Боймурод АЛИЕВ

# АЛГЕБРА

**Китоби дарсӣ барои синфи 11-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ**

**Нашри чорум бо тағйирот ва иловаҳо**

**Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон тасдиқ кардааст**

Душанбе
Маориф
2023

**ТДУ (УДК) 512(075)+371.671+379**
**ТКБ (ББК) 22.14Я72+7.4.262**
**А-49**

А.80. **Алиев Б. Алгебра**. Китоби дарсӣ барои синфи 11-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ. –Душанбе: Маориф, 2023. – 256 саҳ.

**Хонандаи азиз!**

Китоб манбаи донишу маърифат аст, аз он баҳравар шавед ва онро тоза нигоҳ доред! Кӯшиш кунед, ки соли таҳсили оянда ҳам ин китоб ҳамин гуна тозаву ороста дастраси хонандагони дигар гардад ва онҳо низ аз он истифода баранд.

**Ҷадвали истифодаи китоб**

| № | Ному насаби хонанда | Синф | Соли таҳсил | Ҳолати китоб (баҳои китобдор) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Аввали сол | Охири сол |
| 1. | | | | | |
| 2. | | | | | |
| 3. | | | | | |
| 4. | | | | | |
| 5. | | | | | |

**ISBN 978-99975-39-17-4**

## МУҚАДДИМА

Мо омӯзиши фанни алгебра ва ибтидои анализро, ки дар синфи 10-ум сар карда будем, давом медиҳем. Мундариҷаи китоб аз доираи барномаи таълими фанни математика (Душанбе: «Душанбе-принт», 2018) васеътар буда, қариб тамоми маводди таълимии мактабҳои тамоюли риёзиро дар бар мегирад. Сохтори китоб бо сохтори китобҳои дарсии синфҳои 7–10-ум, ки дар чанд соли охир чоп шудаанд, якхела аст.

Китоб аз се боб иборат аст. Дар боби 1-ум мафҳумҳои нав **-функсияи ибтидоӣ ва интеграл**, баъзе хосиятҳо ва татбиқи онҳо омӯхта мешавад (Бояд гуфт, ки анализ ба курси математикаи олӣ мансуб аст. Дар муассисаи таҳсилоти умумӣ танҳо элементҳои он омӯхта мешаванд.). Боби 2-юм аз омӯзиши мафҳуми **функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он** сар мешавад. Баъд мафҳуми нав - **логарифм,** ки амали баръакси бадараҷа-бардорӣ аст, оварда мешавад. Хосиятҳои логарифм, тарзҳои ҳал кардани муодилаҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ қисми асосии ин боб мебошанд. Боб бо овардани мафҳум дар бораи **муодилаҳои дифференсиалӣ** ба итмом мерасад.

Ҳалли мисолу масъалаҳои дар ин ду боб овардашуда зарурати истифодаи тамоми паҳлуҳои маводди назариявиро талаб мекунад. Барои ҳамин дар аввал қисми назариявии бандро бодиққат омӯхта, ба саволҳои назоратӣ ҷавоб гардонида, мисолҳои дар он ҳалшударо аз худ карда, сипас ба ҳалли супоришҳо шуруъ кунед.

Дар бандҳо супоришҳо тавре ҷойгир карда шудаанд, ки бо зиёд шудани рақами тартибиашон ҳалли онҳо андаке мураккаб мегардад. Барои ҳамин чанд машқи аввалаи пас аз назария омадаи бандро шифоҳӣ шумурдан мумкин аст. Машқҳои ҳаллашон мураккабтар бо аломати (*) ишорат карда мешаванд. Бо ҳал кардани мисолу масъалаҳои қисми «Машқҳои иловагӣ доир ба боб», ки дар охири ҳар як боб оварда мешаванд, шумо мустақилона худро санҷида метавонед, ки то кадом дараҷа маводди заруриро аз худ кардаед.

Ҷавобҳои машқҳои ҳар як боб дар охираш оварда мешаванд, ки ин вақти шуморо барои санҷидани дурустии ҷавоби ёфташуда сарфа мекунад.

Ҳар як банд бо қисми «Машқҳо барои такрор» ба охир мерасад. Азбаски шумо хатмкунанда ҳастед ва имтиҳони хаттии хатмкунӣ месупоред, мисолу масъалаҳои ин қисм (бо назардошти назарияи то ҳамин замон омӯхташуда) айнан ба он имтиҳон шабоҳат доранд. Дар тартиб додани машқҳои ин қисм вариантҳои корҳои хаттии имтиҳони хатми солҳои 1998–2002 истифода шудаанд. Ин имконият медиҳад, ки шумо тахминан чӣ гуна будани масъалаҳои имтиҳони хатмро дарк кунед. Барои ҳамин хоҳиш карда мешавад, ки машқҳои ин қисмро ҳатман ҳал кунед.

Талаботи Стандарти давлатии маълумоти умумиро ба эътибор гирифта, дар охири бобҳо маълумоти таърихӣ оварда мешавад. Аз онҳо шумо доир ба пайдоиши мафҳумҳо, истилоҳҳо, рамзҳо ва роҷеъ ба бунёдгарони анализи математикӣ тасаввурот ҳосил мекунед.

Боби сеюм, ки «Такрор» ном дорад, аз мисолу масъалаҳое иборат аст, ки онҳо тамоми маводди «Математика» ва «Алгебра»-и мактабии синфҳои V–XI -ро дар бар мегирад. Ин мавод на аз рӯйи омӯзишаш дар ин ё он синф, балки ҳамчун объекти математикӣ ба параграфҳо ҷудо карда шудааст. Масалан, прогрессияҳо, ки аз адад иборатанд, дар қисми ададҳои ҳақиқӣ дар параграфи 1 оварда шудаанд. Тамоми маводди ин боб барои тайёрӣ ба имтиҳони хатм пешбинӣ мешавад. Китобҳои дарсии то ҳол нашршудаи муаллифони тоҷик ва чандин китоби дарсии дигар ҳангоми навиштани ин боб истифода шудаанд.

Нашри навбатии китоб баъди реҳлати муаллифи он, профессор Боймурод Алиев омода шудааст. Дар ин нашр тағйироти зерин ба чашм мерасад:

- матни китоб бо назардошти меъёрҳои нави имлои забони тоҷикӣ ба риштаи таҳрир кашида шудааст;

- хатоҳои математикие, ки дар нашри пешинаи китоб ҷой доштанд, ислоҳ карда шудаанд;

- яке аз талаботи асосии раванди таълим ин фаъол гардонидани хонандагон тавассути саволу ҷавоб ва додани супоришҳо оид ба мавзуи матраҳшаванда мебошад, то ки онҳо баъди омӯзиши ҳар як мавзуъ донишҳои заруриро ба даст оранд. Ба ибораи дигар, хонандагон бояд маводди назариявии ҳар як мавзуъро пеш аз омӯзиши мавзуи нав пурра аз худ кунанд ва дониши назариявии гирифтаашонро дар ҳалли мисолу масъалаҳои амалӣ татбиқ карда тавонанд. Инро ба инобат гирифта, миқдори саволҳо оид ба ҳар як мавзуъ зиёд карда шудааст;

- низоми супоридани имтиҳонҳои қабул ба муассисаҳои таҳсилоти олии касбии кишварро ба назар гирифта, дар охири ҳар як боб мисолу масъалаҳои тестӣ оварда шудаанд. Омӯзгор зимни гузаштани дарсҳо ба таври мувофиқ метавонад аз онҳо истифода барад;

- дар охири китоб як миқдор масъалаҳои ҳаллашон нисбатан мураккаб пешниҳод гардидааст. Ин масъалаҳо барои тайёрӣ ба озмуну олимпиадаҳои сатҳашон гуногун пешбинӣ шудаанд;

- матни баъзе мавзуъҳо аз ҳисоби ворид кардани мисолҳои нав такмил дода шудааст.

Аз хонандагон эҳтиромона хоҳиш карда мешавад, ки фикру мулоҳизаҳояшонро нисбат ба мазмуну мундариҷаи китоб ба Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон ва ё ба суроғаи электронии mahmadsalim_86@mail.ru ирсол намоянд. Андешаҳои муфид зимни омода кардани китоб барои нашрҳои оянда ба инобат гирифта мешаванд.

*Боби I*

# ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ ВА ИНТЕГРАЛ

## § 1. ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

### 1. ТАЪРИФИ ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ

Мо ба омӯзиши амали нави математикӣ – *интегралгирӣ* ва қонунияти он шуруъ мекунем. Ин амал ба амали ҳосилагирӣ, яъне ёфтани ҳосилаи функсия, амали баръакс аст.

Аз мисол сар мекунем. Бигузор ҷисм аз рӯйи қонуни $S(t)=t^2+2t$ ҳаракат кунад. Яъне дар лаҳзаи вақти $t$ ҷисм масофаи бо ин формула ҳисобшавандаро тай мекунад. Суръат ва шитоби ҷисмро меёбем. Тавре медонем, ҳосила аз масофаи тайшуда суръат $\vartheta(t)$ буда, ҳосила аз суръат шитоб $a(t)$-ро медиҳад:

$$\vartheta(t)=s'(t)=(t^2+2t)'=(t^2)'+(2t)'=2t+2\,;$$

$$a(t)=\vartheta'(t)=(2t+2)'=2\,.$$

Айнан мисли ҳамин мисол, агар формулаи Галилей $s=\dfrac{gt^2}{2}$ -ро гирем, ки вай масофаи тайкардаи ҷисмро ҳангоми озод афтидани он ифода менамояд (дар лаҳзаи ибтидоии вақт $t=0$ суръат нул аст, яъне $\vartheta(0)=0$), он гоҳ бо воситаи ҳосилагирӣ суръатро меёбем:

$$\vartheta(t)=s'(t)=gt\,.$$

Ҳосилаи дуюм шитобро медиҳад:

$$a(t)=\vartheta'(t)=g\,.$$

Дар механика ва техника бо масъалаи баръакс вомехӯрем: шитоби нуқта $a(t)$ (ҷисм ҳамчун нуқта қабул карда мешавад) маълум аст, ёфтани қонуни тағйирёбии суръат $\vartheta(t)$ ва координата $s(t)$ талаб карда мешавад. Ба ибораи дигар, аз рӯйи ҳосилаи маълум $\vartheta'(t)$, ки ба $a(t)$ баробар аст, $\vartheta(t)$-ро ва баъд аз рӯйи ҳосилаи $s'(t)$, ки ба $\vartheta(t)$ баробар аст, $s(t)$-ро ёфтан даркор аст.

Ин гуна масъалаҳо бо ёрии амали *интегралгирӣ* ҳал карда мешаванд.

Т а ъ р и ф. **Функсияи $F(x)$ дар фосилаи $(a;b)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ номида мешавад, агар барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбандаи $x$ аз $(a;b)$**

$$F'(x) = f(x)$$

**бошад.** Яъне ҳосилаи $F(x)$ ба $f(x)$ баробар шавад.

Ёфтани функсияи ибтидоии функсияи додашударо **амали интегралгирӣ** меноманд.

Мисолҳои мушаххасро дида мебароем.

М и с о л и 1. Функсияи $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ барои функсияи $f(x)=x$ функсияи ибтидоӣ аст, чунки барои ҳар гуна $x\in(-\infty;\infty)$

$$F'(x)=\left(\frac{x^2}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(x^2\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2x=x=f(x).$$

Бо осонӣ мебинем, ки ҳосилаи $\dfrac{x^2}{2}+5$ низ ба $x$ баробар аст. Пас, ин функсия низ функсияи ибтидоӣ аст. Фаҳмост, ки ба ҷойи 5 адади дилхоҳро гирифтан мумкин аст,чунки ҳосилаи адади доимӣ ба нул баробар мебошад. Ҳамин тариқ, барои функсияи мушаххаси $f(x)=x$ функсияҳои ибтидоӣ бешуморанд.

М и с о л и 2. Барои функсияи $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ дар фосилаи $(0;\infty)$ функсияи $F(x)=2\sqrt{x}$ функсияи ибтидоӣ аст, чунки барои ҳар гуна $x$ аз $(0;\infty)$

$$F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x).$$

Айнан ба монанди мисоли 1, функсияи $F(x)=2\sqrt{x}+C$, ки дар ин ҷо $C$ доимии дилхоҳ аст, барои функсияи $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ дар фосилаи $(0;\infty)$ функсияи ибтидоӣ мебошад.

М и с о л и 3. Функсияи $F(x)=\frac{1}{x-1}$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ барои функсияи $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$ функсияи ибтидоӣ шуда наметавонад, чунки дар нуқтаи $x=1$ баробарии $F'(x)=f(x)$ ҷой надорад. Вале дар ҳар яке аз фосилаҳои $(-\infty;1)$ ва $(1;\infty)$ $F(x)$ барои $f(x)$ функсияи ибтидоӣ мебошад.

М и с о л и 4. Функсияи $F(x)=2\sin(x+1)$ барои функсияи $f(x)=2\cos(x+1)$ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ функсияи ибтидоӣ аст. Воқеан, барои ҳар гуна $x\in(-\infty;+\infty)$

$$F'(x)=\left(2\sin(x+1)\right)'=2\cos(x+1)\cdot(x+1)'=2\cos(x+1)$$

мебошад. Ба монанди мисолҳои 1 ва 2 ин ҷо низ пай мебарем, ки $F(x)$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ барои функсияи $f(x)$ аст.

Э з о ҳ. Бар хилофи мафҳуми ҳосила, ки дар синфи 10-ум аввал дар нуқта, баъд дар фосила муайян карда шуда буд, мафҳуми функсияи ибтидоӣ якбора дар тамоми фосила муайян карда мешавад.

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Ҳангоми дода шудани қонуни ҳаракат, суръат ва шитоби он чӣ тавр ёфта мешаванд?

**2.** Амали интегралгирӣ гуфта, чиро мефаҳманд?

**3.** Чӣ гуна масъалаҳо бо ёрии амали интегралгирӣ ҳал карда мешаванд?

**4.** Функсияи ибтидоӣ чист? Мисолҳо оред.

**5.** Чаро барои функсияи додашуда функсияҳои ибтидоӣ бешуморанд?

**6.** Як функсия тартиб дода, сипас ду функсияи ибтидоии онро нишон диҳед.

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

**1.** Исбот кунед, ки функсияи $F(x)$ дар фосилаи додашуда барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ аст:

а) $F(x)=x^3$, $\quad f(x)=3x^2$, $\quad x\in(-\infty;\infty)$;

б) $F(x)=\frac{1}{6}x^6$, $\quad f(x)=x^5$, $\quad x\in(-\infty;\infty)$;

в) $F(x)=x^{-4}$, $\quad f(x)=-4x^{-5}$, $\quad x\in(0;\infty)$;

г) $F(x)=-\frac{1}{2}x^{-2}$, $\quad f(x)=x^{-3}$, $\quad x\in(0;\infty)$;

д) $F(x)=\sin 3x$, $\quad f(x)=3\cos 3x$ , $\quad x\in(-\infty;\infty)$;

е) $F(x)=1+tg\frac{x}{4}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$, $\quad x\in(-2\pi;2\pi)$;

ж) $F(x)=x^{\frac{4}{3}}-21$, $\quad f(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, $\quad x\in(-\infty;\infty)$;

з) $F(x)=\sin(2x+3)+1$, $f(x)=2\cos(2x+3)$, $x\in(-\infty;\infty)$.

**2.** Оё дар фосилаи додашуда функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ шуда метавонад:

а) $F(x)=2-\cos x$, $\quad f(x)=\sin x$, $\quad x\in(-\infty;\infty)$;

б) $F(x)=12-\dfrac{1}{x}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\quad x\in(-1;1)$;

в) $F(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\quad x\in(0;\infty)$;

г) $F(x)=x^2\sqrt{x}$, $\quad f(x)=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$, $\quad x\in(-\infty;\infty)$;

д) $F(x)=x^{-2}+1$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{2x^3}$, $\quad x\in(0;\infty)$;

е) $F(x)=\sqrt{1-x^2}$, $\quad f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad x\in(-1;1)$?

**3.** Барои функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ яке аз функсияҳои ибтидоиро ёбед:

а) $f(x)=1{,}5$; $\quad$ б) $f(x)=2x$; $\quad$ в) $f(x)=\sin x$;

г) $f(x)=\cos x$; $\quad$ д) $f(x)=-x$; $\quad$ е) $f(x)=-\cos x$;

ж) $f(x)=-3$; $\quad$ з) $f(x)=-\sin x$; $\quad$ и) $f(x)=x^2$;

к) $f(x)=x^5$; $\quad$ л) $f(x)=0$; $\quad$ м) $f(x)=-x^3$.

**4.** Ба ҷойи нуқтаҳо ягон функсияеро гузоред, ки баробариро қаноат кунонад:

а) $(\ldots)'=1{,}5$; $\quad$ б) $(\ldots)'=\cos x$; $\quad$ в) $(\ldots)'=-\dfrac{1}{x^2}$;

г) $(\ldots)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad$ д) $(\ldots)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad$ е) $(\ldots)'=2\sin x$;

ж) $(\ldots)'=\dfrac{1}{\sin^2 x}$; $\quad$ з) $(\ldots)'=\sin 4x$; $\quad$ и) $(\ldots)'=-\cos(2x+3)$.

**5.** Ду функсияи ибтидоии функсияи $f(x)$ –ро ёбед:

а) $f(x)=4x$; б) $f(x)=\sin x+1$;

в) $f(x)=x^3$; г) $f(x)=2-\cos x$.

