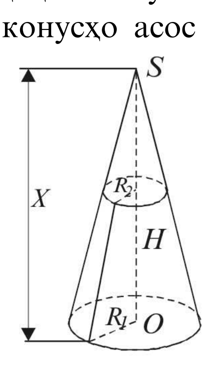
$$=\frac{\pi H}{3}\left[R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right].$$

Агар ба эътибор гирем, ки $S_1=\pi R_1^2$, $S_2=\pi R_2^2$ аст, пас чунин навишта метавонем:

$$V=\frac{H}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2).$$

2). Тарзи дигари ҳосил кардани формулаи ҳаҷми конуси сарбурида ба истифодаи хосияти монандии конусҳо асос карда шудааст (Ин тарз айнан ба тарзи ҳосил кардани ҳаҷми пирамидаи сарбурида монанд аст).

Конуси сарбуридаи додашударо то ҳосил кардани конус пурра менамоем (расми 89). Агар x баландии ин конус бошад, он гоҳ ҳаҷми конуси сарбурида ба фарқи ҳаҷмҳои ду конуси пурра баробар аст: конуси баландиаш x, радиуси асосаш R_1 ва конуси баландиаш x-H, асосаш R_2. Аз монандии конусҳо



Расми 89

бармеояд:

$$\frac{x}{x-H}=\frac{R_1}{R_2} \quad ё \quad x=\frac{HR_1}{R_1-R_2}. \text{ Барои ҳамин}$$

$$V=\frac{1}{3}\left[\pi R_1^2\cdot\frac{HR_1}{R_1-R_2}-\pi R_2^2\left(\frac{HR_1}{R_1-R_2}-H\right)\right]=\frac{1}{3}\pi H\frac{R_1^3-R_2^3}{R_1-R_2}=$$

$$=\frac{\pi H}{3}\cdot\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right)=\frac{H}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right).$$

Формулаи зарурӣ ҳосил шудааст. Теорема пурра исбот шуд.

Масъалаи 1. Чалак (бушка) шакли силиндрӣ дошта, баландиаш 1,9 м ва диаметри асосаш 1 м аст. Диаметрҳои асосҳои сатил 20 см ва 30 см, баландиаш 25 см мебошад. Муайян мекунем, ки дар чалак чанд сатили пурраи об меғунҷад.

Ҳал. Аввал ҳаҷми чалакро меёбем. Агар R_r, H_r, V_r мувофиқан радиус, баландӣ ва ҳаҷми чалак бошанд, он гоҳ мувофиқи формулаи банди 32 ҳосил мекунем:

$$V_r=\pi R_r^2 H_r=\pi(50см)^2\cdot 190см=475000\pi \text{ см}^3.$$

Агар Н, R_1, R_2 баландӣ, радиусҳои асосҳои сатил бошанд, он гоҳ мувофиқи шарти масъала $H=25$ см, $R_1=10$ см, $R_2=15$ см мебошанд. Бинобар ин ҳаҷми сатил (ҳамчун ҳаҷми конуси сарбурида)

$$V_c=\frac{\pi H}{3}\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot 25\cdot\left(10^2+10\cdot 15+15^2\right)=\frac{11875}{3}\pi \text{ см}^3.$$

Ҳамин тариқ,

$$\frac{V_r}{V_c}=\frac{475000\pi\ см^3}{\frac{11875}{3}\pi\ см^3}=120.$$

Ҷавоб: ғунҷоиши чалак ба 120 дона сатили пурраи об баробар аст.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Ҳаҷми конуси сарбурида бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?

2. Ин формуларо бо кадом тарзҳо ҳосил кардан мумкин аст?

3. Кадом тарзи ҳосил кардани формулаи ҳаҷми конуси сарбурида осонтар аст?

4. Формулаи муодилаи хатти рости аз ду нуқта гузарандаро нависед.

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

303. Радиуси асосҳои конуси сарбурида 4 см ва 6 см, баландиаш 6 см аст. Ҳаҷмашро ёбед.

304. Радиусҳои асосҳои конуси сарбурида R ва r буда, ташкилдиҳанда ба асос кунҷи 45^0-ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми конусро ёбед.

305. Ҳаҷми конуси сарбурида 584π см^3 аст. Радиусҳои асосҳояш 10 см ва 7 см мебошанд. Баландии конусро ёбед.

306. Ҳаҷми конуси сарбурида 248π см^3, баландиаш 8 см, радиусҳои яке аз асосҳояш 4 см аст. Радиуси асоси дигарашро ёбед.

307*. Трапетсияи баробарпаҳлуи тарафҳои параллелаш 7 см ва 17 см, ки масоҳаташ 144 см^2 аст, дар атрофи баландии аз миёнаҷойи паҳлуҳо гузаронидашуда чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми ҳосилмешударо ёбед.

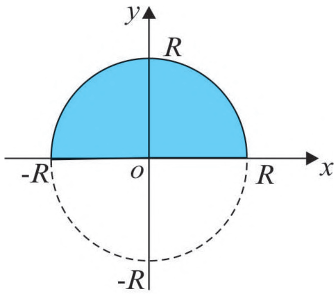
308. Дар конуси сарбурида радиусҳои асосҳо ва ташкилдиҳанда ҳамчун 4:11:25 нисбат доранд. Ҳаҷм ба 181 π м^3 баробар аст. Радиусҳои асосҳо ва ташкилдиҳандаро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

309. Калонтарин диагонали призмаи шашкунҷаи мунтазам ба 4 м баробар буда, бо теғаи паҳлуӣ кунҷи 30^0-ро ташкил медиҳад. Ҳаҷми призмаро ёбед.

310. Дар секунҷаи ABC $BC=3\sqrt{3}$, $AC=15$, $\angle ABC=60^0$ аст. Синуси кунҷи A-ро ёбед.