**6.** Аз се функсияи овардашуда ҳамонашро нишон диҳед, ки дутои дигар мувофиқан ҳосила ва функсияи ибтидоии он аст:

а) $f(x)=2$, $g(x)=2x+3$, $h(x)=x^2+3x+1$;

б) $f(x)=x+1$, $g(x)=1$, $h(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+3$;

в) $f(x)=1-\sin x$, $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+\sin x+2$, $h(x)=x+\cos x$.

### *Машқҳо барои такрор*

**7.** Коэффитсиенти кунҷии расандаро, ки ба графики функсияи $f(x)=2x^4-7x+4$ дар нуқтаи абсиссааш $x=1$ гузаронида шудааст, ёбед.

**8.** Шитоби ҳаракатро ёбед, агар ҷисм ростхатта аз рӯйи қонуни $s(t)=2t^2-t+3$ ҳаракат кунад.

**9.** Муодиларо ҳал кунед:

$$x+\sqrt{7+\sqrt{x^2-6x+9}}=4.$$

**10.** Функсияи $y=x^2(x-3)$ -ро бо ёрии ҳосила тадқиқ карда, графикашро созед.

**11*.** Қимати $tg\alpha$ –ро ёбед, агар $\cos 2\alpha=-\dfrac{5}{13}$ ва $\alpha\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ бошад.

## 2. ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ

Дар ин банд намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи додашуда меёбем.

Тавре дидем, функсияи ибтидоӣ ягона нест. Масалан, функсияҳои $\frac{x^2}{2}+5$ ва $\frac{x^2}{2}-10$, умуман, функсияи $\frac{x^2}{2}+C$ барои ҳар гуна қимати доимии $C$, барои $f(x)=x$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ функсияҳои ибтидоианд. Фаҳмост, ки фарқи ин ду функсияи ибтидоӣ адади доимӣ аст. Нишон медиҳем, ки ин ба ҳар гуна функсияи ибтидоӣ хос аст, яъне як функсияи ибтидоӣ аз дигараш бо қимати доимӣ фарқ мекунад. Аниқаш тасдиқи зерин дуруст аст, ки он *хосияти асосии* функсияи ибтидоиро ифода мекунад.

Т е о р е м а. **Агар функсияи $F(x)$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ барои функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;b)$ бошад, он гоҳ ҳар гуна функсияи ибтидоии функсияи $f(x)$ дар ин фосила намуди**

$$F(x)+C$$

**-ро дорад, ки дар ин ҷо $C$ доимии дилхоҳ аст.**

Пеш аз исботи теорема дурустии леммаи зеринро нишон медиҳем, ки он ҳамчун *нишонаи доимӣ* будани функсия маълум аст.

Л е м м а. **Агар дар фосилаи $(a;b)$ ҳосилаи функсияи $F(x)$ айниятан ба нул баробар бошад, яъне $F'(x)\equiv 0$ барои ҳар гуна $x\in(a;b)$, он гоҳ $F(x)$ дар ин фосила доимӣ аст.**

И с б о т. Нуқтаи ихтиёрии $x_0$-ро аз фосилаи $(a;b)$ интихоб мекунем. Барои ҳар гуна $x$ аз ин фосила, мувофиқи формулаи Лагранҷ, чунин нуқтаи $c$-и ин фосила ёфт мешавад, ки барояш

$$F(x)-F(x_0)=F'(c)(x-x_0).$$

Вале мувофиқи шарт $F'(c)=0$ аст, пас $F(x)=F(x_0)$ барои ҳар гуна $x\in(a;b)$. Яъне қимати функсияи $F(x)$ дар ҳамаи нуқтаҳои фосилаи $(a;b)$ якхела мебошад. Лемма исбот шуд.

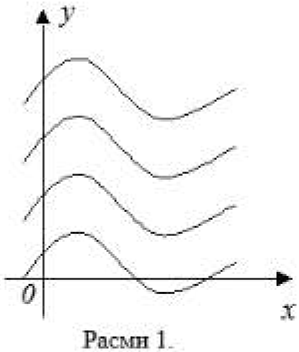
Исботи теорема. Бигузор функсияҳои $\Phi(x)$ ва $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;b)$ функсияҳои ибтидоӣ бошанд, яъне барои ҳар гуна $x\in(a;b)$: $\Phi'(x)=f(x)$ ва $F'(x)=f(x)$. Пас,

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Аз ин ҷо ва аз лемма бармеояд, ки фарқи $\Phi(x)-F(x)$ функсияест, ки дар фосилаи $(a;b)$ доимӣ мебошад. Ин қимати доимиро бо $C$ ишорат карда, ҳосил мекунем:

$$\Phi(x)=F(x)+C, \qquad (1)$$

ки он дурустии тасдиқи теоремаро нишон медиҳад.



Расми 1.

Эзоҳи 1. Маънои геометрии хосияти асосии функсияи ибтидоӣ чунин аст: графикҳои ду функсияи дилхоҳи ибтидоии функсияи $f(x)$ аз ҳамдигар ба воситаи ба самти тири OY параллел кӯчонидан ҳосил мешаванд (расми 1).

Мисоли 1. Зоҳиран фаҳмост, ки функсияҳои $F(x)=x^2$ ва $\Phi(x)=x^2+4$ барои ҳамон як функсия функсияи ибтидоианд. Дар ҳақиқат, $F'(x)=2x$, $\Phi'(x)=(x^2+4)'=(x^2)'+(4)'=2x+0=2x$ ва бинобар ин $\Phi(x)=F(x)+4$. Графики $\Phi(x)$ аз графики параболаи $F(x)$ бо воситаи ба самти тири OY, ба боло, ба 4 воҳид кӯчонидан ҳосил мешавад.

Э з о ҳ и 2. Тасдиқи теорема ду хосияти зерини функсияи ибтидоиро дарбар мегирад:

1. Ҳангоми дар баробарии (1) ба ҷойи $C$ гузоштани ададе дилхоҳ функсияи ибтидой ҳосил мешавад;

2. Ҳангоми дода шудани яке аз функсияҳои ибтидоии $F(x)$, ҳатман чунин адади $C$ - ро ёфтан мумкин аст, ки дигараш бо баробарии (1) ифода мешавад.

М и с о л и 2. Нишон медиҳем, ки фарқи функсияҳои $F(x)=\dfrac{\cos 2x}{2}$ ва $\Phi(x)=\cos^2 x$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ доимӣ аст ва ин доимиро меёбем. Азбаски

$$F'(x)-\Phi'(x)=\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)'-\left(\cos^2 x\right)'=\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2-$$

$$-2\cos x(\cos x)'=-\sin 2x-2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x+2\sin x\cos x=$$

$$=-\sin 2x+\sin 2x=0,$$

пас мувофиқи тасдиқи теорема:

$$\frac{\cos 2x}{2}=\cos^2 x+C; \qquad \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2}=\cos^2 x+C;$$

$$\frac{2\cos^2 x-1}{2}=\cos^2 x+C.$$

Аз ин ҷо:

$$C=-\frac{1}{2}.$$

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Ду функсияи ибтидоӣ аз ҳамдигар бо чӣ фарқ мекунанд?

**2.** Хосияти асосии функсияи ибтидоӣ аз чӣ иборат аст?

**3.** Нишонаи доимӣ будани функсияро баён кунед.

**4.**Маънои геометрии хосияти асосии функсияи ибтидоиро баён кунед.

**5.**Тасдиқи теоремаро, ки он ду хосияти функсияи ибтидоиро дар бар мегирад, оред.

**6.** Графикҳои функсияҳои ибтидоии як функсия аз якдигар чӣ тавр ҳосил мешаванд?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

**12.** Магар функсияҳои зерин барои ҳамон як функсия функсияи ибтидоианд:

а) $F(x)=x^2$, $G(x)=x^2+5$ ва $L(x)=(x+5)^2$;

б) $F(x)=\cos 2x$ ва $\Phi(x)=2\cos^2 x$;

в) $F(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ ва $\Phi(x)=\dfrac{2}{x-1}$?

**13.** Нишон диҳед, ки функсияҳои $F(x)=-\sin^2 x$ ва $\Phi(x)=2\cos^2 x+\sin^2 x$ барои $f(x)=-\sin 2x$ функсияҳои ибтидоӣ буда, $F(x)=\Phi(x)-2$ аст.

**14.** Оё функсияи ибтидоии функсияи даврӣ функсияи ғайридаврӣ шуда метавонад?

**15*.** Исбот кунед, ки функсияи ибтидоии функсияи тоқ функсияи ҷуфт аст.

**16.** Ифодаро сода кунед:

$$\frac{2x}{x+y}:\left[\frac{x-y}{x^2-y^2}+\frac{x+y}{x^2-y^2}\right].$$

**17.** Соҳаи муайянии функсияи $y=\sqrt{(1-x)(5-x)}$ -ро ёбед.

**18.** Дар прогрессияи геометрӣ узви якум ба $312$ ва махраҷи он ба $\frac{1}{2}$ баробар аст. Суммаи чор узви аввалаи ин прогрессияро ёбед.

**19.** Қимати хурдтарини функсияи $y=x^4-2x^2$ -ро дар порчаи $[-2;\ 2]$ ёбед.

**20.** Решаҳои муодилаи квадратии ислоҳшуда ба –2 ва 3 баробаранд. Ин муодиларо тартиб диҳед.

## 3. ЁФТАНИ ФУНКСИЯҲОИ ИБТИДОӢ. ҶАДВАЛИ ОНҲО

Теоремаи дар банди пешина исбот кардаамонро асос карда, намуди умумии функсияҳои ибтидоиро барои якчанд функсияи додашуда меёбем. Баъд ҷадвали функсияҳои ибтидоиро меорем.

**I**

Мисоли 1. Намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи $f(x)=x^2$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ меёбем.

Ҳал. Мебинем, ки яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$ функсияи $\frac{x^3}{3}$ аст, чунки $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}(x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$. Дар асоси теорема намуди умумии функсияҳои ибтидоӣ барои ин функсия чунин аст:

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+C.$$

М и с о л и 2. Барои функсияи $f(x)=-\frac{1}{x^3}$ дар фосилаи $(0;\infty)$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро меёбем, ки қиматаш ҳангоми $x=1$ будан ба 2 баробар аст.

Ҳ а л. Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки функсияи $\frac{1}{2x^2}$ барои $-\frac{1}{x^3}$ дар фосилаи $(0;\infty)$ функсияи ибтидоӣ аст, чунки $\left(\frac{1}{2x^2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-2-1}=-x^{-3}=-\frac{1}{x^3}$. Пас, мувофиқи теорема ҳар гуна функсияи ибтидоӣ намуди $F(x)=\frac{1}{2x^2}+C$-ро дорад. Мувофиқи шарт $F(1)=2$ аст, пас $F(1)=\frac{1}{2\cdot 1^2}+C=2$ ё $C=2-\frac{1}{2}=1,5$. Ҳамин тариқ, функсияи ибтидоии матлуб $F(x)=\frac{1}{2x^2}+1,5$ мебошад.

М и с о л и 3. Маълум аст, ки графики функсияи ибтидоии функсияи $f(x)=-\cos x$ аз нуқтаи $(\frac{\pi}{2};12)$ мегузарад. Ин функсияро меёбем.

Ҳ а л. Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи $-\cos x$, функсияи $F(x)=-\sin x+C$ мебошад. Пас, барои ёфтани доимии $C$ муодилаи $F(\frac{\pi}{2})=12$ ё $-\sin\frac{\pi}{2}+C=12$, ё ки $-1+C=12$-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо: $C=13$ ва

$F(x) = -\sin x + 13$.

М и с о л и 4. Нуқта аз рӯйи хатти рост бо шитоби $a(t) = 4t$ ҳаракат мекунад. Дар лаҳзаи ибтидоии $t_0 = 1$ координатааш $x_0 = 2$ ва суръаташ $\vartheta_0 = 1$ аст. Координатаи нуқта $x(t)$-ро ҳамчун функсияи вақт меёбем.

Ҳ а л. Ин масъала намунаи масъалаи баръакс, ки дар банди 1 қайд карда будем, мебошад. Аз рӯйи $\vartheta'(t) = a(t)$ аввал $\vartheta(t)$-ро, баъд аз рӯйи $x'(t) = \vartheta(t)$ функсияи $x(t)$-ро меёбем.

Функсияи ибтидоӣ барои $a(t) = 4t$ функсияи $\vartheta(t) = 2t^2 + C$ мебошад. Вале $\vartheta_0 = \vartheta(1) = 1$, пас $2 \cdot 1^2 + C = 1$, $C = -1$. Инак, $\vartheta(t) = 2t^2 - 1$. Функсияи ибтидоӣ барои $\vartheta(t)$ бошад, функсияи $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - t + C$ аст. Мувофиқи шарти масъала $x_0 = x(t_0) = x(1) = \frac{2}{3} \cdot 1^3 - 1 + C = 2$. Пас, $-\frac{1}{3} + C = 2$, $C = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ ва $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - t + \frac{7}{3}$.

## II

Акнун ҷадвали функсияҳои ибтидоиро меорем. Дар сатри якум функсияи $f(x)$ ва дар сатри дуюм намуди умумии функсияи ибтидоии он $F(x)$ оварда шудааст:

| $f(x)$ | k (доимӣ) | $x^{\alpha}$, $\alpha \in R$ $(\alpha \neq -1)$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | kx+C | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $2\sqrt{x} + C$ | $-\cos x + C$ | $\sin x + C$ | $tgx + C$ | $-ctgx + C$ |

Дурустии ин ҷадвал бо гирифтани ҳосила нишон дода мешавад. Масалан,

$$(tgx+C)' = (tgx)' + C' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' + 0 = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тавре дар оянда хоҳем дид, истифодаи ин ҷадвал ёфтани функсияи ибтидоиро барои баъзе функсияҳо осон мегардонад.

Э з о ҳ. Функсияи $\frac{1}{\sqrt{x}}$ дар фосилаи $(0;\infty)$, функсияи $\frac{1}{\cos^2 x}$ дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$ ва функсияи $\frac{1}{\sin^2 x}$ дар фосилаи $(\pi k; \pi(k+1))$, $k \in Z$ муайянанд. Функсияҳои ибтидоии онҳо $2\sqrt{x}+C$, $tgx+C$ ва $-ctgx+C$ низ дар ҳамин фосилаҳо муайян ҳисоб карда мешаванд.

### *Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон*

**1.** Чӣ тавр санҷидан мумкин аст, ки функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ аст?

**2.** Оё аз нуқтаи додашуда ду функсияи ибтидоӣ мегузарад?

**3.** Оё соҳаи муайянии функсияи ибтидоӣ аз соҳаи муайянии функсияи додашуда фарқ мекунад?

**4.** Функсияе тартиб диҳед, ки барои ёфтани функсияи ибтидоии он формулаи дуюми дар ҷадвал овардашуда истифода гардад.

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

**21.** Намуди умумии функсияҳои ибтидоиро барои функсияи $f(x)$ ёбед:

а) $f(x)=2$; б) $f(x)=\cos x$; в) $f(x)=x^5$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$; д) $f(x)=-\sin x$; е) $f(x)=-4$.

**22.** Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро ёбед, ки он қимати додашударо дар нуқтаи додашуда қабул кунад:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $F(1)=10$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $F(\dfrac{\pi}{4})=-2$;

в) $f(x)=x^6$, $F(-1)=3$;

г) $f(x)=\sin x$, $F(-\pi)=-3$.

**23.** Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиро ёбед, ки графикаш аз нуктаи $M$ мегузарад:

а) $f(x)=x^3$, $M(2;1)$; б) $f(x)=\sin x$, $M(0;3)$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $M(\dfrac{\pi}{4};0)$; г) $f(x)=-2$, $M(3;5)$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $M(-\dfrac{1}{2};3)$; е) $f(x)=-\cos x$, $M(\dfrac{\pi}{2};0)$.

**24.** Нуқта аз рӯйи хатти рост бо шитоби $a(t)$ ҳаракат мекунад. Дар лаҳзаи ибтидоии $t_0$ координатааш ба $x_0$ ва суръаташ ба $\vartheta_0$ баробар аст. Координатаи $x(t)$-ро чун функсияи вақт ёбед:

а) $a(t)=-t$, $t_0=2$, $x_0=4$, $\vartheta_0=-3$;

б) $a(t) = \cos t$, $t_0 = \pi$, $x_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$.

### *Машқҳо барои такрор*

**25.** Экстремуми функсияи $y = 2 - 2x - x^2$ -ро ёбед.

**26.** Ифодаро сода кунед:

$$\frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha - 30^0)}.$$

**27.** Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - \sqrt{xy} = 2. \end{cases}$$

**28.** Соҳаи муайянии функсияи $y = \sqrt{5 - x - \dfrac{6}{x}}$ -ро ёбед.

## 4. ҚОИДАҲОИ СОДАТАРИНИ ЁФТАНИ ФУНКСИЯҲОИ ИБТИДОӢ

Бо сабаби он ки масъалаи ёфтани функсияи ибтидоӣ нисбат ба масъалаи ёфтани ҳосила баръакс аст, ҳар яке аз ин се қоида ба қоидаҳои мувофиқи ҳосилагирӣ монананд.

**$1^0$. Функсияи ибтидоии суммаи ду функсия.** *Агар $F(x)$ барои $f(x)$ ва $G(x)$ барои $g(x)$ функсияи ибтидоӣ бошад, он гоҳ $F(x) + G(x)$ барои $f(x) + g(x)$ функсияи ибтидоӣ аст.*

Дар ҳақиқат, азбаски $F'(x) = f(x)$ ва $G'(x) = g(x)$ аст, пас

$$\left(F(x) + G(x)\right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

М и с о л и 1. Намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи

$$f(x)=x^2+\cos x$$

меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $\frac{x^3}{3}$ яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи $x^2$, $\sin x$ яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи $\cos x$ аст, пас мувофиқи қоидаи $1^0$ функсияи $\frac{x^3}{3}+\sin x$ яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)=x^2+\cos x$ мебошад.

Ҷ а в о б: $F(x)=\frac{x^3}{3}+\sin x+C$.

М и с о л и 2. Намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи

$$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

меёбем.

Ҳ а л. Ба монанди ҳалли мисоли пешина мулоҳиза ронда, ҷадвали функсияҳои ибтидоиро истифода карда мебинем, ки функсияи $tgx+2\sqrt{x}$ барои $f(x)$ яке аз функсияҳои ибтидоист.

Ҷ а в о б: $F(x)=2\sqrt{x}+tgx+C$.

**$2^0$. Функсияи ибтидоии функсияи ҳосили зарби адад бар функсия.** *Агар $F(x)$ барои $f(x)$ функсияи ибтидоӣ ва $k$ бузургии доимӣ бошад, он гоҳ $kF(x)$ барои $kf(x)$ функсияи ибтидоӣ аст.*

Дар ҳақиқат, азбаски зарбшавандаро аз зери аломати ҳосила баровардан мумкин аст, пас

$$\left(kF(x)\right)'=k\left(F(x)\right)'=kf(x).$$

Ин баробарӣ дурустии қоидаро нишон медиҳад.

М и с о л и 3. Барои функсияи $f(x)=7\sin x$ функсияи ибтидоиро меёбем.

Ҳ а л. Барои $\sin x$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ $-\cos x$ аст. Пас, мувофиқи ин қоида $-7\cos x$ яке аз функсияҳои ибтидоист.

Ҷ а в о б: $F(x)=-7\cos x+C$.

М и с о л и 4. Функсияи ибтидоиро барои функсияи $f(x)=5\cos x+2x^4$ меёбем.

Ҳ а л. Аввал қоидаи $2^0$, баъд аз он қоидаи $1^0$-ро татбиқ карда, мувофиқи ҷадвали функсияҳои ибтидоӣ ҳосил мекунем:

$$F(x)=5\sin x+\frac{2}{5}x^5+C.$$

М и с о л и 5. Қуввае, ки ба ҷисми массааш $m$ таъсир мекунад, аз рӯйи қонуни синусоида тағйир меёбад: $F=A\sin t$, ки $A>0$ аст. Дар зери таъсири ин қувва ҷисм ростхатта ҳаракат мекунад. Маълум аст, ки ҳангоми $t=0$ будан, суръати ҷисм $\vartheta_0$ аст. Ба чанд баробар будани суръатро дар лаҳзаи дилхоҳи $t$ муайян мекунем.

Ҳ а л. Аз рӯйи қувва шитобро мувофиқи қонуни Нютон меёбем: $a=\frac{F}{m}=\frac{A}{m}\sin t$. Суръат функсияи ибтидоии шитоб аст, барои ҳамин $\vartheta(t)=-\frac{A}{m}\cos t+C$, ки дар ин ҷо $C$ доимии дилхоҳ аст. Мувофиқи шарт $\vartheta_0=\vartheta(0)=-\frac{A}{m}+C$, пас $C=\vartheta_0+\frac{A}{m}$. Ҳамин тариқ, $\vartheta(t)=\vartheta_0+\frac{A}{m}-\frac{A}{m}\cos t$.

**$3^0$. Функсияи ибтидоии функсияи $f(kx+b)$.** *Агар $F(x)$ функсияи ибтидоии $f(x)$, $k$ ва $b$ доимиҳо $(k \neq 0)$ бошанд, он гоҳ $\frac{1}{k}F(kx+b)$ функсияи ибтидоии функсияи $f(kx+b)$ мебошад.*

Дар ҳақиқат, мувофиқи шарти $F'(kx+b) = f(kx+b)$ ва қоидаи ҳосилагирии функсияи мураккаб дорем:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\left(F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' =$$

$$= \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b).$$

Мисоли 6. Барои функсияи $f(x) = \cos(7x-9)$ яке аз функсияҳои ибтидоиро меёбем.

Ҳал. Барои $\cos x$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ $\sin x$ аст. Бинобар ин аз рӯйи қоидаи $3^0$ $F(x) = \frac{1}{7}\sin(7x-9)$ функсияи ибтидоии матлуб аст.

Мисоли 7. Барои функсияҳои: а) $f(x) = (3x+5)^7$ ва б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{10x-7}}$ функсияҳои ибтидоиро меёбем.

Ҳал. а) Барои функсияи $x^7$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ $\dfrac{x^8}{8}$ аст. Пас, мувофиқи қоидаи $3^0$ функсияи $\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{(3x+5)^8}{8}\right) = \dfrac{1}{24}(3x+5)^8$ барои $(3x+5)^7$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ мебошад. Ҳамин тариқ, $F(x) = \dfrac{1}{24}(3x+5)^8 + C$.

б) Барои функсияи $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ $2\sqrt{x}$

аст. Пас, аз рӯйи қоидаи $3^0$ функсияи $\frac{1}{10}\cdot 2\sqrt{10x-7}=\frac{1}{5}\sqrt{10x-7}$ барои $\frac{1}{\sqrt{10x-7}}$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ мебошад. Инак,

$$F(x)=\frac{1}{5}\sqrt{10x-7}+C.$$

### *Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон*

**1.** Қоидаи якуми ёфтани функсияҳои ибтидоиро баён карда, онро бо мисолҳои мушаххас шарҳ диҳед.

**2.** Қоидаи дуюми ёфтани функсияҳои ибтидоиро баён кунед ва онро бо мисолҳои мушаххас тавзеҳ диҳед.

**3.** Қоидаи сеюми ёфтани функсияҳои ибтидоиро баён кунед ва онро бо мисолҳои мушаххас фаҳмонед.

**4.** Ин қоидаҳо ба кадом қоидаҳои ҳосилагирӣ монанданд?

### *Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ*

Намуди умумии функсияҳои ибтидоии $f(x)$ - ро ёбед (29-31):

**29.** а) $f(x)=4x+x^2-\frac{1}{x^2}$; б) $f(x)=x-\frac{4}{x^4}+\sin x$;

в) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x$; г) $f(x)=\frac{1}{x^2}-4\sin x$.

**30.** а) $f(x)=(3x-1)^6$; б) $f(x)=(2-5x)^3$;

в) $f(x)=\sin(9x+1)$; г) $f(x)=\cos(4x-9)$.

**31*.** а) $f(x)=\frac{4}{(2-7x)^3}$; б) $f(x)=\frac{2}{(4-3x)^4}$;

в) $f(x)=\frac{3}{\cos^2(4x-1)}$; г) $f(x)=-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\sin^2(3x+1)}$.

**32.** Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуктаи $M$ мегузарад:

а) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^3}$, $M(-2;1)$;

б) $f(x)=x^4-1$, $M(2;10)$;

в) $f(x)=1-3x$, $M(2;3)$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-8x^5+2$, $M(1;7)$.

**33*.** Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$ -ро ёбед:

а) $f(x)=1-\sin 6x+2\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 3x}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{3-x}}-2x^3$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2(4x+1)}-4\cos(2-x)+3x$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{(4-2x)^3}+\dfrac{2}{\sqrt{7x-1}}-2\sin(\dfrac{\pi}{4}-x)$.

**34.** Суръати нуқтаи ростхатта ҳаракаткунанда бо формулаи $\vartheta(t)=t^2-3t+1$ ифода мешавад. Агар дар лаҳзаи ибтидоии вақт $(t=0)$ нуқта дар ибтидои координатаҳо бошад, вобастагии координатаи он $x$ -ро ба вақти $t$ бо воситаи формула нависед.

**35.** Нуқта бо шитоби $a(t)=8t^2+5$ ростхатта ҳаракат мекунад. Агар дар лаҳзаи $t=0$ суръати он ба 8 м/с ва координатааш ба 16 баробар бошад, қонуни ҳаракати нуқтаро ёбед.

**36.** Нуқтаи массааш $m$ аз рӯйи тири абсисса дар зери қуввае ҳаракат мекунад, ки он қад-қади ҳамин тир равон шудааст. Дар лаҳзаи вақти $t$ қувва ба $F(t)$ баробар аст. Агар ҳангоми $t=t_0$

будан, суръати нуқта ба $\vartheta_0$ ва координатааш ба $x_0$ баробар бошад, формулаи вобастагии $x(t)$-ро ба вақти $t$ ёбед ($F(t)$-ба ҳисоби Нютон, $t$-ба ҳисоби сония, $\vartheta$-ба ҳисоби метр дар сония, $m$-ба ҳисоби килограмм):

а) $F(t)=3-6t$, $t_0=1$, $\vartheta_0=4$, $x_0=-5$, $m=3$;

б) $F(t)=8\sin t$, $t_0=\pi$, $\vartheta_0=3$, $x_0=2$, $m=6$.

### *Машқҳо барои такрор*

**37.** Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x)=2x^3+3x^2-36x$ - ро дар порчаи $[-1;3]$ ёбед.

**38.** Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45,\\ x+y=5.\end{cases}$$

**39.** Решаи дар фосилаи $(0^0;180^0)$ воқеъбудаи муодилаи

$$\sin x-1=0{,}5\sin 2x-\cos x$$

-ро ёбед.

**40.** Барои кадом қиматҳои $c$ муодилаи $x^2+2x+c=0$ реша надорад? Қимати хурдтарини бутуни чунин $c$-ро нишон диҳед.

**41.** Аз шаҳри $A$ ба шаҳри $B$, ки масофаи байни онҳо 120 км аст, дар як вақт ду велосипедрон ҳаракат карданд. Суръати велосипедрони якум назар ба суръати велосипедрони дуюм 3 км/соат зиёдтар буд, бинобар ин ӯ ба шаҳри $B$ 2 соат пештар омада расид. Суръати ҳар як велосипедронро ёбед.

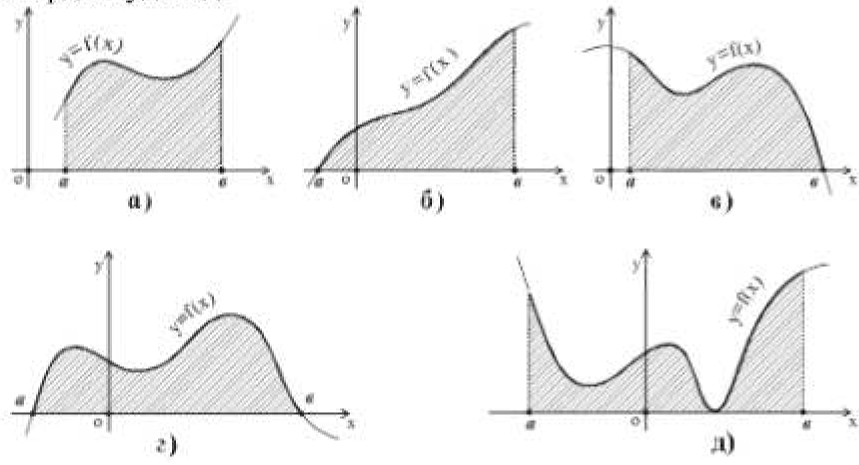
## § 2. ИНТЕГРАЛ

### 5. МАСОҲАТИ ТРАПЕТСИЯИ КАҶХАТТА

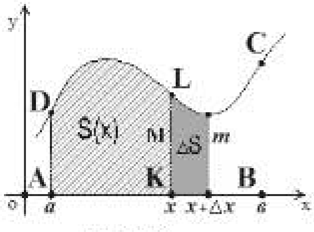
Бигузор дар порчаи $[a;b]$ функсияи бефосилаи $y=f(x)$ дода шудааст, ки доималомат мебошад. Барои муайянӣ фарз мекунем, ки функсияи додашуда ғайриманфӣ аст, яъне барои ҳар гуна $x\in[a;b]$ $f(x)\geq 0$.

Т а ъ р и ф. **Фигурае, ки бо графики функсияи ғайриманфӣ, порчаи $[a;b]$, хатҳои рости $x=a$ ва $x=b$ маҳдуд аст, трапетсияи каҷхатта номида мешавад.**

Шаклҳои гуногуни трапетсияи каҷхатта дар расми 2, *а) – д)* оварда шудаанд.




***Расми 2.***




Расми 3.

Бо $S$ масоҳати трапетсияи каҷхаттаро ишорат мекунем. Бо мақсади ёфтани $S$ рафтори масоҳати фигураи тағйирёбандаи AKLD –ро, ки он бо хатҳои рости $x=a$ ва KL, графики $y=f(x)$ дар порчаи $[a;x]$ ва худи ҳамин порча маҳдуд аст (расми 3), меомӯзем. Ин масоҳатро бо $S(x)$ ишорат мекунем (Ҳангоми тағйир ёфтани $x$ масоҳати номбурда мувофиқан тағйир меёбад. Яъне масоҳати трапетсияи каҷхаттаи AKLD функсияи аргументаш $x$ аст.). Функсияи ҳозир дохилкардаамон дорои хосияти аҷибе аст, ки онро дар шакли теорема меорем.

Т е о р е м а . **Функсияи $S(x)$ барои функсияи $y = f(x)$ функсияи ибтидоӣ аст.**

И с б о т. Ҳосилаи функсияи $S(x)$ -ро меёбем. Бо ин мақсад ба $x$ ягон афзоиши (масалан, мусбати) $\Delta x$ медиҳем. Масоҳати $S(x)$ афзоиши $\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x)$ -ро қабул мекунад (расми 3).

Бо $m$ ва $M$ мувофиқан қиматҳои хурдтарин ва калонтарини функсияи $f(x)$ -ро дар порчаи $[x;\, x+\Delta x]$ ишорат карда, масоҳати $\Delta S$ -ро бо масоҳатҳои росткунҷаҳое муқоиса мекунем, ки асосашон $\Delta x$ буда, баландиҳояшон $m$ ва $M$ мебошанд. Зоҳиран фаҳмост, ки

$$m\Delta x < \Delta S < M\Delta x$$

аст. Аз ин ҷо:

$$m < \frac{\Delta S}{\Delta x} < M .$$

Азбаски функсияи бефосила дар порчаи $[m;\, M]$ тамоми қиматҳои мобайниро қабул мекунад, пас чунин нуқтаи $c \in [x;\, x+\Delta x]$ ёфт мешавад, ки $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(c)$ (Ин баробарӣ ҳангоми $\Delta x < 0$ будан низ дуруст аст.). Акнун $\Delta x$ -ро ба нул майл мекунонем ва мебинем, ки порчаи $[x;\, x+\Delta x]$ бо нуқтаи $x$ якҷоя мешавад, яъне ҳангоми $\Delta x \to 0$ $f(c) \to f(x)$. Инак, ҳангоми $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$. Ин наздикшавӣ нишон медиҳад, ки $S'(x) = f(x)$. Теорема исбот шуд.

Х у л о с а. **Ҳангоми дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва доималомат будани функсияи $y = f(x)$ масоҳати трапетсияи каҷхаттаи $ABCD$ (расми 3) ба афзоиши яке аз функсияҳои ибтидоӣ дар порчаи $[a;b]$ баробар аст, яъне**

$$S = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Дар ҳақиқат, мувофиқи теоремаи ҳозир исботкардаамон ва хосияти асосии функсияи ибтидоӣ

$$S(x) = F(x) + C,$$

ки дар он $F'(x) = f(x)$ аст. Дар баробарии болоӣ $x = a$ гузошта, доимии $C$- ро меёбем: $0 = S(a) = F(a) + C$, яъне $C = -F(a)$. Пас,

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

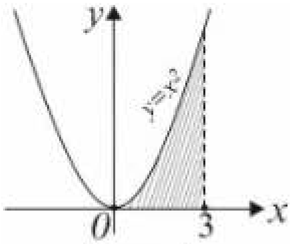
Барои ҳосил кардани масоҳати ҳамаи трапетсияи каҷхаттаи $ABCD$ $x = b$ гузоштан лозим аст:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

Э з о ҳ. Формулаи (2) ҳангоми дар порчаи $[a;b]$ гуногуналомат будани $y = f(x)$ низ дуруст аст. Барои исбот порчаи $[a;b]$-ро ба $k$ ҳисса ҷудо кардан даркор аст, ки дар ҳар як ҳиссаи $[x_i; x_{i+1}]$ $(x_0 = a, x_k = b)$ функсияи $y = f(x)$ доималомат мебошад. Формулаи (2) барои ҳар як ҳисса дуруст аст, яъне $S_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ масоҳати трапетсияи каҷхаттаи бо ин ҳисса, графики $y = f(x)$, хатҳои рости $x = x_i$ ва $x = x_{i+1}$ маҳдудбуда мебошад. Фаҳмост, ки

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{k-1} =$$
$$= \left(F(x_1) - F(x_0)\right) + \left(F(x_2) - F(x_1)\right) + \left(F(x_3) - F(x_2)\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right) = F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

М и с о л и 1. Масоҳати трапетсияи каҷхаттаи бо графики функсияи $f(x) = x^2$ ва хатҳои $y = 0$, $x = 3$ маҳдудро меёбем.

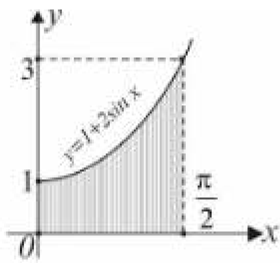


Расми 4.

Ҳ а л. Графикҳоро схемавӣ кашида, масоҳати матлубро бо хатҳои рах-рах қайд мекунем (расми 4).

Функсияи $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ барои функсияи $f(x) = x^2$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ мебошад. Пас, мувофиқи формулаи (2):

$$S = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$



Расми 5.