35. ҲАҶМИ КУРА ВА ҚИСМҲОИ ОН



Расми 90

I. Ҳаҷми кура. Бигзор ҳаҷми кураи радиусаш R-ро ёфтан зарур аст. Агар нимдоираи радиусаш R-ро гирем (расми 90) ва онро дар атрофи диаметраш чарх занонем, он гоҳ кураи мазкурро ҳосил мекунем (ниг. ба мавзӯи 23). Яъне, агар нимдоираро гирему ибтидои системаи декартии координатиро дар марказаш ҷойгир карда, тири абсиссаро аз рӯйи диаметраш равон намоем, он гоҳ кура дар натиҷаи дар атрофи ҳамин тир чарх задани нимдоира ҳосил мешавад (расми 90). Муодилаи нимдоира, ки дар он $y \geq 0$ аст, $x^2 + y^2 = R^2$ мебошад. Яъне, $y^2 = R^2 - x^2$ ё $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Пас, бо истифодаи формулаи (1)-и мавзӯи 32 ҳаҷми кураро ёфтан мумкин аст:

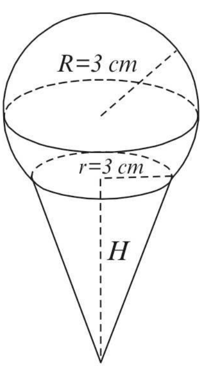
$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2(x)dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} - R^2 \cdot (-R) + \frac{(-R)^3}{3} \right) = \pi \left(2R^2 - \frac{2}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Ҳамин тариқ, дурустии ҷумлаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 28. *Ҳаҷми кураи радиусаш R бо формулаи* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ *ҳисоб карда мешавад.*

Агар ба эътибор гирем, ки диаметри кура $D = 2R$ аст, он гоҳ $V = \frac{1}{6}\pi D^3$ мешавад.



Расми 91

Масъалаи 1. Кафлези (дӯли) яхмоси диаметраш 6 см дар болои зарфи яхмосӣ, ки шакли конусиро дошта, диаметри асосаш 4 см аст, гузошта шудааст. Чанд будани баландии ин конусро муайян мекунем, то ки ҳангоми об шудан яхмоси моеъро ғунҷонида тавонад.

Ҳал. Дар расми 91 кафлези яхмоси (амалан ҳамчун кура) дорои радиуси $R=3$ см ва конуси радиуси асосаш $r=2$ см оварда шудааст. Барои он ки онҳо талаби масъаларо қонеъ намоянд, лозим аст, ки дорои ҳаҷмҳои баробар бошанд, яъне

$$V_{кура}=V_{конус} \quad \text{ё} \quad \frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot H.$$

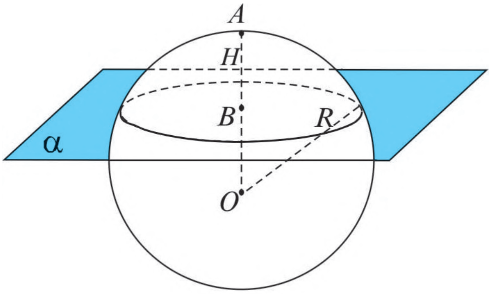
Додашудаҳои масъаларо истифода карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot H.$$

Аз ин ҷо $H=27$ см.

Ҷавоб: барои он ки конус яхмоси обшударо ғунҷонад, зарур аст, ки баландиаш 27 см бошад.

II. Ҳаҷми сегменти куравӣ. Қисми кура, ки бо ягон ҳамвории бурида мешавад, *сегменти куравӣ* ном дорад. Ҳамвории бурандаи α, ки аз нуқтаи B мегузарад (расми 92), кураро ба ду сегменти куравӣ ҷудо мекунад. Порчаи хатти росте, ки ба ҳамвории α перпендикуляр мебошад, *баландии* сегмент ном дорад. Агар радиуси кура R, баландии сегмент H (дар расми 92 $H=AB$) бошад, он гоҳ

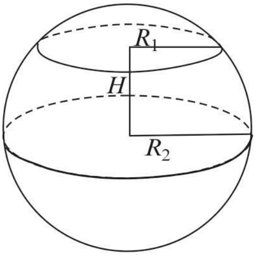


Расми 92

$$V_{сег.кур.}=\pi\int_{R-H}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R}=$$

$$=\pi\left[R^2\left(R-(R-H)\right)-\frac{1}{3}\left(R^3-(R-H)^3\right)\right]=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

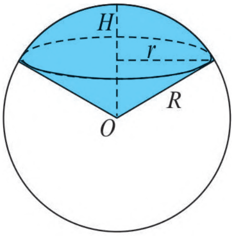
III. Ҳаҷми қабати куравӣ. *Қабати куравӣ* гуфта, қисми кураро меноманд, ки он дар байни ду ҳамвории кураро буранда ҷойгир аст (расми 93). Давраҳое, ки дар буришҳо пайдо мешаванд, *асосҳои* қабати куравӣ, масофаи байни ҳамвориҳо бошад, *баландии* қабати куравӣ ном дорад. Ҳаҷми қабати куравӣ ба фарқи ҳаҷмҳои ду сегменти куравӣ баробар аст. Нишон додан мумкин аст, ки агар R_1 ва R_2 радиуси асосҳо, H баландии қабати куравӣ бошанд, он гоҳ ҳаҷми қабат бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:



Расми 93

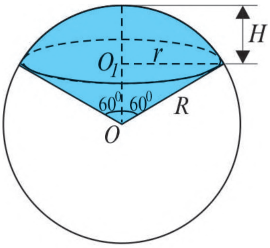
$$V = \frac{\pi H}{6}\left(H^2 + 3R_1^2 + 3R_2^2\right).$$

IV. Ҳаҷми сектори куравӣ (конуси куравӣ). *Сектори куравӣ* ё *конуси куравӣ* ҷисмест, ки аз сегменти куравӣ ва конус ҳосил мешавад: Агар сегменти куравӣ аз нимкура хурд бошад, он гоҳ сегменти куравӣ бо конусе, ки қуллааш дар маркази кура буда, асосаш асоси ҳамин сегмент аст, пурра карда мешавад (расми 94). Дар сурате, ки агар сегмент аз нимкура калон бошад, он гоҳ конуси қайдшуда аз он хориҷ карда мешавад. Ҳаҷми сектори куравӣ бо воситаи ҷамъ ё тарҳ кардани ҳаҷмҳои мувофиқи сегмент ва конус ҳосил мешавад. Агар R радиуси кура ва H баландии сегменти куравӣ бошад, он гоҳ ҳаҷми сектор бо формулаи $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$ ифода меёбад.