М и с о л и 2. Масоҳати трапетсияи каҷхаттаи бо графики функсияи $f(x) = 1 + 2\sin x$ ва хатҳои $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ маҳдудро ҳисоб мекунем (расми 5).

Ҳ а л. Функсияи $F(x) = x - 2\cos x$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ аст. Пас, мувофиқи формулаи (2):

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} - (0 - 2\cos 0) = \frac{\pi}{2} + 2.$$

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Чӣ гуна фигура трапетсияи каҷхатта номида мешавад?

**2.** Магар ҳамаи шаклҳои ин гуна трапетсияҳо ҳангоми доималомат будани функсия дар расми 2 нишон дода шудаанд?

**3.** Масоҳати трапетсияи каҷхаттаро аз рӯйи кадом формула ёфтан мумкин аст?

**4.** Дар формулаи масоҳати трапетсияи каҷхатта функсияи $y = f(x)$ бояд дорои кадом хосиятҳо бошад?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ёбед (42-44):

**42.** а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$;

в) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$;

г) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

**43.** а) $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

б) $y = 1 + \dfrac{\sin x}{2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$;

в) $y = 1 + 2\cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$;

г) $y = 16 - x^2$, $y = 0$.

**44.** а) $y = (x+1)^2$, $y = 0$, $x = 1$;

б) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2} + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

в) $y = x - x^2$, $y = 0$;

г) $y = x^3 - x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$.

### *Машқҳо барои такрор*

**45*.** Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$ -ро ёбед, агар $f(x)=\frac{1}{\sin^2(2x+1)}+\sqrt{6x-5}+2x^4$ бошад.

**46.** Ҳисоб кунед: $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8^{-\frac{2}{3}}}$.

**47.** Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^2+3xy=18, \\ 3y^2+xy=6. \end{cases}$$

**48.** Муодилаи $tg^2x-6tgx+5=0$ -ро дар порчаи $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ ҳал кунед ва ҷавобро бо градус нависед.

**49.** Фосилаҳои монотонӣ, экстремум ва экстремали функсияи $f(x)=6x-8x^3$ -ро ёбед.

## 6. ЁФТАНИ МАСОҲАТИ ФИГУРАҲО

Мо аллакай масоҳати трапетсияи каҷхаттаеро, ки бо хатҳои $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ маҳдуд аст, ҳисоб карда метавонем (ниг. ба формулаи (2)-и банди 5). Дар айни ҳол функсияи $f(x)$ ғайриманфӣ ҳисоб карда мешавад.

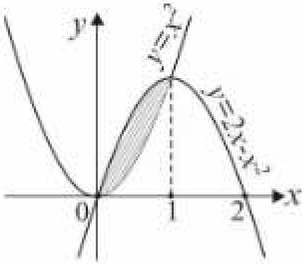
Акнун ба ҳисоби масоҳати фигураҳое шуруъ мекунем, ки онҳо дар натиҷаи буриши ду ё якчанд хати каҷ ҳосил мешаванд. Дар ҳалли мисолҳои мушаххас ***схемаи умумии*** ёфтани чунин масоҳатҳоро нишон медиҳем.

Мисоли 1. Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои $y=x^2$ ва $y=2x-x^2$ маҳдуд аст, меёбем.

Ҳ а л. 1. Фигураи додашударо схемавӣ тасвир мекунем (расми 6).

2. Абсиссаҳои нуқтаҳои буриши графикҳои функсияҳоро меёбем:

$x^2 = 2x - x^2$; $x^2 = x$; $x(x-1) = 0$; $x = 0$ ва $x = 1$.



Расми 6.

3. Масоҳати трапетсияи каҷхаттаро, ки аз боло бо графики функсияи $y = 2x - x^2$ ва хатҳои $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ маҳдуд аст, меёбем. Барои ин функсияи ибтидоии ин функсияро ёфта, формулаи (2)-ро татбиқ мекунем. Яке аз функсияҳои ибтидоӣ функсияи $F(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{3}$ аст. Пас, масоҳати ин трапетсияи каҷхатта $S_2 = F(1) - F(0) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ аст.

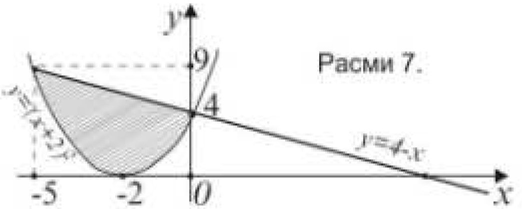
4. Масоҳати трапетсияи каҷхаттаро, ки бо хатҳои $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ маҳдуд аст, меёбем. Яке аз функсияҳои ибтидоӣ бо формулаи $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ дода мешавад. Барои ҳамин $S_1 = F(1) - F(0) = \dfrac{1}{3}$.

5. Масоҳати фигураи матлубро ҳамчун фарқи масоҳатҳо меёбем:

$$S = S_2 - S_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

М и с о л и 2. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y = (x+2)^2$ ва $y = 4 - x$ маҳдудро меёбем.

Ҳ а л. Мувофиқи схемаи дар ҳалли мисоли 1 истифода кардаамон амал мекунем.




1. Графики функсияҳоро сохта, соҳаи заруриро бо хатти рах - рах қайд мекунем (расми 7).

2. Абсиссаҳои нуқтаҳои буриши графикҳоро меёбем:

$$(x+2)^2 = 4-x;\ \ x^2+4x+4=4-x;\ \ x^2+5x=0;$$

$$x(x+5)=0;\ x=-5,\ \ x=0.$$

3. Масоҳати бо хатҳои $y=4-x$, $y=0$, $x=-5$, $x=0$ маҳдудро меёбем. Функсияи $F(x)=4x-\dfrac{x^2}{2}$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ барои $y=4-x$ аст. Пас, мувофиқи формулаи (2):

$$S_2 = F(0)-F(-5) = 0-\left(4\cdot(-5)-\frac{(-5)^2}{2}\right) = 20+\frac{25}{2} = 32\frac{1}{2}.$$

4. Акнун масоҳати бо хатҳои $y=(x+2)^2$, $y=0$, $x=-5$, $x=0$ маҳдудро меёбем. Азбаски $F(x)=\dfrac{(x+2)^3}{3}$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ аст, пас:

$$S_1 = F(0)-F(-5) = \frac{2^3}{3}-\frac{(-3)^3}{3} = \frac{8}{3}+9 = 11\frac{2}{3}.$$

5. Масоҳати матлуб ба фарқи масоҳатҳои ёфташуда баробар аст:

$$S = S_2 - S_1 = 32\frac{1}{2}-11\frac{2}{3} = \frac{65}{2}-\frac{35}{3} = \frac{195-70}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}.$$

### *Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон*

**1.** Зинаҳои схемаи умумии ёфтани масоҳати фигураеро, ки дар натиҷаи буриши ду ё якчанд хатти кач ҳосил мешавад, номбар кунед.

**2.** Нишон диҳед, ки ин схема барои ҳисоби масоҳати трапетсияи каҷхаттае, ки аз болову поён бо хатҳои каҷ маҳдуд аст, низ татбиқшаванда аст.

**3.** Шумо мисоли трапетсияи каҷхаттаро аз амалия оварда метавонед?

4. Барои чӣ фигураеро, ки бо хатҳои рости $x = a, x = b$, $y = 0$ ва функсияи $y = f(x)$ маҳдуд аст, трапетсияи каҷхатта меноманд?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед (50-53):

**50.** а) $y = 2 + x - x^2$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $y = 2x$;

в) $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;

г) $y = \cos 0{,}1x$, $y = 0$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = 5\pi$.

**51.** а) $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $y = 6x$;

в) $y = (x-3)^2$, $y = 9 - 2x$; г) $y = -x^2 + 3$, $y = 0$.

**52.** а) $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = x^3$, $y = \sqrt[4]{x}$;

в) $y = (x-2)^2$, $y = 4 - x^2$; г) $y = x^2$, $y = 1 - x^2$.

**53*.** а) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x$;

б) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $x > 0$;

в) $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$, $x > 0$;

г) $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 2$, $x > 0$.

**54.** Ҳисоб кунед:

$$\left(3\frac{3}{4}-2\frac{2}{5}\right)\cdot 20-\left(\frac{11}{12}-\frac{2}{3}\right):\frac{3}{12}.$$

**55.** Ифодаро сода кунед:

$$1+\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}.$$

**56.** Муодилаи $\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$ -ро ҳал кунед.

**57.** Муодилаи зеринро ҳал кунед:

$$\sqrt{1-2x+x^2}=x+1.$$

**58.** Функсияи ибтидоии функсияи $f(x)=\cos(4x-5)$ -ро ёбед.

## 7. МАФҲУМИ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛАИ НЮТОН-ЛЕЙБНИТС

**1⁰**.Масъалаи ҳисоби масоҳати трапетсияи каҷхаттаро аз нуқтаи назари дигар муоина мекунем. Бигузор функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ ғайриманфӣ ва бефосила аст. Масоҳати трапетсияи каҷхатта $S$-ро тақрибӣ ҳисоб кардан мумкин аст.

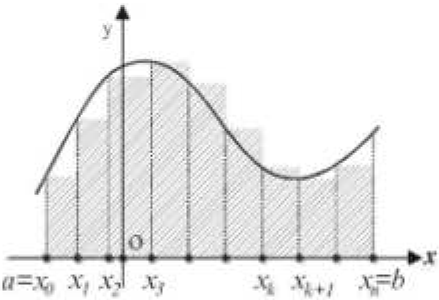
Порчаи $[a;b]$ - ро бо ёрии нуқтаҳои $a=x_0<x_1<x_2<\cdots$ $\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ ба $n$ порчаҳои дарозиашон якхела ҷудо мекунем. Бигузор $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$ дарозии порчаи $[x_{k-1};x_k]$ аст, ки дар ин ҷо $k=1,2,3,\cdots n-1,n$ мебошад. Дар ҳар яке аз порчаҳои $[x_{k-1};x_k]$ чун дар асос, росткунҷаи баландиаш $f(x_{k-1})$ -ро месозем. Масоҳати ин росткунҷа ба

$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

ва суммаи масоҳатҳои тамоми ҳамин гуна росткунҷаҳо ба

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n)\right)$$

баробар аст (расми 8).



Расми 8.

Аз сабаби бефосила будани $f(x)$ ҳангоми ниҳоят калон будани $n$, яъне ҳангоми ниҳоят хурд будани $\Delta x$, ҳар яке аз росткунҷаҳои сохташуда бо қисми трапетсияи каҷхаттаи мазкур қариб ҳамҷоя мешавад. Бо ибораи дигар, ҳангоми ниҳоят калон будани $n$ фарзияи ҷой доштани баробарии тақрибии $S_n \approx S$ ба миён меояд (Инро кӯтоҳ ин тавр мегӯянд: «ҳангоми ба беохирӣ майл кардани $n$, $S_n$ ба $S$ майл мекунад» ва чунин менависанд: ҳангоми $n \to \infty$, $S_n \to S$ .).

Ин фарзия амалан дуруст аст. Бар замми ин, барои ҳар гуна функсияи $f(x)$-и дар порчаи $[a;b]$ бефосила (ғайриманфӣ буданаш шарт нест) ҳангоми $n \to \infty$, $S_n$ ба ягон адад майл мекунад. Мувофиқи таъриф ин ададро интеграли функсияи $f(x)$ аз $a$ то $b$ меноманд ва бо $\int_a^b f(x)dx$ ишорат мекунанд, яъне:

$$\text{ҳангоми } n \to \infty, \qquad S_n \to \int_a^b f(x)dx .$$

Хонда мешавад: «Интеграл аз $a$ то $b$ эф аз икс дэ икс». Ададҳои $a$ ва $b$ *ҳудудҳои интеграл* номида мешаванд: $a$ - ҳудуди поёнӣ, $b$ -ҳудуди болоӣ. Рамзи $\int$ ишорати интеграл аст. Функсияи $f(x)$ *функсияи зеринтегралӣ* ва тағйирёбандаи $x$ бошад, *тағйирёбандаи интегралгирӣ* ном дорад.

Ҳамин тариқ, агар дар порчаи $[a;b]$ нобаробарии $f(x) \geq 0$ ҷой дошта бошад, он гоҳ масоҳати трапетсияи каҷхаттаи мувофиқ $S$ бо формулаи

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

ифода мешавад.

**2⁰.** Дар банди 5 дида будем, ки масоҳати трапетсияи каҷхаттаи аз боло бо графики $y = f(x)$ маҳдудбуда бо формулаи (2), яъне бо формулаи $S = F(b) - F(a)$ ҳисоб мешавад. Инро бо баробарии (3) муқоиса намуда, натиҷаи зеринро ҳосил мекунем: *агар дар порчаи* $[a;b]$ *функсияи* $F(x)$ *барои функсияи* $f(x)$ *функсияи ибтидоӣ бошад, он гоҳ*

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

аст. Баробарии (4) *формулаи Нютон-Лейбнитс* ном дорад. Вай барои функсияи дилхоҳи дар порчаи $[a;b]$ бефосилаи $f(x)$ дуруст аст. Фарқи $F(b) - F(a)$ -ро, ки афзоиши $F(x)$ дар порчаи $[a;b]$ аст, бо $F(x)\Big|_a^b$ ишорат мекунанд ва формулаи Нютон-Лейбнитс (4)-ро кӯтоҳ ин тавр менависанд:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b . \qquad (5)$$

Акнун мисолҳои татбиқи формулаи Нютон – Лейбнитсро дида мебароем.

М и с о л и 1. Интеграли $\int_{-2}^{3} x^2 dx$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Функсияи $F(x) = \frac{x^3}{3}$ барои $f(x) = x^2$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ аст, бинобар ин мувофиқи (5) ҳосил мекунем:

$$\int_{-2}^{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 9 + \frac{8}{3} = 11\frac{2}{3}.$$

М и с о л и 2. Интеграли $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ - ро меёбем.

Ҳ а л. Дорем:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Э з о ҳ. Қайд мекунем, ки формулаи (4) (ё (5)) ҳангоми $b < a$ будан низ дуруст аст. Бар замми он $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ мебошад. Инчунин, баробариҳои

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{ва} \quad \int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

($k$ -доимӣ) дурустанд.

М и с о л и 3. Интеграли $\int\limits_{2}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Дорем:

$$\int\limits_{2}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{2}^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -3 + \frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}.$$

М и с о л и 4. Интеграли $\int\limits_{1}^{2} \left(2x^2 + 3x\right)dx$ -ро ҳисоб мекунем.

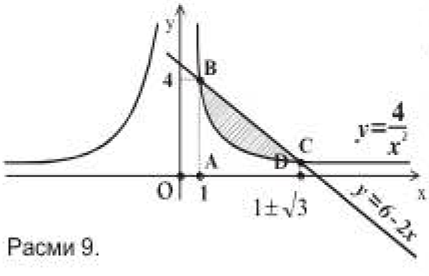
Ҳ а л. Аз хосиятҳои интеграл, ки дар эзоҳ оварда шудаанд, истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\int\limits_{1}^{2} \left(2x^2 + 3x\right)dx = \int\limits_{1}^{2} 2x^2 dx + \int\limits_{1}^{2} 3x dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{1}^{2} + 3 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= 2\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) + 3\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 2 \cdot \frac{7}{3} + 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{14}{3} + \frac{9}{2} = \frac{28+27}{6} = \frac{55}{6} = 9\frac{1}{6}.$$

М и с о л и 5. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y = \frac{4}{x^2}$ ва $y = 6 - 2x$ маҳдудро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Схемаи дар банди 6 овардаамонро татбиқ мекунем. Нуқтаҳои буриши графикҳоро меёбем: $\frac{4}{x^2} = 6 - 2x$; $4 = 6x^2 - 2x^3$; $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; $(x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0$; $x - 1 = 0$; $x = 1$; $x^2 - 2x - 2 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Инак, нуқтаҳои буриш $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$ мебошанд.



Расми 9.

Ҳамин тариқ, масоҳати трапетсияи мазкур ба фарқи масоҳати трапетсияи ростхаттаи ABCD ва масоҳати трапетсияи качхаттаи ABCD баробар аст (расми 9). Мувофиқи формулаи (5) дорем:

$$S = \int_1^{1+\sqrt{3}} (6-2x)dx - \int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{4dx}{x^2} = (6x - x^2)\Big|_1^{1+\sqrt{3}} - \left(-\frac{4}{x}\right)\Big|_1^{1+\sqrt{3}} =$$

$$= (6 + 6\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} - 3) - (6-1) + \frac{4}{\sqrt{3}+1} - 4 = 4\sqrt{3} - 3 +$$

$$+ \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - 1} - 4 = 4\sqrt{3} - 3 + 2\sqrt{3} - 2 - 4 = 6\sqrt{3} - 9\,.$$

### *Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон*

**1.** Интеграли функсия дар порчаи $[a; b]$ чиро мегӯянд?

**2.** Формулаи Нютон – Лейбнитсро нависед.

**3.** Барои чӣ гуна функсияи зеринтегралӣ формулаи Нютон – Лейбнитс дуруст аст?

**4.** Интеграли муайян бо масоҳати трапетсияи качхатта чӣ гуна алоқамандӣ дорад?

**5.** Интегралро чӣ гуна ишорат мекунанд?

**6.** Агар ҳудудҳои интегралро байни ҳам иваз кунем, қимати он тағйир меёбад?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

Интегралҳоро ҳисоб кунед (59-63):

**59.** а) $\int\limits_0^2 x^3 dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$; в) $\int\limits_{-1}^3 x^2\, dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

**60.** а) $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\, dx$; б) $\int\limits_0^3 (1+3x^2)\, dx$;

в) $\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 2x\right) dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 6x\, dx$.