Расми 94

Масъалаи 2. Сектори доиравии дорои кунҷи 120^0 ва радиуси R дар атрофи диаметре, ки секторро ба ду қисм ҷудо мекунад, чарх мезанад. Ҳаҷми ҷисми дар натиҷаи чархзанӣ ҳосилшударо меёбем.



Расми 95

Ҳал. Ҷисме, ки дар натиҷаи чунин чархзанӣ ҳосил мешавад, конуси куравӣ мебошад (расми 95). Барои ёфтани ҳаҷми конуси куравӣ зарур аст, ки баландии қишри куравиро донем. Азбаски диаметр кунҷи марказиро ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мекунад, чунин навишта метавонем:

$$H = R - R \cdot \cos 60^0 = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$$

Барои ҳамин ҳаҷми конуси доиравӣ ба

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot H = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi R^3}{3}$ баробар аст.

Ҷавоб: $\frac{\pi R^3}{3}$.

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Ҳаҷми кура бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?
2. Чӣ гуна ҷисмро сегменти куравӣ мегӯянд? Формулаи ҳаҷмашро нависед ва онро шарҳ диҳед.
3. Қабати куравӣ чист? Ҳаҷми ин ҷисм ба фарқи ҳаҷмҳои кадом ҷисмҳо баробар аст?
4. Сектори куравӣ ё конуси куравӣ чӣ гуна ҷисм аст? Ҳаҷмаш бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

311. Ҳаҷми кура чанд маротиба меафзояд, агар радиуси онро 4 маротиба зиёд кунем.

312. Агар ду кураи чӯянии диаметрашон ба 25 см ва ба 35 см баробарро гӯдохта, аз онҳо як кура созем, диаметри ин кура ба чанд баробар мешавад?

313. Кураи қурғошимии диаметраш 3 см бударо рехтан лозим аст. Барои ин чанд дона кураҳои қурғошимии диаметрашон баробари 5 мм буда зарур аст?

314*. Маълум, ки радиусҳои се кура ҳамчун 1:2:3 нисбат доранд. Исбот кунед, ки ҳаҷми кураи калон аз суммаи ҳаҷмҳои кураҳои хурд се маротиба калон аст.

315. Резервуари (зарфи) об аз нимкураи радиусаш 3,5 м ва силиндри радиуси асосаш ба ҳамин адад баробар буда иборат аст. Баландии силиндр чӣ қадар бошад, то ки резервуар 200 $м^3$ обро ғунҷонад?

316. Кураи аз мавод сохташуда диаметри берунааш 18 см, паҳни деворчаҳояш 3 см аст. Ҳаҷми деворчаҳоро ёбед.

317*. Баландии сегменти куравӣ 0,4 ҳиссаи радиуси кураро ташкил медиҳад. Ҳаҷми ин сегмент кадом ҳиссаи ҳаҷми силиндрро, ки ҳамон радиуси асос ва баландиро дорад, ташкил медиҳад?

318. Ҳаҷми сектори куравиро, ки радиуси давраи асоси он 60 см ва радиуси кура 75 см аст, ҳисоб кунед.

319*. Радиуси асосҳои қабати куравӣ ба 3 м ва 4 м баробаранд. Радиуси сатҳи куравии он бошад, 5 м аст. Ҳаҷми қабатро ёбед.

320*. Дар курае, ки радиусаш 65 см аст, ду ҳамвории ба ҳам параллели аз марказ дар масофаҳои 16 см ва 25 см воқеъ буда гузаронида шудаанд. Ҳаҷми қисми кураро, ки дар байни ҳамвориҳо воқеъ аст, ҳисоб кунед.

321. Ҳаҷми кура 12π $см^3$ аст. Ҳаҷми куберо ёбед, ки масоҳати сатҳаш аз масоҳати доираи калони кураи мазкур 6 маротиба зиёд аст.

Масъалаҳо барои такрор

322. Диагонали куб 3 м аст. Масоҳати сатҳи пурраи онро ёбед.

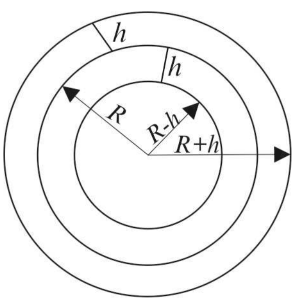
323. Масоҳати секунҷаи баробарпаҳлуи росткунҷаи гипотенузааш 8 см бударо ёбед.

36. МАСОҲАТИ СФЕРА

Аз сабаби он ки сфераро дар ҳамворӣ бурида паҳн кардан номумкин аст, масоҳати сфераро (сатҳи кураро) бо ёрии паҳнкунӣ ёфтан мумкин нест, чуноне ки масоҳати сатҳи паҳлуии силиндру конусро ёфта будем. Бинобар ин барои ёфтани масоҳати ин сатҳ аз таърифи ҷиддии геометрии масоҳати сатҳ истифода мекунем. *Бигзор F сатҳи ҷисми додашуда аст. Ҷисми сатҳаш F_h-ро месозем, ки ҳар як нуқтаи F_h аз ягон нуқтаи F дар масофаи на зиёда аз h ҷойгир аст.* Бигзор V_h ҳаҷми ҷисми сатҳаш F_h буда мебошад.

Таъриф. *Масоҳати сатҳи F* гуфта бузургиеро, ки ҳангоми ниҳоят хурд будани h нисбати $\frac{V_h}{2h}$ ба он наздик аст (яъне, ҳудуди ин нисбатро ҳангоми ба сифр майл кардани h), меноманд.

Ҳамин тариқ, байни масоҳати сатҳ $S^{(h)}_{сатҳ}$ ва ҳаҷм V_h вобастагии $\frac{V_h}{2h} = S^{(h)}_{паҳл} + C \cdot h^k$, ки дар ин ҷо C доимӣ ва $k > 0$ аст, ҷой дорад. Нишон додан мумкин аст, ки масоҳати сатҳҳои паҳлуии призма, пирамида ва ҷисмҳои чархзанӣ – силиндру конусро бо истифодаи баробарии болоӣ ёфтан мумкин аст.



Расми 96

Ҳоло аз ин баробарӣ истифода карда, масоҳати сфераро меёбем. Ба сифати ҷисми сатҳаш F_h буда, ки дар борааш дар таъриф сухан меравад, қабати дар байни ду сфераи консентрикӣ (яке дар дохили дигаре) будаоро, ки радиусҳояшон $R+h$ ва $R-h$ ҳастанд, гирифтан мумкин аст (расми 96). Дар ин ҷо

R радиуси кура мебошад. Ҳаҷми ин ҷисм ба фарқи ҳаҷмҳои кураҳои радиусашон $R+h$ ва $R-h$ баробар аст:

$$V_h = \frac{4\pi}{3}\left[(R+h)^3 - (R-h)^3\right] = \frac{4\pi}{3}\left(6hR^2 + 2h^3\right).$$

Аз ин ҷо

$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3\cdot 2h}\left(6hR^2 + 2h^3\right) = 4\pi\left(R^2 + \frac{h^3}{3}\right) = 4\pi R^2\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right).$$

Ин баробарӣ нишон медиҳад, ки нисбати $\frac{V_h}{2h}$ -ро бо саҳеҳии дилхоҳ ба адади $4\pi R^2$ наздик кунонидан мумкин аст. Инак, *масоҳати сфераи радиусаш R ба* $4\pi R^2$ *баробар аст:* $S = 4\pi R^2$**.**

Эзоҳи 1. формулаи $S = 4\pi R^2$ нишон медиҳад, ки $S = S(R)$ ба ҳосилаи ҳаҷм $V = V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ нисбат ба радиус баробар аст, яъне

$$V' = V'(R) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = \frac{4}{3}\pi\left(R^3\right)' = \frac{4}{3}\pi\cdot 3R^2 = 4\pi R^2 = S(R) = S.$$

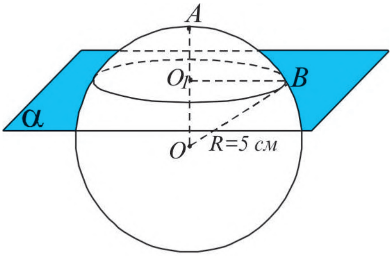
Аз ин ҷо, агар таърифи интегралро ба ёд орем, чунин бармеояд:

$$V = V(R) = \int_0^R S(R)dR.$$

Эзоҳи 2. Масоҳати сегменти сферавӣ (сатҳи сегменти куравӣ) (ниг. ба расми 92) бо формулаи $S = 2\pi RH$; масоҳати қабати сферавӣ (сатҳи қабати куравӣ) (ниг. ба расми 93) бо формулаи $S = 2\pi RH$ (бе масоҳати асосҳои поёнӣ ва болоӣ); масоҳати сектори сферавӣ (сатҳи сектори куравӣ) (ниг. ба расми 94) бо формулаи $S = \pi R(2H + r)$ ҳисоб карда мешавад.

Масъала. Сфераи радиусаш 5 см бо ҳамворие, ки аз маркази сфера дар масофаи 3 см воқеъ аст, бурида мешавад. Масоҳати пурраи сегменти сферавии асоси хурдро меёбем.

Ҳал. Аввал баландии қабати сферавӣ ва радиуси давраи хурдро, ки онро ҳамворӣ ҷудо мекунад, меёбем. Мувофиқи додашудаҳои масъала $OA=OB=R=5$ см, $OO_1=3$ см, ки дар ин ҷо O маркази сфера ва O_1 маркази давраи хурд аст (расми 97). Пас, $H=OA-OO_1=5-3=2$ см. Аз рӯйи теоремаи Пифагор аз секунҷаи OO_1B меёбем:



Расми 97

$r=O_1B=\sqrt{OB^2-OO_1^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ см. Масоҳати пурраи сегменти сферавӣ чунин аст:

$$S=S_{қабат}+S_{доира}=2\pi RH+\pi r^2=2\pi\cdot 5\cdot 2+\pi\cdot 4^2=36\pi \text{ см}^2.$$

Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Таърифи геометрии масоҳати сатҳро баён намоед.
2. Масоҳати сфера бо кадом формула ҳисоб карда мешавад?
3. Байни масоҳати сфера ва ҳаҷми он чӣ гуна алоқамандӣ мавҷуд аст?
4. Масоҳати қисмҳои сфера – сегменти сферавӣ, қабати сферавӣ ва сектори сферавӣ бо кадом формулаҳо ифода мешаванд?

Масъалаҳо барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ

324. Масоҳати сфера 225 π $м^2$ аст. Ҳаҷми кураро, ки сатҳи он ин сфера аст, ёбед.

325. Агар радиуси сфераро 4 маротиба зиёд кунем, масоҳати он чӣ тавр тағйир меёбад?

326. Дар як нимсфера дуто буриш гузаронида шудааст, ки масоҳати онҳо 49 π дм^2 ва 4 π м^2 буда, масофаашон 9 дм аст. Масоҳати тамоми сфераро ёбед.

327*. Баландии қабати сферавӣ 7 см, радиусҳои асосҳояш 16 см ва 33 см аст. Масоҳати сатҳи қабат ёфта шавад.

328. Ҳаҷми кура (бо воҳидҳои кубӣ) ва масоҳати сатҳи он (бо воҳидҳои квадратӣ) ба ҳамдигар баробаранд. Радиуси чунин кураро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

329. Дар конус масоҳати асос $\frac{64}{\pi}$ см^2 ва масоҳати буриши тирӣ 30 см^2 аст. Ҳаҷми конусро ёбед.

330. Нишон диҳед, ки агар α, β, γ кунҷҳои секунҷа ва b тарафи ба кунҷи β муқобили он бошад, он гоҳ масоҳати секунҷа $S = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin\beta}$ аст.