**61*.** а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

**62.** а) $\int\limits_0^8 (2x + \sqrt[3]{x}) dx$; б) $\int\limits_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$;

в) $\int\limits_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}) dx$; г) $\int\limits_{-2}^{-1} (x^{-3} - x) dx$.

**63.** а) $\int\limits_0^3 (x-3)(x+3) dx$; б) $\int\limits_0^2 (2x+3)^3\, dx$;

в) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\, dx$; г) $\int\limits_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед (64-67):

**64.** а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$; б) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$;

в) $y = \frac{x}{3}$, $y = x$, $x = 1$; г) $y = \sqrt{x}$, $y = 3$, $x = 0$.

**65.** а) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;

б) $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

в) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; г) $y = x^2 - 7x + 10$, $y = 0$.

**66.** а) $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 1 - x$; б) $y = x^2$, $y = 2x^2 - 1$;

в) $y = x^2$, $y = 2 - x$; г) $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x - 2$.

**67.** а) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$;

б) $y = (x-2)^2$, $y = 4 - x^2$;

в) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$;

г) $y = x^2$, $y = x^3$.

**68.** Масоҳати фигураеро ҳисоб кунед, ки он бо графики функсияи $y = 6x - 2x^2$, расанда ба ин парабола дар қуллаи он ва хатти рости $x = 0$ маҳдуд шудааст.

**69.** Масоҳати фигураеро ҳисоб кунед, ки он бо графики функсияи $f(x) = 4 - 0{,}5x^2$, расанда ба он дар нуқтаи абсиссааш $x = -1$ ва хатти рости $x = 1$ маҳдуд шудааст.

### *Машқҳо барои такрор*

**70.** Исбот кунед, ки барои ҳар гуна $n$-и натуралӣ адади $n^3 + 3n^2 + 5n$ ба 3 тақсим мешавад.

**71.** Намуди умумии функсияҳои ибтидоиро ёбед:

а) $f(x)=\sqrt[3]{4x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{3x+2}}+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-2x\right)$.

**72.** Муодилаи ирратсионалиро ҳал кунед:

$\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=1$.

**73*.** Нобаробариро ҳал кунед: $\dfrac{6}{(x+2)(x-3)}-\dfrac{1}{x+2}>3$.

## 8. БАЪЗЕ ТАТБИҚҲОИ ИНТЕГРАЛ

Мо аллакай як татбиқи интегралро муоина намудем: интеграл ҳамчун восита барои ҳисоб кардани масоҳати трапетсияи каҷхатта.

Мафҳуми интеграл дар геометрия, физика, техника, ҷомеашиносӣ ва дигар илмҳо васеъ истифода мешавад. Ҳоло ду татбиқи дигари интегралро дида мебароем.

**$1^0$. Масофаи тайкардаи ҷисм.** Агар ҷисм ғайримунтазам ба як самт ҳаракат карда, суръаташ вобаста ба вақт тағйир ёбад, яъне $\vartheta=\vartheta(t)$ бошад, он гоҳ масофае, ки ин ҷисм дар муддати вақти аз $t_1$ то $t_2$ тай мекунад,

$$S(t_2)-S(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vartheta(t)dt$$

мебошад. Ин аз баробарии $S'(t)=\vartheta(t)$, яъне аз он ки $S(t)$ барои $\vartheta(t)$ функсияи ибтидоӣ аст ва аз формулаи Нютон – Лейбнитс бармеояд.

М и с о л и 1. Суръати ҷисм (бо м/сония) аз рӯйи қонуни $\vartheta(t)=4t-t^2$ тағйир меёбад. Масофаеро, ки ҷисм аз ибтидои ҳаракат то бозистоданаш тай мекунад, меёбем.

Ҳ а л. Муҳлати ҳаракати ҷисмро муайян мекунем:

$$4t - t^2 = 0; \ \ t(4-t) = 0; \ \ t = 0, \ \ t = 4.$$

Яъне баъди 4 сония ҷисм ҳаракатро қатъ мекунад. Барои ҳамин

$$S = \int_0^4 (4t - t^2)\, dt = \left( 2t^2 - \frac{t^3}{3} \right)\Bigg|_0^4 = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = 32 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ м.}$$

М и с о л и 2. Ҷисм, ки суръаташ аз рӯйи қонуни $\vartheta(t) = 29{,}4 - 9{,}8t$ (бо м/сония) тағйир меёбад, амудӣ ба боло партофта шудааст. Баландии калонтарини болобароии ҷисмро меёбем.

Ҳ а л. Вақтеро, ки дар муҳлати он ҷисм ба боло мебарояд, меёбем: $29{,}4 - 9{,}8t = 0$, $t = 3$ сония. Баландии калонтарини болобароиро ҳисоб мекунем:

$$h = \int_0^3 (29{,}4 - 9{,}8t)\, dt = \left( 29{,}4t - \frac{9{,}8}{2} t^2 \right)\Bigg|_0^3 = 29{,}4 \cdot 3 - 4{,}9 \cdot 3^2 = 44{,}1 \text{ м.}$$

**$2^0$. Кори қувваи тағйирёбанда.** Тавре аз курси физика медонем, кори қувваи доимии $P$ бо формулаи $A = PS$, ки $S$ кӯчиш аст, чен карда мешавад. Акнун ҳангоми тағйирёбанда будани қувва барои кор формула ҳосил мекунем.

Бигузор дар тири $OX$ ба ҷисм қувваи тағйирёбандаи бефосилаи $P = f(x)$ таъсир кунад. Кори қувваи $P$-ро, ки ҷисм зери таъсири он аз нуқтаи $x = a$ то нуқтаи $x = b$ ҷойиваз мешавад, ҳисоб мекунем. Бо ин мақсад порчаи $[a;b]$ - ро ба $n$ ҳиссаи баробар ҷудо мекунем, яъне $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ нуқтаҳои тақсимот буда, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ дарозии ҳар як ҳисса аст. Дарозии ҳар як ҳиссаро, ки дарозии порчаи $[x_{k-1}; x_k]$ аст, хурд ҳисоб карда, функсияи $f(x)$-ро дар ин порча тахминан ба $f(x_{k-1})$ баробар фарз мекунем $(k=1, 2, \ldots, n-1, n)$. Бо ин фарзия мебинем, ки кор дар $[x_{k-1}; x_k]$ тахминан $f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = f(x_{k-1})\Delta x$ аст. Кори қувва дар тамоми порчаи $[a;b]$ бошад, тахминан ба суммаи корҳо дар ҳиссаҳо баробар аст, яъне ба

$$A_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x =$$
$$= \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right).$$

Мувофиқи қисми $1^0$-и банди 7 ҳангоми $n \to \infty$, $A_n$ ба $A$ майл мекунад, яъне

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Мисоли 3. Қувваи $10\,\text{Н}$ фанар (пружина)-ро 2 см меёзонад. Чӣ қадар кор иҷро кардани ин қувваро меёбем.

Ҳал. Аз рӯйи қонуни Гук қуввае, ки фанарро ба бузургии $x$ меёзонад, бо формулаи $f(x) = kx$ ҳисоб мешавад, ки дар ин ҷо $k$-коэффитсиенти мутаносибӣ аст. Нуқтаи $x=0$ ба ҳолати озоди фанар мувофиқ меояд. Дар асоси шарти масъала $k = \dfrac{10\ \text{Н}}{0{,}02\,\text{м}} = 500\,\dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$, пас $f(x) = 500x$. Ҳамин тариқ, мувофиқи формулаи (6):

$$A = \int_0^{0{,}02} 500x\,dx = \frac{500x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}02} = 250\cdot(0{,}02)^2 =$$
$$= 250\cdot(2\cdot 10^{-2})^2 = 1000\cdot 10^{-4} = 10^{-1} = 0{,}1\ \text{Ҷ}.$$

Э з о ҳ.  Яке аз муҳимтарин соҳаҳои татбиқи интеграл ин ҳисоби ҳаҷми ҷисмҳои геометрӣ аст, ки мо аз муоинаи он сарфи назар кардем. Ин татбиқ дар курси геометрия муфассал омӯхта мешавад.

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Кадом татбиқоти интегралро медонед?

**2.** Масофаи тайкардаи ҷисмро кадом вақт бо ёрии интеграл ёфтан мумкин аст?

**3.** Раванди ҳосил кардани формулаи ёфтани кори қувваи тағйирёбандаро нақл кунед.

**4.** Дар бораи қонуни Гук маълумот диҳед.

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

**74.** Суръати ҳаракат (бо м/сония) аз рӯйи қонуни $\vartheta(t) = 2t$ тағйир меёбад. Масофаеро, ки ҷисм дар муддати дақиқаи сеюми ҳаракат тай мекунад, ёбед.

**75.** Суръати ҳаракат (бо м/сония) аз рӯйи қонуни $\vartheta(t) = 3t^2 + t + 1$ тағйир меёбад. Масофаеро, ки ҷисм дар 4 сонияи аввал тай мекунад, ёбед.

**76.** Ҷисм амудӣ бо суръати аввалаи $\vartheta_0$ ба боло партофта шудааст. Баландии калонтарини болобароии ҷисмро ёбед.

**77.** Қувваи $60\,\text{Н}$ кифоя аст, ки фанар (пружина) ба 2 см ёзонида шавад. Дарозии аввалаи фанар 14 см аст. Барои фанарро то 20 см ёзонидан чӣ қадар корро иҷро кардан лозим аст?

**78.** Агар қувваи бузургиаш $2\,\text{Н}$ фанарро ба 1 см фишурад, барои 4 см фишурдани фанар кадом корро сарф кардан даркор аст?

**79.** Дар зери таъсири қувваи $1{,}5\cdot 10^4$ Н рессор 1 см қатъ мешавад. Барои деформатсияи ба 3 см баробари рессор чӣ қадар кор зарур аст?

***Машқҳо барои такрор***

**80.** Қимати ифодаи $0{,}2x^2-2{,}4$-ро ҳангоми $x=\sqrt{10-3\sqrt{11}}+\sqrt{10+3\sqrt{11}}$ будан ҳисоб кунед.

**81.** Сода кунед:

$$\frac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a^{0,5}}:\left[\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}}-\frac{b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}\right].$$

**82.** Ҳисоб кунед:

а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(2x+\frac{\pi}{4})\,dx$;  б) $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\sin(x+\frac{\pi}{3})\,dx$.

**83.** Суммаи шаш узви аввалаи прогрессияи геометрӣ ёфта шавад, агар $b_1=32$ ва $q=-0{,}5$ бошад.

## МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

**$1^0$. Доир ба пайдоиши истилоҳот ва ишоратҳо.** Рамзи интеграл $\int$ -ро математики олмонӣ *Готфрид Лейбнитс* (1646–1716), ки дар қатори *Исаак Нютон* (1643–1727) бунёдгари ҳисоби дифференсиалӣ ва интегралӣ ба шумор меравад, соли 1675 дохил кардааст. Ин рамз тағйири ҳарфи лотинии $S$ (ҳарфи аввали калимаи *Summa* – ҳосили ҷамъ) мебошад. Худи калимаи *интегралро Якоб Бернули* (1655–1705) соли 1690 пешниҳод карда буд. Шояд аз калимаи лотинии *Integro*, ки маънояш барқарор кардан аст, гирифта шуда бошад, чунки амали интегралгирӣ функсияеро, ки дар натиҷаи ҳосилагирии функсияи зериинтегралӣ ҳосил мешавад, «барқарор» мекунад. Истилоҳи *ҳисоби интегралӣ* (Calculus integralus), ки соли 1696 *Иоҳанн Бернулли* (1667–1748) дохил кардааст, шохаи нави математика ҳисоб шуда, асосан дар ин ҷо тарзҳои ёфтани функсияҳои ибтидоӣ муоина мешуданд. Ҳисоби интегралӣ аз муоинаи масъалаҳои зиёди табиатшиносӣ ва математикӣ пайдо шудааст. Муҳимтарини ин гуна масъалаҳо – масъалаи физикии ёфтани масофае, ки ҷисми суръаташ тағйирёбанда дар муҳлати муайян тай мекунад ва масъалаи ёфтани масоҳату ҳаҷми фигураҳои геометрӣ, ки масъалаи хеле қадима аст, мебошанд.

Аз соли 1797 сар карда, истилоҳи *функсияи ибтидоӣ* ба ҷойи истилоҳи «функсияи сода», ки онро олими фаронсавӣ *Жозеф Лагранҷ* (1736–1813) дохил карда буд, пайдо шуд. Калимаи лотинии *Primitvus* чун ибтидоӣ тарҷума мешавад: $F(x)=\int f(x)\,dx$ барои функсияи $f(x)$ ибтидоӣ мебошад, агар вай аз $F(x)$ бо воситаи ҳосилагирӣ ҳосил шавад.

Дар замони мо маҷмуи тамоми функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$-ро *интеграли номуайян* низ меноманд. Ин мафҳумро Лейбнитс дохил кардааст. $\int_a^b f(x)\,dx$-ро *интеграли муайян* мегӯянд. Онро соли 1819 *Ж. Фурйе* (1768–1830) дохил карда буд.

**2⁰. Аз таърихи ҳисоби интегралӣ.** Бисёр ғояҳои ҳисоби интегралиро риёзидонҳои Юнони қадим ҳангоми ҳалли масъалаҳо оид ба ёфтани *квадратура* (масоҳат)-ҳои фигураҳои ҳамвор, инчунин ёфтани *кубатура* (ҳаҷм)-ҳои ҷисмҳо пешгӯйӣ карда буданд. Дар ин қатор пеш аз ҳама бояд *Евдокс* (408–355-и пеш аз милод) ва *Архимед* (287–212-и пеш аз милод)-ро номбар кард.

Асри XVII асри рушду камол ёфтани ҳисоби интегралӣ ба шумор меравад. Дар ин давра вай ба шохаи мустаҳками илми математика мубаддал мегардад. Ҳамчун намуна чанд кашфиёти ин давраро меорем. *Пйер Ферма* (1601–1665) соли 1629 масъалаи ёфтани квадратураи хатти каҷи $y = x^n$ -ро, ки дар ин ҷо $n$ адади бутуни дилхоҳ аст, ҳал кард. Инро истифода бурда, ӯ ҳалли якчанд масъаларо оид ба ёфтани маркази вазнинӣ пешниҳод намуд. *Иоҳан Кеплер* (1571–1630) барои ҳосил кардани қонунҳои ҳаракати сайёраҳо ғояи интегралгирии тақрибиро истифода бурд. *Исаак Барроу* (1630–1677), ки устоди Нютон буд, алоқаи байни интегралгирӣ ва ҳосилагириро хеле хуб дарк карда буд. Теоремаи дар банди 5 исбот кардаамон ба ӯ мансуб аст.

Назарияи соф илмии ҳисоби интегралиро Нютон ва Лейбнитс (новобаста ба ҳамдигар) пешниҳод кардаанд. Онҳо ба ғояҳои дар ҳалли масъалаҳои хусусӣ истифодашуда такя карда, назарияи умумиро сохта, формулаеро кашф кардаанд, ки ҳоло номи онҳоро дорад. Вале масъалаи ёфтани функсияҳои ибтидоӣ барои бисёр функсияҳо дар пеш буд.

Дар асри оянда методҳои анализи математикӣ боз ҳам инкишоф ёфтанд. Дар ин кор пеш аз ҳама *Леонард Эйлер* (1707–1783) ва И. Бернулли саҳмгузоранд. Эйлер тадқиқи системавии интегралгирии функсияҳои элементариро ба итмом расонид.

Дар инкишофи ҳисоби интегралӣ олимони рус *М.В.Остроградский* (1801–1862), *В.Я. Буняковский* (1804–1889), *П.Л. Чебишёв* (1821–1894) фаъолона иштирок кардаанд. Масалан, Чебишёв нишон дод, ки интегралҳои функсияҳои элементарӣ метавонанд функсияҳои элементарӣ набошанд. Ин натиҷаи барҷастаи илмӣ ба ҳисоб меравад. Танҳо дар асри XIX баёни қатъии назарияи интеграл бо кӯшиши олими олмонӣ *Бернхард Риман* (1826–1866) ва олими фаронсавӣ *Гастон Дарбу* (1842–1917) ба вуҷуд омад. Дар ибтидои асри XX аз тарафи риёзидонҳои фаронсавӣ *Анри Лебег* (1875–1941) ва *Арно Данжуа* (1884–1974), риёзидони рус *Александр Хинчин* (1894–1959) такмилҳои гуногуни мафҳуми интеграл пешниҳод карда шудаанд.

## МАШҚҲОИ ИЛОВАГӢ ДОИР БА БОБИ 1

**Ба параграфи 1.**

**84.** Магар барои функсияи $f(x)$ функсияи $F(x)$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ функсияи ибтидоӣ аст:

а) $f(x)=4x-2$, $F(x)=2x^2-2x+5$;

б) $f(x)=-x^4+3$, $F(x)=-\dfrac{x^5}{4}+3x+2$;

в) $f(x)=-\cos\dfrac{x}{4}+2$, $F(x)=-4\sin\dfrac{x}{4}+2x+1$;

г) $f(x)=\sin(2x+1)$, $F(x)=-\dfrac{\cos(2x+1)}{2}+10$?

**85.** Оё дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ шуда метавонад:

а) $F(x)=x^3-2x$, $f(x)=3x^2-2$;

б) $F(x)=\dfrac{1}{x^4}-\cos x$, $f(x)=-\dfrac{1}{x^5}-\sin x$;

в) $F(x)=x^4+1$, $f(x)=-\dfrac{x^5}{5}+x$;

г) $F(x)=2x+\sin x$, $f(x)=2+\cos x$?