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

Геометрия мисли илмҳои дигари табиӣ дар натиҷаи талаботи амалии одамон пайдо шудааст. Масалан, ҳангоми сохтани олоти меҳнат ва манзил зарурати муайян кардани шакл ва андозаҳои предмет ба амал меояд. Манбаъҳои то замони мо расида гувоҳӣ медиҳанд, ки мисриён ва бобулиён ҳанӯз 4000 сол пеш маълумоти васеи геометрӣ доштанд. Аҳром (пирамидаҳо)-и мисрӣ (қабрҳои фиръавнҳо) бо шаклҳои мунтазами ҳайратангез аз ҳамдигар фарқ мекунанд. Бе донишҳои геометрӣ сохтани чунин пирамидаҳо мумкин набуд. Дар папирусҳои мисриёни қадим (папирус – номи рустанӣ аз ҷинси най. Масолеҳи хатнависӣ, ки мисриён ва дигар халқҳои қадим аз ин рустанӣ тайёр мекарданд), ки ба солҳои 2000–1700 то милод мутааллиқанд, ҳалли чандин масъалаи геометрӣ оварда шудааст.

Баъд аз Миср маркази ғункунӣ, системакунонӣ ва тадқиқоти геометрӣ ба Юнони қадим мекӯчад. Исботи аввалин натиҷаҳои геометрӣ ба Фалес (639–548 то милод) аз Милетск тааллуқ доранд. Чунин теоремаҳо, ба монанди «диаметр доирaро ба ду қисми баробар ҷудо мекунад», «кунҷҳои амудӣ баробаранд», «кунҷҳои назди асоси секунҷаи баробарпаҳлу баробаранд» ба номи ӯ мансубанд. Инчунин, исботи нишонаҳои баробарии секунҷаҳо, исботи теорема дар бораи баробарии порчаҳое, ки хатҳои рости параллел онҳоро дар ду хат ҷудо мекунанд, низ аз ҷониби Фалес амалӣ шудаанд.

Ҳисоб карда мешавад, ки исботи қисми зиёди далелҳои геометрӣ ба Пифагор (564–473 то милод) тааллуқ доранд. Вале теоремаи Пифагор, ки ниҳоят машҳур аст, кайҳо боз пеш аз ӯ ҳам маълум буд. Маълум нест, ки аввалин шуда ин теоремаро кӣ исбот кардааст ва кадоме аз исботҳои мавҷуда ба худи Пифагор мансуб аст.

Баъди дар шакли 13 китоб пайдо шудани «Ибтидо»-и машҳури Уқлидус (Евклид) (365–300 то милод) геометрия ҷиддан ба илм мубаддал гардид (Дар ин бора дар китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10-ум маълумоти заруриро оварда будем).

Бузургтарин математики дунёи қадим Архимед (287–212 то милод) аз Сиракузи Юнон тадкиқоти Уқлидусро назариявӣ асоснок намуда, онро пурра кардааст. Аз байни кашфиёти зиёди Архимед чен кардани дарозии давра ва масоҳати доира, ёфтани ҳаҷми ҷисмҳо, аз он ҷумла ҳаҷми силиндр ва кураро қайд кардан лозим аст. Маҳз ӯ дар дунё аввалин шуда нишон додааст, ки адади 22:7-ро ҳамчун қимати тақрибии нисбати дарозии давра бар диаметр қабул кардан мумкин аст. Архимед ватанпарвари барҷаста буд. Ӯ ҳангоми ҳамлаи мусаллаҳонаи румиҳо дар сангарҳо ҳамроҳи шаҳрвандони қаторӣ ҷангида фавтидааст. Архимед васият карда буд, ки дар санги болои қабраш кураеро, ки он дар *силиндр дарункашида* аст, гузоранд. Исботи он ки ҳаҷми чунин кура ба ҳиссаи ҳаҷми силиндр баробар аст, яке аз натиҷаҳои барҷастаи геометрии Архимед мебошад.

Ҳамаи бисёррӯяҳое, ки мо онҳоро омӯхтем, аз он ҷумла бисёррӯяҳои мутлақо мунтазам, дар Юнони қадим маълум буданд. Китоби 13-уми «Ибтидо» ба ҳамин бисёррӯяҳо бахшида шудааст. Далели мавҷудияти ҳамагӣ 5-то чунин бисёррӯя, ки онро файласуфи Юнони қадим Афлотун (428–348 то милод) тахмин карда буд, ҳайратовар менамуд, чунки дар ҳамворӣ миқдори бисёркунҷаҳои гуногуни мунтазам беохир аст. Танҳо соли 1794 Адриен Лежандри фаронсавӣ (1752-1833) бо истифода аз теоремаи Эйлер, ки мо онро дар ибтидои ин курс овардаем, ҷиддан исбот кард, ки бисёррӯяи мутлақо мунтазами шашум вуҷуд надорад. Яъне, чунин бисёррӯяҳо ҳамагӣ панҷтоянду халос.

Дар асрҳои II ва I-и пеш аз милод якчанд асар, ки ба қоидаҳои ҳисоб дар геометрия бахшида шуда буданд, нашр шуданд. Масалан, дар китоби «Метрика»-и Герон (асри I пеш аз милод) аз Искандария (Александрия) қоидаҳои ҳисоби масоҳатҳо ва ҳаҷмҳо оварда шудааст (Формулаи ҳисоби масоҳати секунҷа аз рӯйи се тараф, ки ҳамчун формулаи Герон машҳур аст, аввалин маротиба дар ҳамин китоб дида мешавад).

Пас аз пош хӯрдани давлатҳои ғуломдории дунёи қадим маркази илмӣ дар асрҳои миёна ба мамолики Шарқ – Осиёи Марказӣ, давлатҳои араб, Ҳиндустон мекӯчад. Дар асрҳои V-XII дар Ҳиндустон геометрияи ҳисобӣ тараққӣ мекунад. Ҳиндуҳо ба масъалаи ҳисоби масоҳати сатҳҳо ва ҳаҷми ҷисмҳо диққати калон медоданд. Натиҷаҳои илмии ҳиндуҳо, чиниҳо ва юнониҳоро арабҳо моҳирона истифода карданд. Тамоми асарҳои Уқлидус, Архимед ва дигар донишмандони Юнони қадим то охири асри IX ба арабӣ тарҷума карда шуда буданд. Ин имконият дод, ки на танҳо донишмандони араб, балки олимоне, ки дар ҳудудҳои фатҳкардаи арабҳо умр ба сар мебурданд, на фақат аз натиҷаҳои илмии қадима воқиф гарданд, балки худ ба масъалаҳои илмие, ки диққати олимони атиқаро ҷалб карда буд, машғул шаванд. (Барои маълумот доир ба саҳми олимони Осиёи Марказӣ дар масъалаи рушди назарияи параллелӣ ва перпендикулярӣ ниг. ба китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10). Чандин олими Шарқ, ба мисли бузургтарин олими табииёти асрҳои XI–XII дар дунё, математики барҷаста ва шоири машҳур Умари Хайём (1048–1131), барҷастатарин риёзидони асри XIII-и ҷаҳон Насируддини Тусӣ (1201-1272) назарияи ғалатии хатҳои рости параллел, назарияи геометрии таносубҳо, методҳои графикии ҳалли муодилаҳои кубиро пешниҳод кардаанд.

Баъди аз забони арабӣ ба лотинӣ тарҷума шудани «Ибтидо» аз асрҳои миёна сар карда дар Аврупо тадқиқоти математикӣ аз нав авҷ мегирад. Региомонтан (1436-1476) дар китоби соли 1461 чопкардааш барои ҳалли масъалаҳои геометрӣ методҳои алгебраро истифода кардааст. Файласуф ва математики фаронсавӣ Рене Декарт (1596-1650) дар «Геометрия»-и худ бори аввал бузургиҳои тағйирёбандаро дар математика дохил кардааст. Дере нагузашта аз рӯйи ин бузургиҳо олими англис Исаак Нютон (1643-1727) ва олими немис Готфрид Лейбнитс (1646-1716) бунёди асосҳои ҳисоби дифференсиалӣ ва интегралиро ба итмом расониданд. Кашфиёти Декарт, Нютон ва Лейбнитс инқилобе дар илми математика буд. Бо ёрии ин кашфиёт ҳалли бисёре аз масъалаҳои геометрӣ бо осонӣ ёфта шуд. Масалан, ҳалли чунин масъалаҳо, ба монанди масъалаи гузаронидани расанда ба хатти каҷи дилхоҳ, масъалаи ҳисоби масоҳати сатҳ ё ҳаҷми ҷисм. Бо истифодаи натиҷаҳои ин кашфиёт ёфтани ҳаҷми ҷисми геометриро мо дар мисоли ёфтани ҳаҷмҳои силиндр, конус ва кура муоина кардем.

Гаспар Монжи фаронсавӣ (1746-1818) ва Леонард Эйлери швейтсарӣ (1707-1783), ки солҳои зиёд дар Русия кор ва эҷод кардаанд, зимни омӯхтани хосиятҳои геометрии фигураҳо тарзи истифода кардани ҳосиларо нишон доданд. Бо ҳамин онҳо ба пайдо шудани шохаи нави математика – геометрияи дифференсиалӣ асос гузоштаанд.

Дар асри XIX аз сабаби зарурати ҳалли масъалаҳои геометрия, физика, механика ҳисоби векторӣ офарида шуд. Асосгузори ин ҳисоб (назарияи векторҳо) Виллям

Гамилтони ирландӣ (1805-1865) ва Ҷозеф Гиббси амрикоӣ (1839-1903) мебошанд.

Дар ҳамин давра тадқиқот доир ба асосноккунии аксиомаҳои Уқлидус, хусусан доир ба аксиомаи 5-умаш дар Русия ва мамолики дигари Аврупо давом доштанд. Дар ин роҳ ба олими бузурги рус Николай Лобачевский (1792-1856), олими маҷор Янош Боляй (1802-1860) ва математики барҷастаи немис Карл Гаусс (1777-1855) муяссар шуд, ки исботнашаванда будани постулати 5-уми Уқлидусро нишон дода, геометрияи ғайриэвклидиро офаранд (Дар ин бора дар китоби дарсии «Геометрия» барои синфи 10 муфассал маълумот оварда шудааст). Ҳамин тариқ, номукаммал будани системаи аксиомаҳои Уқлидус муайян гардид.

Ин буд, ки олимони немис Давид Гилберт (1862-1943), Г. Вейл, олими рус Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987) системаи аксиомаҳои худро пешниҳод карданд, ки онҳо хосиятҳои пуррагӣ, ба ҳам зид набудан ва новобастагиро доранд, яъне мукаммаланд. Ин системаҳо дар зоҳир гуногун намоянд ҳам, ба ҳамдигар баробарқувваанд, яъне як системаи аксиомаҳо хулосаи дигарӣ аст ва баръакс. Нишон дода шудааст, ки аз рӯйи ҳар яке аз ин системаҳо ҷиддан натиҷаҳои математикаро асоснок кардан мумкин аст. Геометрияе, ки мо дар синфҳои 7-11 омӯхтем, ҷиддан ба системаи аксиомаҳои академик А. Н. Колмогоров асос карда шудааст.