**86.** Барои функсия намуди умумии функсияҳои ибтидоиро нависед:

а) $f(x)=kx+b$ ($k$ *ва* $b$ - доимиҳо); б) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

в) $f(x)=x^n$ ($n$ -адади бутун, $n\neq-1$); г) $f(x)=\sin x$.

**87.** Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро ёбед, ки он дар нуқтаи додашуда қимати маълумро мегирад:

а) $f(x)=\sqrt{x}+x$, $F(4)=10$; б) $f(x)=\cos x$, $F(\pi)=\pi$;

в) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $F(\sqrt{2})=0$;   г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$, $F(4)=12$.

**88.** Барои функсияи $f(x)$ намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

а) $f(x)=\cos 2x-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$;   б) $f(x)=\frac{4}{x^3}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $f(x)=(2-3x)^4-\frac{1}{(4x-2)^3}$;   г) $f(x)=x-8\sin 2x$.

**89.** Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M$ мегузарад:

а) $f(x)=(4-2x)^3$,   $M(3;6)$;

б) $f(x)=\cos 2x$,   $M(\frac{\pi}{4};-4)$;

в) $f(x)=(3x-4)^{\frac{4}{5}}$,   $M(1;3)$;

г) $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$,   $M(5;2)$.

**Ба параграфи 2.**

**90.** Ҳисоб кунед:

а) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x+4)^2}$;   б) $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;   в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\sin x dx$;   г) $\int_{0}^{4}x^3dx$.

**91.** Интегралро ҳисоб кунед:

а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 6x dx$;   б) $\int_{-3}^{3}(x^5-x)dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)dx$; г) $\int_0^1(3x-1)^{\frac{3}{5}}dx$.

**92.** Трапетсияи каҷхаттаи бо хатҳои додашуда маҳдудро тасвир кунед ва масоҳати онро ёбед:

а) $y=5-3x$, $y=0$, $x=0$, $x=-2$;

б) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=0$, $x=1$;

в) $y=-x^3$, $y=0$, $x=-3$;

г) $y=\cos x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

**93.** Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ёбед:

а) $y=\sin x$, $y=\frac{1}{2}$; б) $y=2\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$, $x=9$;

в) $y=x^2$, $y=4x$; г) $y=8-x^2$, $y=4$.

## МАСЪАЛАҲОИ ТЕСТӢ ДОИР БА БОБИ 1

**Ба парарафи 1.**

**1.** Барои функсияи $f(x)=2x-3$ намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

A) $F(x)=2x^2-3x+C$; B) $F(x)=x^2-3x+C$;

C) $F(x)=2x-3x^2+C$; D) $F(x)=x^2+C$.

**2.** Барои функсияи $f(x)=2\cos x$ намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

A) $F(x)=2\sin x+C$; B) $F(x)=-2\sin x+C$;

C) $F(x)=4\sin x+C$; D) $F(x)=\sin x+C$.

**3.** Барои функсияи $f(x)=x^5$ намуди умумии функсияи ибтидой ёфта шавад:

A) $F(x)=6x^6+C;$ B) $F(x)=\frac{1}{5}x^6+C;$

C) $F(x)=\frac{1}{6}x^6+C;$ D) $F(x)=\frac{5}{6}x^6+C.$

**4.** Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи $f(x)=\frac{3}{x^4}$ ёфта шавад:

A) $F(x)=-\frac{1}{x^3}+C;$ B) $F(x)=\frac{2}{x^3}+C;$

C) $F(x)=\frac{4}{x^5}+C;$ D) $F(x)=\frac{1}{x^3}+C.$

**5.** Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи $f(x)=-\sin 2x$ -ро ёбед:

A) $F(x)=2\cos 2x+C;$ B) $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C;$

C) $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+C;$ D) $F(x)=-\cos 2x+C.$

**6.** Барои функсияи $f(x)=-4x+2$ намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

A) $F(x)=-2x^2+2x+C;$ B) $F(x)=4x^2+C;$

C) $F(x)=2x^2+x+C;$ D) $F(x)=-2x^2+C.$

**7.** Барои функсияи $f(x)=(2x+1)^3$ намуди умумии функсияи ибтидой ёфта шавад:

A) $F(x)=\frac{1}{16}(2x+1)^4+C;$ B) $F(x)=\frac{1}{4}(2x+1)^4+C;$

C) $F(x)=\frac{1}{8}(2x+1)^4+C;$ D) $F(x)=\frac{1}{6}(2x+1)^4+C.$

**8.** Барои функсияи $f(x)=\frac{2}{\cos^2 x}$ намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

A) $F(x)=2ctgx+C;$ B) $F(x)=-2tgx+C;$

C) $F(x)=\frac{1}{2}tgx+C;$ D) $F(x)=2tgx+C.$

**9.** Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи $f(x)=\dfrac{4}{\cos^2(1-2x)}$ -ро ёбед:

A) $F(x)=2ctg(1-2x)+C;$ B) $F(x)=-\frac{1}{2}tg(1-2x)+C;$

C) $F(x)=2tg(1-2x)+C;$ D) $F(x)=-2tg(1-2x)+C.$

**10.** Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи $f(x)=\dfrac{9}{\sin^2(2-3x)}$ - ро ёбед:

A) $F(x)=3ctg(2-3x)+C;$ B) $F(x)=-3ctg(2-3x)+C;$

C) $F(x)=6ctg(2-3x)+C;$ D) $F(x)=9ctg(2-3x)+C.$

**11.** Барои функсияи $f(x)=\dfrac{3}{x^4}+1$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро ёбед, ки он шарти $F(1)=8$ -ро қаноат мекунонад:

A) $F(x)=-\dfrac{1}{x^3}+x+8;$ B) $F(x)=\dfrac{1}{x^3}+8;$

C) $F(x)=\dfrac{4}{x^5}+x+6;$ D) $F(x)=\dfrac{1}{x^3}+x+8.$

**12.** Барои функсияи $f(x)=\dfrac{2}{\sin^2 x}$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро ёбед, ки он шарти $F(\frac{\pi}{4})=-4$ - ро қаноат мекунонад:

A) $F(x)=-2ctgx+2;$ B) $F(x)=-2ctgx-2;$

C) $F(x)=\frac{1}{2}ctgx+2;$ D) $F(x)=2tgx-2.$

**13.** Барои функсияи $f(x)=(1-2x)^3$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро ёбед, ки он шарти $F(-0{,}5)=-1$ -ро қонеъ мекунонад:

A) $F(x)=\frac{1}{12}(1-2x)^4$; B) $F(x)=\frac{1}{4}(1-2x)^4+1$;

C) $F(x)=\frac{1}{8}(1-2x)^4+1$; D) $F(x)=-\frac{1}{8}(1-2x)^4+1$.

**14.** Барои функсияи $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро ёбед, ки он шарти $F(-\pi)=-3$ - ро қаноат мекунонад:

A) $F(x)=2\sin\frac{x}{2}-1$; B) $F(x)=2\sin\frac{x}{2}+1$;

C) $F(x)=2\sin\frac{x}{2}-5$; D) $F(x)=\sin\frac{x}{2}+1$.

**15.** Барои функсияи $f(x)=x^2-4x$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(3;5)$ мегузарад:

A) $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$; B) $F(x)=x^3-2x^2+9$;

C) $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+14$; D) $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+8$.

**16.** Барои функсияи $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(0;3)$ мегузарад:

A) $F(x)=-2\cos\frac{x}{2}+2$; B) $F(x)=-2\cos\frac{x}{2}+5$;

C) $F(x)=2\sin\frac{x}{2}-5$; D) $F(x)=2\cos\frac{x}{2}+5$.

**17.** Барои функсияи $f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ мегузарад:

A) $F(x) = 2ctgx + 3;$ B) $F(x) = -3tgx - 3;$

C) $F(x) = -3tgx + 3;$ D) $F(x) = 3tgx - 3.$

**18.** Барои функсияи $f(x) = -2x - 3$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(3; 5)$ мегузарад:

A) $F(x) = -x^2 - 3x + 23;$ B) $F(x) = -x^2 + 13;$

C) $F(x) = -x^2 - 3x + 19;$ D) $F(x) = -x^2 - 3x.$

**19.** Барои функсияи $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функсияи ибтидоиро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(-\frac{1}{3}; 4)$ мегузарад:

A) $F(x) = -\frac{1}{x} - 1;$ B) $F(x) = \frac{1}{x} - 1;$

C) $F(x) = -\frac{1}{x} + 1;$ D) $F(x) = -\frac{2}{x} + 1.$

**20.** Барои функсияи $f(x) = -\cos\frac{x}{3}$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(\frac{\pi}{2}; 0{,}5)$ мегузарад:

A) $F(x) = 3\sin\frac{x}{3} - 2;$ B) $F(x) = -3\sin\frac{x}{3} + 2;$

C) $F(x) = -\sin\frac{x}{2} + 2;$ D) $F(x) = -3\sin\frac{x}{3} + 1.$

**21.** Барои функсияи $f(x) = \sqrt{1 - 2x} + \frac{1}{x^2}$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(-4; 0{,}25)$ мегузарад:

A) $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(1 - 2x)^3} - \frac{1}{x} + 9;$ B) $F(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{(1 - 2x)^3} + \frac{1}{x} + 7;$

C) $F(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3} - \frac{1}{x} - 9$; D) $F(x) = \frac{1}{4}\sqrt{(1-2x)^3} - \frac{2}{x} + 6$.

**22.** Барои функсияи $f(x) = x^3 - \frac{2}{\sqrt{3x-2}}$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(2; -\frac{1}{3})$ мегузарад:

A) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}\sqrt{3x-2} + 1$; B) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{3x-2} + 1$;

C) $F(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3x-2} - 1$; D) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}\sqrt{3x-2} - 1{,}5$.

**23.** Барои функсияи $f(x) = \frac{4}{x^3} - 8x^{-2}$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M(2; 5{,}5)$ мегузарад:

A) $F(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{8}{x} + 1$; B) $F(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x} + 2$;

C) $F(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x} + 2$; D) $F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + 2$.

**24.** Мувофиқати байни функсияи $f(x)$ ва функсияи ибтидоии $F(x)$ -и сутунҳои чап ва ростро муайян кунед:

$A)$ $f(x) = 8 - 3x^2$, 1. $F(x) = -\frac{1}{12}(1-2x)^6 + C$;

$B)$ $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2$, 2. $F(x) = 8x - x^3 + C$;

$C)$ $f(x) = (1-2x)^5$, 3. $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 - x^3) + C$;

$D)$ $f(x) = (2x-3)^4$, 4. $F(x) = \frac{1}{8}(2x-3)^4 + C$;

5. $F(x) = \frac{1}{10}(2x-3)^5 + C$.

**25.** Мувофиқати байни функсияи $f(x)$ ва функсияи ибтидоии $F(x)$ -и сутунҳои чап ва ростро муайян кунед:

$A)\ f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - 3\right),$ 1. $F(x) = 2sin\left(\frac{x}{2} - 3\right) + C;$

$B)\ f(x) = \cos(2x - 1),$ 2. $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - 1) + C;$

$C)\ f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - 3\right),$ 3. $F(x) = -2\cos\left(\frac{x}{2} - 3\right) + C;$

$D)\ f(x) = \sin(2x - 1),$ 4. $F(x) = \frac{1}{2}\cos(2x - 1) + C;$

5. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x - 1) + C.$

**Ба параграфи 2.**

**26.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx.$$

$A)\ \frac{7}{3};$ $B) -\frac{8}{3};$ $C)\ \frac{5}{9};$ $D)\ \frac{3}{7}.$

**27.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_0^3 (3x^2 + x - 1)dx.$$

$A)\ \frac{7}{3};$ $B) -\frac{8}{3};$ $C)\ 27\frac{1}{2};$ $D)\ 28\ \frac{1}{2}.$

**28.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^1 (2x^2 - 3x - 2)dx.$$

$A)\ \frac{7}{3};$ $B) -\frac{8}{3};$ $C)\ \frac{5}{9};$ $D)\ \frac{3}{7}.$

**29.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-3}^{1}(9x^2-2x)dx.$$

$A)$ 88; $B)$ 91; $C)$ 92; $D)$ 64 .

**30.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{1}^{2}(x-2)^2dx\ .$$

$A)$ $\frac{7}{3}$; $B)$ $\frac{2}{3}$; $C)$ $\frac{5}{9}$; $D)$ $\frac{1}{3}$.

**31.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{0}^{4}(3x-1)^2dx\ .$$

$A)$ 148; $B)$ 143; $C)$ 138; $D)$ 144 .

**32.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(sinx-2cosx)dx\ .$$

$A)$ $-2$; $B)$ $-3$; $C)$ 3; $D)$ 2 .

**33.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos^2x}.$$

$A)$ 1; $B)$ $-1$; $C)$ 2; $D)$ $\frac{3}{4}$.

**34.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{0}^{\pi}(1+sinx)dx\ .$$

$A)$ $\pi$; $B)$ $\pi+2$; $C)$ $2\pi$; $D)$ 1 .

**35.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_1^3 \frac{4x^2-1}{2x-1}dx\,.$$

$A)$ 5; $B)$ 7; $C)$ 8; $D)$ 10 .

**36.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-3}^2 (x-1)dx\,.$$

$A)$ $-6{,}5$; $B)$ 4,5; $C)$ $-7{,}5$; $D)$ 3,5 .

**37.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^4 (2x+1)dx\,.$$

$A)$ 16; $B)$ 20; $C)$ 21; $D)$ 18 .

**38.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_2^5 \frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx\,.$$

$A)$ $16\,\frac{1}{3}$; $B)$ $\frac{32}{3}$; $C)$ $16\frac{1}{2}$; $D)$ $\frac{3}{7}$.

**39.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_2^4 |x-3|dx\,.$$

$A)$ 1; $B)$ 2; $C)$ 3; $D)$ 4,5 .

**40.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_0^3 |2x-3|dx\,.$$

$A)$ 3,8; $B)$ 4,8; $C)$ $\frac{5}{9}$; $D)$ 4,5 .

**41.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^{1}(2|x|+1)dx\,.$$

$A)$ 2; $B)$ 3; $C)$ 4; $D)$ 4,5 .

**42.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^{2}(3-2|x-1|)dx\,.$$

$A)$ 3,8; $B)$ 4; $C)$ 3; $D)$ 4,5 .

**43.** Интеграли зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{0}^{1}\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|+2x\right)dx\,.$$

$A)$ $3\frac{1}{3}$; $B)$ 4,8; $C)$ $1\frac{1}{4}$; $D)$ $4\frac{1}{4}$.

**44.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y=-x^2-1$, $y=0$, $x=0$ ва $x=2$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)$ 2; $B)$ 3; $C)$ $2\frac{1}{3}$; $D)$ $4\frac{2}{3}$.

**45.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y=x^2-2x+3$, $y=0$, $x=0$ ва $x=3$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)$ 7; $B)$ 9; $C)$ 8; $D)$ 6 .

**46.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y=-\frac{1}{3}x^2+3$, $y=0$, $x=0$ ва $x=3$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)$ 2; $B)$ 3; $C)$ 8; $D)$ 6 .

**47.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y=\frac{1}{x^2}$, $x=1$, $x=2$ ва $y=0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)$ 2; $B)$ 3; $C)$ $\frac{1}{2}$; $D)$ 1 .

**48.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y=4x-x^2$ ва $x+y=0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)\ 22;\qquad B)\ 20\frac{5}{6};\qquad C)\ 12\frac{1}{3};\qquad D)\ 11.$

**49.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = 6 - x^2$ ва $y = 2x + 3$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)\ 10\frac{2}{3};\qquad B)\ 3\frac{1}{10};\qquad C)\ 2\frac{1}{3};\qquad D)\ 6\frac{2}{3}.$

**50.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ ва $y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)\ 2;\qquad B)\ \frac{3}{2};\qquad C)\ \frac{4\sqrt{2}}{3};\qquad D)\ 4\sqrt{2}.$

**51.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = \sqrt{x+1}$, $x = 1$ ва $y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)\ 2;\qquad B)\ 3;\qquad C)\ 2\frac{1}{3};\qquad D)\ \frac{4\sqrt{2}}{3}.$

**52.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ ва $x = \pi$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)\ 1;\qquad B)\ \frac{\sqrt{2}}{2};\qquad C)\ \frac{1}{3};\qquad D)\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$

**53.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = 2cosx$, $y = 1$, $x = \frac{\pi}{6}$ ва $x = \frac{\pi}{2}$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)\ 2\pi;\qquad B)\ 3\pi - 1;\qquad C)\ \frac{\pi}{3} - 1;\qquad D)\ \frac{\pi}{3}.$

**54.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = 1 + \frac{1}{2}cosx$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ ва $y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)\ \pi + 1;\qquad B)\ \frac{\pi}{2} + 1;\qquad C)\ \frac{\pi}{3};\qquad D)\ \pi.$

**55.** Масоҳати соҳаи бо хатҳои $y = sinx - \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ ва $y = 0$ маҳдуд ҳисоб карда шавад.