ҶАВОБҲО ВА НИШОНДОДҲО БА ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

5. Ҳа. **6.** 1,17 м. **7.** Ҳамворие, ки ба порчаи охирҳояш ин ду нуқта буда перпендикуляр аст ва ин порчаро ба 2 ҳиссаи баробар ҷудо мекунад. **8.** На. **9.** 15 см. **10.** 90 см; 80 см. **12.** 5. Ин призма 6 қулла, 9 теға ва 3 теғаи паҳлуӣ дорад. Вай секунҷа аст. **13.** а) 14 қулла, 9 рӯя, 21 теға; б) 20 қулла, 12 рӯя, 30 теға; в) 2n қулла, n+2 рӯя, 3n теға. **14.** 11-кунҷа. **15.** а) На, чунки муодилаи 2n=13 ҳалли бутун надорад; б) ҳа, 5- кунҷа; в) ҳа, 21-кунҷа. **16.** а) 0; б) 4; в)10; г) $n(n-3)$. **17.** а) 30; б) 15. **18.** 2 м. Миёнаҷойи перпендикулярро бо охирҳои моил пайваст кунед. **19.** Ҳа. **20.** 6м. **21.** На. **22.** 2; 3; призма. **23.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **27.** 30^0. **28.** 13 м. **29.** 2 м. **30.** 4 м. **31.** $\sqrt{2}:1$. **32.** $\frac{\sqrt{3}}{2}d$. **33.** 580 см^2. **34.** 75 см^2. **35.** $32\left(1+2\sqrt{2}\right)$ см^2. **36.** 7,5 см. **37.** 66 м^2. **38.** 5 см. **39.** 120 см^2. **40.** 52 рӯя, 150 теға. **41.** 16 см. **43.** Ҳа. **45.** 188 м^2. **46.** 2 м^2, 3 м^2. **47.** $\sqrt{24}$ см. **48.** 12 см. **49.** $\sqrt{253}$ см ва 13 см. **50.** 3,4 см. **51.** 2a, $\sqrt{2}a$. **52.** 26 см. **53.** 2016 см^2. **54.** 5 см, 12 см, 13 см. **55.** а) 29; б) 13. **56.** $7\sqrt{3}$ м. **57.** а) 90^0; б) 45^0. **58.** $\arccos\frac{1}{3}$. **59.** а) $\sqrt{185}$ см; б) 52 см^2. **60.** 0,02 м^2. **61.** 40 см ва 9 см. **62.** 7 м^2. **63.** 2 м. **65.** 124 см^2. **67.** 94 см^2. **68.** 70 м^2. **69.** 10 м. **70.** 84 м^2. **71.** 40 см. **72.** 3 см. **73.** 12 см. **74.** 5 см ва 6 см. **75.** 3 см. **76.** 9 см. **77.** 5 см. **79.** Пирамидаи секунҷа. **84.** 12 м^2. **85.** 15 см. **86.** 245 см^2. **87.** 11 м. **88.** 35 см. **89.** 39 м ва 51 м. **90.** 16 см^2. **91.** 50 м^2. **92.** 512 см^2. **93.** 24 см. **94.** 1,8 м ва 4 м. **95.** $\sqrt{306}$ см. **96.** $\sqrt{\sqrt{4\boldsymbol{H}^2+\boldsymbol{S}^2}-2\boldsymbol{H}^2}$. **97.** 16 см ва 6 см ё 12 см ва 8 см. **98.** 9 см. **99.** $\frac{a}{16}\sqrt{4b^2-a^2}$. **100.** 48 см ва $512\sqrt{2}$ см². **101.** $108\sqrt{3}$ см². **102.** $S_1=\frac{3\sqrt{3}}{4}H^2$; $S_2=3\sqrt{3}H^2$. **103.** 10; $n(n-3)$. **104.** 6 см. **105.** 2 см ва 10 см. **106.** 36 см². **107.** 54 м². **108.** 168 м². **109.** 20 см². **110.** Масъала ду ҷавоб дорад: $\frac{1}{3}$ ва 3. **112.** $\frac{2}{3}$. **113.** $36\sqrt{10}$ м². **115.** 18 см. **116.** Ин ҳамвориест, ки аз миёнаҷойи теғаҳои призма гузашта, ба ҳамвориҳои асос параллел аст. **117.** Се тири симметрия ва чор ҳамвории симметрия; панҷ тири симметрия ва панҷ ҳамвории симметрия. **118.** Не; ҳа. **119.** Якто тири симметрия, якто ҳамвории симметрия. Агар асосаш ромб бошад, он гоҳ сето тир ва сето ҳамвории симметрия. **120.** Сето тир ва сето ҳамвории симметрия. Агар асосаш квадрат бошад, он гоҳ панҷ тир ва панҷ ҳамвории симметрия. **121.** Нуҳто тири симметрия. **122.** 12 см. **123.** 96 см². **124.** $\arccos\frac{1}{3}$. **127.** Хатҳои аз байни теғаҳои муқобил мегузашта тири симметрияанд. Ҳамвории аз рӯйи теға мегузашта, ки ба теғаи муқобил перпендикуляр аст, ҳамвории симметрия мебошад. Ҳамин тариқ, тетраэдри мутлақо мунтазам дорои се тири симметрия ва шаш ҳамвории симметрия аст. **128.** $2\sqrt{3}d^2$. **129.** $\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$. **130.** $\frac{a^2}{4}$. **131.** $(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-1)$. **132.** 17 см ва 16 см. **133.** 336. **134.** 8 см ва 15 см. **135.** 24 см. **136.** 50π см². **137.** $\sqrt{5\pi}$ м. **138.** 8 см. **139.** 15 см. **140.** 90^0. **141.** 90 см². **142.** 512 м². **143.** 6 см. **144.** 4 см. **145.** R. **146.** $\frac{S}{\pi}$. **147.** πQ. **148.** 1,5

R. **149.** 120π см². **150.** 4π см². **151.** 1,0125π кг. **152.** 1,64π м². **153.** $4Sctg\varphi$. **154.** $\frac{d^2}{8\pi}$. **155.** 6 маротиба. **156.** 3 см. **157.** 62^0, 62^0, 56^0. **158.** 5 м. **159.** $5\sqrt{3}$ м. **160.** 10 см, 5 см, 60^0. **161.** 1416 см². **162.** 3 см. **163.** R^2. **164.** 45^0. **165.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **166.** $\frac{1}{4}\pi R^2$. **167.** 80 см². **168.** $\pi l^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}$. **169.** $\sqrt{\frac{Q}{\pi}\left(l^2-\frac{Q}{\pi}\right)}$. **170.** $\frac{3l}{4}$. **171.** 6 м². **172.** $\sqrt{\frac{2}{15}}$. **173.** 5 м. **174.** 20 см. **175.** $2H$. **176.** 30 см². **177.** 9 м². **178.** 9 дм². **179.** Ба $\frac{1}{2}$ қисм, агар аз асоси калон ҳисоб кунем. **180.** 6 м². **181.** $\frac{1}{6}$. **182.** 80π м². **183.** 24π м². **184.** $\approx 25{,}3$ м². **185.** ≈ 38 дона. **186.** $\approx 17{,}1$ м. **187.** 240π см². **188.** 11 см, 11 см, 8 см. **189.** 126 см². **190.** 13 см. **191.** $2\pi\left(R^2-r^2\right)$. **192.** 100 π см². **193.** 15 м. **194.** 28 см ва 12 см. **195.** 2,55 π кг. **196.** $\approx 1{,}04$ м². **197.** $\frac{SR^2}{R^2-r^2}$. **198.** $2(Q\text{-}q)$. **199.** $\frac{\boldsymbol{SH}}{\pi\ \boldsymbol{l}}$. **200.** $\frac{1}{\pi}\sqrt{S^2-(Q-q)^2}$. **201.** 0,6. **202.** 72 см². **203.** а) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$; б) $(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=3$. **204.** $(\boldsymbol{x}-1)^2+\boldsymbol{y}^2+(\boldsymbol{z}+2)^2=46$; б) $x^2+(y+3)^2+(z+1)^2=30$. **205.** а) На; б) ҳа. **206.** а) $O(1;\,\text{-}2;\,3)$, $R=1$; б) $O(-3;\,1;\,\text{-}4)$, $R=4$. **207.** а) $O(-1;\,0;\,0)$, $R=2$; б) $O(4;\,\text{-}2;\,0)$, $R=\sqrt{20}$. **208.** 18 см². **209.** 6 см. **210.** а) Нуқта; б) давра; в) ҳамворӣ сфераро намебурад. **211.** 16 π м². **212.** $\frac{1}{4}\pi R^2$. **213.** πR. **214.** 785 км. **215.** 12 см. **216.** $\frac{60\sqrt{3}}{7}$π. **217.** 480π см². **218.** 12π см². **219.** 27 см². **220.** 10 см². **221.** 3 см. **222.**