$A)\ \sqrt{3}+\frac{\pi}{6};$ $B)\ \sqrt{3}-\frac{\pi}{3};$ $C)\ \sqrt{3}+\frac{\pi}{3};$ $D)\ \sqrt{3}-\frac{\pi}{6}.$

**56.** Мувофиқати байни интегралҳо ва қиматҳои онҳо муайян карда шавад:

$A)\ \int_{-1}^{2}(1-2x)dx,$ 1. $\frac{2}{3};$

$B)\ \int_{1}^{2}(3-x)^2dx,$ 2. $0;$

$C)\ \int_{0}^{2}\frac{dx}{(x-3)^2},$ 3. $\frac{1}{3};$

$D)\ \int_{-4}^{0}\sqrt{1-2x}dx,$ 4. $\frac{7}{3};$

5. $\frac{26}{3}.$

**57.** Мувофиқати байни интегралҳо ва қиматҳои онҳо муайян карда шавад:

$A)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(cosx-2sinx)dx,$ 1. $-1;$

$B)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{cos^2x}dx,$ 2. $\frac{\pi+2}{2};$

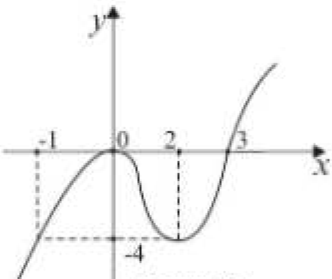
$C)\ \int_{0}^{\pi}cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx,$ 3. $3;$

$D)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx + cosx)^2 dx,$ 4. $\frac{\pi}{2}$;

5. $\frac{\pi}{3}$.

## ҶАВОБҲО

**2.** а) Ҳа; б) не; в) ҳа; г) не; д) не; е) ҳа. **3.** Масалан: а) $1{,}5x+1$; б) $x^2+2$; в) $-\cos x$; г) $\sin x$; д) $-\frac{x^2}{2}+2$; е) $-\sin x$; ж) $-3x+4$; з) $\cos x$; и) $\frac{x^3}{3}$; к) $\frac{x^6}{6}$; л) 1; м) $-\frac{x^4}{4}+2$. **4.** а) $1{,}5x$; б) $\sin x$; в) $\frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x}$; д) $tgx$; е) $-2\cos x$; ж) $-ctgx$; з) $-\frac{1}{4}\cos 4x$; и) $-\frac{\sin(2x+3)}{2}$. **5.** Масалан: а) $2x^2+1$ ва $2x^2+3$; б) $-\cos x+x+1$ ва $-\cos x+x+2$; в) $\frac{x^4}{4}+8$ ва $\frac{x^4}{4}+11$;

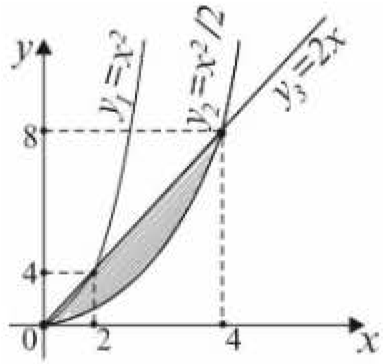


Расми 10

г) $2x-\sin x+5$ ва $2x-\sin x+2$. **6.** а) $g(x)$; б) $f(x)$; в) $h(x)$. **7.** 1. **8.** 4. **9.** 1. **10.** Расми 10. **11.** 1,5. **12.** а) не; б) ҳа; в) ҳа; **14.** Ҳа, масалан, $f(x)=a,\ a\in R=(-\infty;\infty)$ даврӣ буда, функсияи ибтидоияш $F(x)=ax+b$ ғайридаврӣ мебошад. **15.** *Исбот.* Агар $f(x)=-f(-x)$ ё $F'(x)=-F'(-x)=\left(F(-x)\right)'$ бошад, пас $F(x)=F(-x)+C$. Аз ин ҷо $F(0)=F(-0)+C$ ё $C=0$. Пас $F(-x)=F(x)$. **16.** $x$-$y$. **17.** $(-\infty;1]\cup[5;\infty)$. **18.** 585. **19.** –1. **20.** $x^2$-

$x$-6=0. **21.** а) 2x+C; б) sinx+C, в) $\frac{x^6}{6}+C$, г) $-\frac{1}{3x^3}+C$, д) cos$x$+$C$, е) –4$x$+$C$. **22.** а) $-\frac{1}{2x^2}+10{,}5$; б) $-ctgx-1$; в) $\frac{x^7+22}{7}$; г) – (cos$x$+4). **23.** а) $\frac{x^4}{4}-3$; б) – cos$x$+4; в) $tgx-1$; г) – 2$x$ + 11; д) $-\frac{1}{2x^2}+5$; е). – sin$x$ +1. **24.** а) $x(t)=-\frac{t^3}{6}-t+\frac{22}{3}$; б) $x(t)=-\cos t-1$. **25.** –1. **26.** 2. **27.** (4;1). **28.** $(-\infty;0)\cup[2;3]$. **29.** а) $2x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$; б) $\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3x^3}-\cos x+C$; в) $tgx-\cos x+C$; г) $-\frac{1}{x}+4\cos x+C$. **30.** а) $\frac{(3x-1)^7}{21}+C$; б) $-\frac{(2-5x)^4}{20}+C$; в) $-\frac{\cos(9x+1)}{9}+C$; г) $\frac{1}{4}\sin(4x-9)+C$. **31.** а) $\frac{2}{7(2-7x)^2}+C$; б) $\frac{2}{9(4-3x)^3}+C$; в) $\frac{3}{4}tg(4x-1)+C$; г) $\frac{1}{2x^4}-\frac{1}{3}ctg(3x-1)$. **32.** а) $x^2-\frac{1}{2x^2}-\frac{23}{8}$; б) $\frac{x^5}{5}-x+5{,}6$; в) $-\frac{3}{2}x^2+x+7$; г) $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3}x^6+2x+7\frac{1}{3}$. **33.** а) $x+\frac{1}{6}\cos 6x-2\sin(\frac{\pi}{3}-x)+C$; б) $\frac{1}{3}tg3x-\frac{5\sqrt[5]{(3-x)^4}}{4}-\frac{1}{2}x^4+C$; в) $-\frac{1}{4}ctg(4x+1)+4\sin(2-x)+\frac{3}{2}x^2+C$; г) $\frac{1}{4(4-2x)^2}++\frac{4}{7}\sqrt{7x-1}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C$. **34.** $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+t$. **35.** $x(t)=\frac{2}{3}t^4+\frac{5}{2}t^2+8t+16$. **36.** а) $x(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+4t-9\frac{1}{6}$; б) $x(t)=-\frac{4}{3}\sin t+\frac{5}{3}t+2-\frac{5}{3}\pi$. **37.** $y_{\min}=y(2)=-44$,

$y_{\max} = y(-1) = 37$ . **38.** (4;1) ва (1; 4). **39.** $90^0$ .**40.** Барои $c$>1, қимати хурдтарини бутуни $c$ ба 2 баробар аст. **41.** 15 км ва 12 км. **42.**



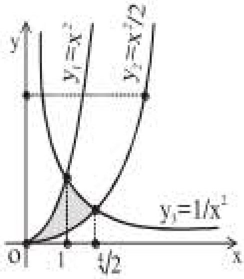
Расми 11.

а) $2\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{5}$; в) 2; г) 1. **43.** а) $4\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)$; в) $\frac{\pi}{2}+2$; г) $85\frac{1}{3}$. **44.** а) $2\frac{2}{3}$; б) 2,5; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{4}$. **45.**

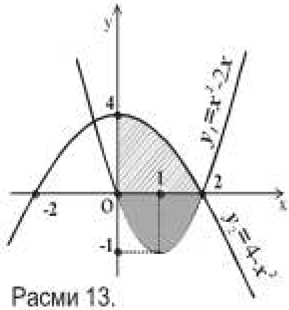
$-\frac{1}{2}ctg(2x+1)+\frac{1}{9}\sqrt{(6x-5)^3}+\frac{2}{5}x^5+C$ . **46.** 4. **47.** (-3; -1) ва (3; 1). **48.** $45^0$. **49.** Дар $(-\infty;-0{,}5)$ ва $(0{,}5;+\infty)$ камшаванда буда, дар $(-0{,}5;\ 0{,}5)$ афзуншаванда аст. $f_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$, $f_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

**50.** а) $4\frac{1}{2}$; б) $\frac{4}{3}$; в) 9; г) 5. **51.** а) $1\frac{1}{3}$; б) 36; в) $10\frac{2}{3}$; г) $4\sqrt{3}$ . **52.** а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{11}{20}$; в) $2\frac{2}{3}$; г) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$. **53.** а) 4. *Нишондод:* дар як системаи координатӣ графики функсияҳои $y_1=x^2$, $y_2=\frac{x^2}{2}$ ва $y_3=2x$-ро кашида мебинем, ки масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои рах – рах ҷудо шудааст, ёфтан зарур аст (ниг. ба расми 11).

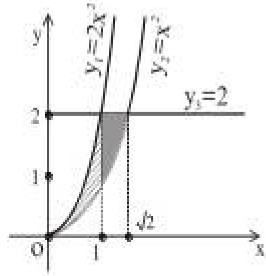
б) $\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ (ниг. ба расми 12); в) $6\frac{2}{3}$ (ниг. ба расми 13);




Расми 12.

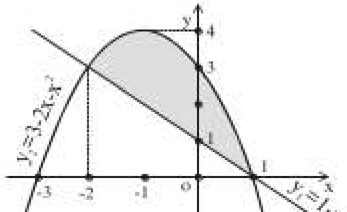



Расми 13.

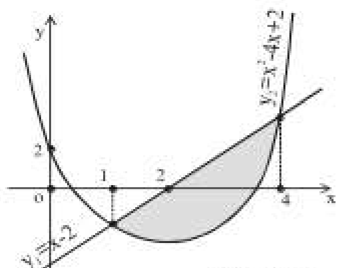



Расми 14.

г) $\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}$ (ниг. ба расми 14). **54.** 26. **55.** $\sqrt{a}$. **56.** $\frac{5\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$. **57.** 0. **58.** $\frac{1}{4}\sin(4x-5)+C$. **59.** а) 4; б) 1; в) $9\frac{1}{3}$; г) $\sqrt{3}-1$. **60.** а) $\frac{16}{3}$; б) 30; в) $3\sqrt[3]{2}$; г) $\frac{1}{6}$. **61.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **62.** а) 76; б) 14; в) $-\frac{2}{15}$; г) $\frac{9}{8}$. **63.** а) –18; б) 290; в) $\sqrt{5}-1$; г) $2(\sqrt{5}-\sqrt{2})$. **64.** а) 9; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 9. **65.** а) $2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$; б) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) 4,5. **66.** а) 4,5 (ниг. ба расми 15). б) $1\frac{1}{3}$; в) 4,5; г) 4,5 (ниг. ба расми 16).

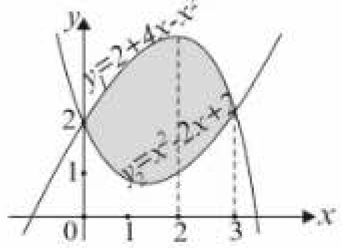



Расми 15.

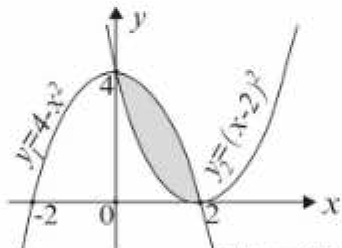



Расми 16.

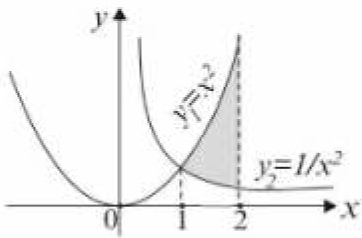
**67.** а) 9 (ниг. ба расми 17); б) $2\frac{2}{3}$ (ниг. ба расми 18); в) $1\frac{5}{6}$ (ниг. ба расми 19); г) $\frac{1}{12}$ (ниг. ба расми 20).



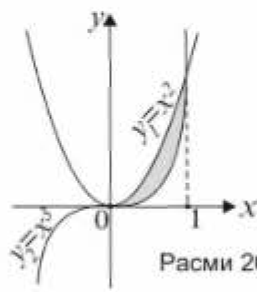
Расми 17.



Расми 18.



Расми 19.



Расми 20.

**68.** $2\frac{1}{4}$. **69.** $1\frac{1}{3}$. **70.** *Нишондод*: $n^3+3n^2+5n=n^3-n+(3n^2+6n)=$ $=(n-1)\,n\,(n+1)+3n\,(n+2)$. Дар ифодаи охирин ҳар дуи ҷамъшавандаҳо ба 3 тақсим мешаванд (барои чӣ?), пас суммаашон низ ба 3 тақсим мешавад. **71.** а) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x+1)^4}+\sqrt{2x-1}+C$; б) $\frac{5}{12}(3x+2)^{\frac{4}{5}}-\frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{3}-2x)$. **72.** $[6;11]$. **73.** $\left(\frac{1-\sqrt{82}}{3};-2\right)\cup\left(3;\frac{1+\sqrt{82}}{3}\right)$. **74.** 5м. **75.** 76м.

**76.** $\frac{\vartheta_0^2}{2g}$ $(g=9,8\frac{м}{сония^2})$. **77.** 5,4 Ҷ. **78.** 0,16 Ҷ. **79.** 675 Ҷ. **80.** 2.

**81.** $a-b$. **82.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{3}{2}$. **83.** 21. **84.** а) ҳа; б) не; в) ҳа; г) ҳа.

**85.** а) ҳа; б) не; в) не; г) ҳа. **86.** а) $\frac{kx^2}{2}+bx+C$; б) $tgx+C$; в) $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$; г) $-\cos x+C$. **87.** а) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}-\frac{10}{3}$; б) $\sin x+\pi$; в) $-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4}$; г) $2\sqrt{x-3}+10$. **88.** а) $\frac{\sin 2x}{2}+2ctg\frac{x}{2}+C$; б) $-\frac{2}{x^2}-\sqrt{x}+C$; в) $-\frac{1}{15}(2-3x)^5+\frac{1}{8(4x-2)^2}+C$; г) $\frac{x^2}{2}+4\cos 2x+C$. **89.** а) $-\frac{1}{8}(4-2x)^4+8$; б) $\frac{\sin 2x}{2}-4{,}5$; в) $\frac{5}{27}(3x-4)^{\frac{9}{5}}+\frac{86}{27}$; г) $-\sqrt{2x-1}+5$. **90.** а) $\frac{1}{3}$; б) 2; в) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 64. **91.** а) 0; б) 0; в) 1; г) $\frac{5}{24}\left(\sqrt[5]{256}-1\right)$. **92.** а) 16; б) $\frac{1}{3}$; в) 20,25; г) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **93.** а) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; б) $25\frac{1}{3}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) $10\frac{2}{3}$.

## Масъалаҳои тестӣ

1. B. 2. A. 3. C. 4. A. 5. C. 6. A. 7. C. 8. D. 9. D. 10. A. 11. A. 12. B. 13. D. 14. A. 15. C. 16. B. 17. D. 18. A. 19. C. 20. B. 21. C. 22. A. 23. B. 24. A-2; B-3; C-1; D-5. 25. A-3; B-2; C-1; D-5. 26. A. 27. D. 28. B. 29. C. 30. D. 31. A. 32. C. 33. A. 34. B. 35. D. 36. C. 37. B. 38. C. 39. A. 40. D. 41. C. 42. B. 43. C. 44. D. 45. B. 46. D. 47. C. 48. B. 49. A. 50. C. 51. D. 52. B. 53. C. 54. A. 55. D. 56. A-2; B-4; C-1; D-5. 57. A-1; B-3; C-4; D-2.

*Боби II*

# ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГИЮ ЛОГАРИФМӢ

## §3. ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ. ГРАФИК ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

### 9. ТАЪРИФ ВА ГРАФИКИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Мо ба омӯзиши функсияе шуруъ мекунем, ки вай дар математика ва татбиқи он дар физика, техника, иқтисодиёт, ҷомеашиносӣ ва экология нақши муҳим мебозад.

Т а ъ р и ф. **Функсияе, ки бо формулаи $y = a^x$ ифода мешавад, функсияи нишондиҳандагӣ ном дорад.**

Дар ин ҷо $a$ адади додашуда буда, *асос* ном дорад. Тағйирёбандаи $x$ қиматҳои ҳақиқӣ қабул мекунад, яъне ҳам ратсионалӣ ва ҳам ирратсионалӣ шуда метавонад. Вай *нишондиҳандаи дараҷа* ё *дараҷа* ном дорад. Тавре медонем, барои он ки ифодаи $a^x$ барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбанда маъно дошта бошад, зарур аст, ки $a > 0$ шавад (Масалан, ифодаи $(-1)^{\frac{1}{2}}$ маъно надорад). Ҳангоми $a = 1$ будан қимати функсия доимӣ аст (Аниқаш, барои ҳамаи қиматҳои аргумент қимати функсия ба 1 баробар мешавад). Аз ҳамин сабаб ҳисоб карда мешавад, ки $a > 0$ ва $a \neq 1$ аст.

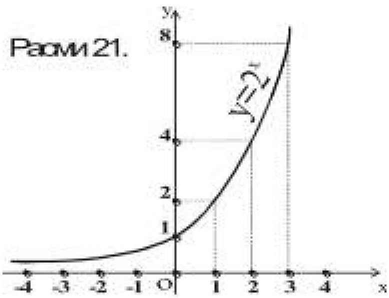
Барои аёнтар дарк кардани графики функсияи $y = a^x$, графики функсияҳои, масалан, $y = 2^x$ ва $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ -ро месозем.

Бо мақсади ёфтани якчанд нуқтаи графики функсияи $y = 2^x$ ҷадвали қиматҳои онро бо қадами 1 тартиб медиҳем.

Ин нуқтаҳоро дар ҳамвории координатии $(x; y)$ қайд ва баъд онҳоро бо хатти муназзами яклухт пайваст карда, графикро ҳосил мекунем (расми 21).