8 см. **223.** $\frac{R}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. **224.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **225.** 1 см. **226.** 8 см. **227.** 80^0. **228.** 120 см^2. **229.** 20 см. **230.** а) 1980; б) 300. **231.** 27 см^2. **232.** 192 см^3. **233.** 30 м. **234.** $1{,}8\frac{г}{см^3}$. **235.** 2 маротиба меафзояд. **236.** 12 см. **237.** $729\sqrt{2}$ см^3. **238.** 60 см^3. **239.** 36 дм^3. **240.** 200 дм^3. **241.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$. **242.** 242. **243.** 12 см. **244.** $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см^3. **245.** $\frac{a^3}{8}$. **246.** 3 м^3. **247.** а) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$; б) a^3; в) $1{,}5\sqrt{3}a^3$. **248.** 192,72 кг. **249.** 3,4 м; 3,4м; 3,2 м. **250.** 12 см^3. **251.** 35200 м^3. **252.** 100 м^3. **253.** 3060 м^3. **254.** 84 м^2. **255.** 48 м^2. **256.** 84 см^3. **257.** $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$ ва $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3\left(b^2-a^2\right)}$. **258.** 32 м^3. **259.** $\frac{\sqrt{3}H^3}{12}$. **260.** $S_{пахл}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **261.** $\frac{S}{36}\sqrt{2S\sqrt{3}}$. **262.** $2{,}59\cdot 10^6$ м^3. **263.** 360 м^3. **264.** 420 см^3. **Нишондод:** асоси баландии пирамида маркази давраи берункашида асоси пирамида аст. **265.** $\sqrt{11}$ см^3. **266.** $\frac{8}{3}$ см^3. **267.** $16\left(\sqrt{21}+6\right)$ см^3. **268.** ≈86480 м^2. **269.** 12π см^2. **270.** 1520 л. **271.** $10\frac{1}{3}$ м^3. **272.** 2325 м^3. **273.** 20 м^2 ва 45 м^2. **274.** 5 м. **275.** 8 м^2. **276.** 2 см^2 ва 8 см^2. **277.** 128 м^2 ва 50 м^2. **278.** 1900 м^3. **279.** Барои α=-4. **280.** 18 м^3. **281.** а) $\frac{\pi}{5}$; б) $\frac{128\pi}{7}$; в) $\frac{163\pi}{14}$. **282.** а) 245π см^3; б) 36π м^3. **283.** 8 см ва 64π см^2. **284.** $ctg\alpha$. **285.** $\left(120\pi-90\sqrt{3}\right)$ см^3. **286.** $\approx 0{,}76$

мм. **287.** ≈ 61 кг. **288.** $\arccos\frac{4}{9}$. **289.** 144 см³. **290.** $\frac{1}{2}$. **291.** 30π см³. **292.** 432π см³. **293.** 64. **294.** ≈ 19т. **295.** 2π см³. **296.** $\frac{C^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - C^2}$. **297.** 2. **298.** $\frac{\pi a^3}{4}$**.** **299.** $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.

Нишондод: ҷисми дар натиҷаи чархзанӣ ҳосилшаванда аз ду конусҳои асоси умумидошта иборат аст, ки катетҳо ташкилдиҳандаҳои онҳо мебошанд. Радиуси асоси умумӣ ба яке аз катетҳо баробар аст. **300.** $\frac{\pi a^3}{3}\cdot\sin\beta tg\beta$ **.** **301.** 13. **302.** $4\sqrt{2}\pi$ см³. **303.** 152π см³. **304.** $\frac{1}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$**.** **305.** 8 см. **306.** 7 см. **307.** 457π см³. **308.** 2 м; 5,5 м; 12,5 м. **309.** 9 м³. **310.** 0,3. **311.** 64 маротиба. **312.** 39 см. **313.** 216 дона. **315.** $\approx 2{,}9$ м. **316.** ≈ 2148 см³. **317.** $2\frac{23}{26}$**.** **318.** 40,5π дм³ ё 112,5π дм³ **319.** $12\frac{2}{3}\pi$ м³ ё $144\frac{2}{3}\pi$ м³. **320.** 34182π см³ ≈ 107 дм³. **321.** $9\pi\sqrt{\pi}$ см³. **322.** 18 м². **323.** 16 см². **324.** 562,5 π м³. **325.** 16 маротиба меафзояд. **326.** 26π м². **327.** 910π см². **328.** 3. **329.** 80 см³.

МУНДАРИЧА

БОЙМУРОД АЛИЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

(давоми стереометрия)

Китоби дарсӣ барои синфи 11-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

Муҳаррир: *Маҳмадсалим Абдукаримов*
Мусаҳҳеҳон: *Марҳабо Алиева, Фаридуни Умарбек*
Саҳифабанд ва дизайн: *Эргаш Қодиров*

Ба чоп 05.08. 2020 имзо шуд. Андозаи 60х90 1/16.
Коғази офсети №1. Ҷузъи чопию шартӣ 9. Адади нашр 110 000 нусха. Супориши №03/20

Дар матбааи ҶДММ «Лавҳ», шаҳри Душанбе, кӯчаи Р. Набиев, 1 чоп шудааст.