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = 2^x$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

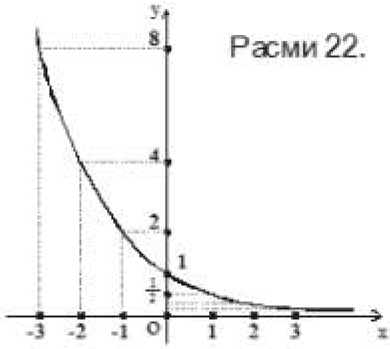
Расми 21.




Барои сохтани графики $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ худи ҳамин ҷадвалро истифода кардан мумкин аст. Барои ин аз баробарии $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ истифода бурда мебинем, ки қимати ин функсия дар нуқтаи $x = -3$ ба қимати $y = 2^x$ дар нуқтаи $x = 3$ баробар аст ва ҳоказо. Яъне ҷадвали қиматҳои $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ чунин аст:

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

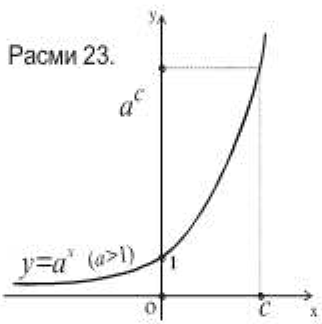
Дар ҳамвории координатӣ ин нуқтаҳоро қайд мекунем ва онҳоро бо хатти муназзам пайваст намуда, графики $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ -ро ҳосил мекунем (расми 22).



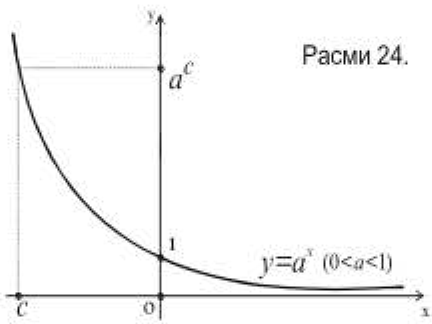

Расми 22.

Муоинаи дақиқи ин ду график ба хулоса меорад, ки графики функсияи $y=a^x$: а) ҳангоми $a>1$ будан; б) ҳангоми $0<a<1$ будан схемавӣ намуди зеринро дорад (расмҳои 23 ва 24):

Расми 23.




Расми 24.

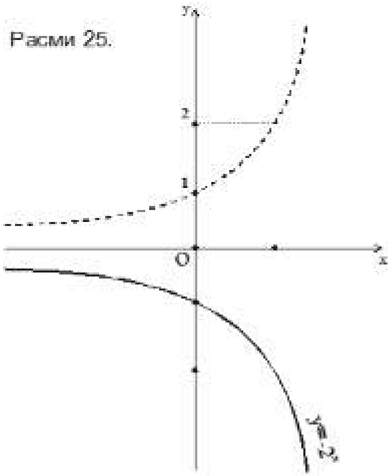



Сохтани графики ду функсияеро, ки ба сохтани графики функсияи нишондиҳандагӣ оварда мешаванд, дида мебароем.

Мисоли 1. Графики функсияи $y=-2^x$ -ро месозем.

Ҳал. Мо аллакай графики функсияи $y=2^x$ -ро медонем. Агар нуқтаи $(a;b)$ ба он тааллуқ дошта бошад, пас $b=2^a$ аст. Аз ин ҷо $-b=-2^a$. Аз ин баробарӣ бармеояд, ки нуқтаи $(a;-b)$

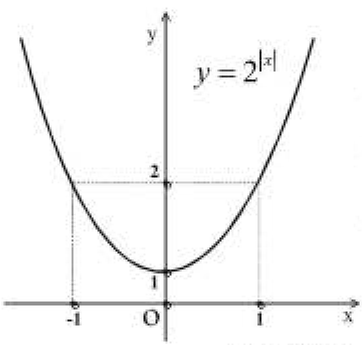
Расми 25.




дар графики $y = -2^x$ ҷойгир аст. Баръакс, агар нуқтаи $(c; d)$ дар графики $y = -2^x$ ҷойгир бошад, пас $d = -2^c$, яъне $-d = 2^c$. Аз ин ҷо бармеояд, ки нуқтаи $(c; -d)$ ба графики $y = 2^x$ тааллуқ дорад.

Ҳамин тариқ, барои сохтани графики функсияи $y = -2^x$ кифоя аст, ки графики $y = 2^x$ нисбат ба тири $OX$ симметрӣ инъикос карда шавад (расми 25).

М и с о л и 2. Графики $y = 2^{|x|}$-ро месозем.




Расми 26.

Ҳ а л. Агар $x \geq 0$ бошад, он гоҳ $|x| = x$ ва $y = 2^x$ аст. Барои ҳамин дар чоряки якум графики матлуб бо графики функсияи $y = 2^x$ якхела аст. Агар $x < 0$ бошад, $|x| = -x$ ва $y = 2^{|x|} = 2^{-x}$ мешавад. Яъне, дар чоряки дуюм график айнан графики функсияи $y = 2^{-x}$ аст (расми 26).

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Таърифи функсияи нишондиҳандагиро диҳед.

**2.** Чаро асосро мусбат ва нобаробари 1 ҳисоб мекунанд?

**3.** Оё графики функсияи нишондиҳандагӣ тири абсиссаро мебурад?

**4.** Барои сохтани графики функсияи нишондиҳандагӣ чӣ тавр рафтор мекунанд?

**5.** Магар графики функсияи нишондиҳандагӣ ба коэффитсиенти *a* вобастагӣ дорад?

**6.** Як функсияи нишондиҳандагӣ тартиб дода, графикашро ба тарви схемавӣ созед.

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

**94.** Аз байни функсияҳои $y=-3x+6$; $y=(0{,}2)^x$; $y=|x+3|$; $y=(-2)^x$; $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$; $y=1^x$, $y=-3^x$ функсияҳои нишондиҳандагиро муайян кунед.

**95.** Ҷадвали қиматҳои функсияи $y=3^x$ -ро аз $-3$ то 3 бо қадами 1 тартиб дода, аз рӯйи он графики функсияҳои $y=3^x$ ва $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ -ро созед.

**96.** Дар як ҳамвории координатӣ графикҳои функсияҳои:

а) $y=2^x$ ва $y=4^x$;   б) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ва $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

-ро кашед.

**97.** Графики функсияҳои $y = 5^x$ ва $y = -5^x$ -ро дар як ҳамвории координатӣ созед.

***Машқҳо барои такрор***

**98.** Соҳаи муайянии функсияи $y = \sqrt{5x - 2x^2}$ -ро ёбед.

**99.** Ҳисоб кунед: а) $81^{0,25} \cdot 27^{-\frac{1}{6}} \cdot 9^{0,75}$; б) $\left(2^{-\frac{1}{7}}\right)^{1,4} \cdot 4^{0,1}$.

**100.** Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед: а) $a - 4a^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}$.

**101.** Қимати калонтарини сеузваи квадратии $-x^2+5x-4$ -ро ёбед.

## 10. ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Боз ба муоинаи графики функсияҳои $y = 2^x$ ва $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ бармегардем (расмҳои 21 ва 22). Графикҳо нишон медиҳанд, ки ин функсияҳо дар тамоми тири ададӣ муайян буда, қиматашон ҳамеша мусбат аст. Ғайр аз ин, онҳо ҳар як қимати худро танҳо як маротиба (дар як нуқта) қабул мекунанд. Бо ибораи дигар, муодилаҳои $2^x = y$ ва $\left(\frac{1}{2}\right)^x = y$ ҳангоми $y \le 0$ будан ҳал надошта, ҳангоми $y > 0$ будан танҳо якто ҳал доранд. Ҳангоми афзудани аргумент функсияи $y = 2^x$ афзуда, функсияи $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ кам мешавад.

Ин андешаҳо ба хулосае меоранд, ки $y = a^x$ - функсияи нишондиҳандагии асосаш адади дилхоҳи $a>0$ ва $a\neq 1$, дорои хосиятҳои зерин аст (Исботи ин хосиятҳо аз доираи курси математикаи мактабӣ берун аст, бинобар ин онҳо оварда намешаванд):

$1^0$. Соҳаи муайянии функсия тамоми маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ $R=(-\infty;\infty)$ аст.

$2^0$. Соҳаи қиматҳои функсия маҷмуи ададҳои ҳақиқии мусбат $R_+=(0;\infty)$ мебошад. Яъне, барои ҳар гуна қимати тағйирёбандаи $x$ қимати функсия мусбат аст.

$3^0$. Функсия ҳар як қимати худро расо як маротиба қабул мекунад. Аз ҳамин сабаб, вай на даврӣ, на ҷуфт ва на тоқ аст.

$4^0$. Функсия қиматҳои хурдтарин ва калонтарин надорад.

$5^0$. Графики функсия тири абсиссаро намебурад. Нуқтаи буриши графики функсияи нишондиҳандагӣ бо тири ордината нуқтаи (0; 1) аст. Координатаҳои ин нуқта ба асоси функсияи нишондиҳандагӣ вобастагӣ надоранд, чунки дараҷаи нулии ҳар гуна адади $a>0$ ба як баробар аст.

$6^0$. Ҳангоми $a>1$ будан функсия дар тамоми нуқтаҳои тири ададии $R$ меафзояд (афзуншаванда аст) ва ҳангоми $0<a<1$ будан дар $R$ кам мешавад (камшаванда аст).

$7^0$. Барои қиматҳои дилхоҳи ҳақиқии $x$ ва $y$ баробариҳои:

$$1)\ a^x\cdot a^y=a^{x+y};\qquad 2)\ \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y};\qquad 3)\ (ab)^x=a^x\cdot b^x;$$

$$4)\ \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x};\qquad 5)\ (a^x)^y=a^{xy}$$

ҷой доранд (дар ин ҷо $a$ ва $b$ ададҳои мусбати нобаробари яканд).

Ин баробариҳоро *хосиятҳои асосии дараҷа* меноманд.

Э з о ҳ. Дурустии хосиятҳои $6^0$ ва $7^0$ ҳангоми ратсионалӣ будани нишондиҳанда исбот шуда буд. Акнун ба хулоса меоем, ки ин хосиятҳо ҳангоми ирратсионалӣ будани дараҷа низ ҷой доранд.

Қайд мекунем, ки хосиятҳои $1^0$-$6^0$ имкон медиҳанд, ки графики функсияи нишондиҳандагӣ схемавӣ, бе пешакӣ тартиб додани ҷадвал сохта шавад. Акнун чанд мисолро дида мебароем, ки ҳалли онҳо ба хосиятҳои функсия такя мекунад.

М и с о л и 1. Маълум, ки нобаробарии $4^m > 4^n$ дуруст аст. $m$ ва $n$ -ро муқоиса мекунем.

Ҳ а л. Ифодаҳои $4^m$ ва $4^n$ -ро ҳамчун қимати функсияи нишондиҳандагии $y = 4^x$ ҳангоми $x = m$ ва $x = n$ будан ҳисоб кардан мумкин аст. Функсияи $y = 4^x$ афзуншаванда мебошад, яъне ба қимати калони функсия қимати калони аргумент рост меояд. Барои ҳамин $m > n$ аст.

М и с о л и 2. Нобаробарии $a^4 < a^6$ ҳангоми $a > 0$ будан дуруст мебошад. Асоси $a$ -ро бо як муқоиса мекунем.

Ҳ а л. Мувофиқи шарт ба қимати хурди аргументи 4 қимати хурди функсияи $a^x$ мувофиқат мекунад. Барои ҳамин функсия афзуншаванда аст. Пас $a > 1$ мебошад.

М и с о л и 3. Аломати решаи муодилаи $0{,}9^x = 4$ -ро муайян мекунем.

Ҳ а л. Азбаски $4 > 0$ аст, пас ин муодила танҳо якто реша дорад. Функсияи $y = 0{,}9^x$ камшаванда аст ва ҳангоми $x = 0$ будан $y = 1$ мебошад. Вале $1 < 4$ аст, пас аломати решаи муодила манфӣ аст.

### *Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон*

**1.** Хосиятҳои функсияи нишондиҳандагиро номбар кунед.

**2.** Ҳангоми ратсионалӣ будани аргумент баробариҳои 3) ва 4)-ро исбот кунед.

**3.** Оё функсияи нишондиҳандагӣ каниш дошта метавонад?

**4.** Барои чӣ графики функсияи нишондиҳандагӣ тири абсиссаро намебурад?

### *Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ*

**102.** Ададҳои $x$ ва $y$ - ро муқоиса кунед, агар нобаробарӣ дуруст бошад:

*а)* $\left(\frac{4}{9}\right)^x < \left(\frac{4}{9}\right)^y$; *б)* $0{,}2^x > 0{,}2^y$; *в)* $\left(\frac{9}{2}\right)^x < \left(\frac{9}{2}\right)^y$.

**103.** Адади мусбати $a$ -ро бо як муқоиса кунед, агар маълум бошад, ки:

а) $a^{0,2} > a^{0,5}$; б) $a^{4,3} < a^3$; в) $a^{\sqrt{5}} > a^2$; г) $a^{\sqrt{2}} < a^{1,4}$.

**104.** Графики функсияро схемавӣ тасвир кунед:

а) $y = 3^x$; б) $y = 0{,}6^x$; в) $y = 1{,}5^x$; г) $y = 0{,}9^x$.

**105.** Соҳаи қиматҳои функсияро ёбед:

а) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$; б) $y = -3^x$; в) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$; г) $y = 6^x - 5$;

д) $y = 2^{x+1} - 2$; е) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 2$; ж) $y = \left|3^x - 3\right|$; з) $y = 7^{|x|}$.

**106.** Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияро ёбед:

а) $y = 2^{\sin x}$; б) $y = 1 + 9^{|\sin x|}$; в) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}$; г) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{|\cos x|} - 1$.

**107.** Аломати решаи муодиларо муайян кунед:

а) $2{,}3^x = 4{,}5$; б) $0{,}2^x = 0{,}3$; в) $0{,}7^x = 2{,}9$; г) $4{,}7^x = 0{,}2$.

**108.** Муодиларо графикӣ ҳал кунед:

а) $2^x = 4$; б) $2^x = 3 - x$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$; г) $3^x = 1 - x$.

**109.** Барои кадом қиматҳои $x$ графикҳои функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ҳамдигарро мебуранд:

а) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2$; б) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 16$;

в) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = \frac{1}{27}$; г) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $g(x) = 0{,}04$?

**110.** Барои кадом қиматҳои $x$ графики функсияи $f(x)$ дар поёни графики функсияи $g(x)$ ҷойгир аст, агар:

а) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 16$; б) $f(x) = 0{,}3^x$, $g(x) = 0{,}027$ бошад?

**111.** Нобаробариро графикӣ ҳал кунед:

а) $2^x > 1 - x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x + 1$.

***Машқҳо барои такрор***

**112.** Қимати ифодаи ададиро ҳисоб кунед:

а) $243^{0,4}$; б) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$;

в) $\sqrt[7]{\frac{1}{9}} : 243^{\frac{1}{7}} \cdot (7\sqrt{7})^{\frac{2}{3}}$; г) $\sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{6}}$.

**113.** Ифодаро сода кунед:

а) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2-(4xy)^{\frac{1}{2}}$;  б) $\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16}$;

в) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;  г) $\dfrac{x-8}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}$.

**114.** Кадоме аз ин ададҳо калон аст:

а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}$ ё $2^{-1,5}$;  б) $3^{\sqrt{5}}$ ё $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2,25}$?

**115.** Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $y=\sqrt{x}(x+2)$; б) $y=\dfrac{2x-1}{x}$.

**116.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}$;  б) $ctg\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

## §4. МУОДИЛА, НОБАРОБАРӢ ВА СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

### 11. МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Т а ъ р и ф. **Муодилае, ки дар он номаълум дар дараҷа аст, муодилаи нишондиҳандагӣ номида мешавад.**

Муодилаи одитарини нишондиҳандагӣ ин муодилаи

$$a^x=b \qquad (1)$$

мебошад, ки дар он $a>0$ ва $a\neq 1$ аст. Тавре дар банди 10 дидем, соҳаи қиматҳои функсияи $y=a^x$ маҷмӯи ададҳои ҳақиқии мусбат $R_+=(0;\infty)$ аст. Аз ҳамин сабаб, ҳангоми $b\leq 0$ будан муодилаи (1) ҳал надорад. Ҳангоми $b>0$ будан аз сабаби он ки функсия афзуншаванда (дар ҳолати $a>1$ будан) ё камшаванда (дар ҳолати $0<a<1$ будан) аст ва ҳар як қимати худро расо як маротиба қабул мекунад, муодилаи (1) танҳо як реша дорад. Барои ёфтани ин реша адади $b$-ро дар намуди $b=a^c$ ифода кардан лозим аст. Аз баробарии $a^x=a^c$ ва хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ бармеояд, ки $x=c$ решаи (1) мебошад (ниг. ба расмҳои 23 ва 24).

Эзоҳи 1. Муодилаҳои нишондиҳандагие, ки бо онҳо мо дар курси метематикаи мактабӣ сару кор дорем, чун қоида ба муодилаҳои намуди $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, ки $f(x)$ ва $g(x)$ функсияҳои нисбатан содаанд, оварда мешаванд. Муодиларо бо муодилаи ба он баробарқувваи $f(x)=g(x)$ иваз карда, ҳалли охиринро меёбанд. Аз сабаби баробарқуввагӣ ин ҳал ҳалли матлуби муодилаи аввала аст.

Эзоҳи 2. Фаҳмост, ки тасвири ҳар гуна адади мусбати $b$ дар намуди $a^c$ осон нест. Масалан, барои ёфтани ҳалли муодилаи $2^x=3$ адади $3$-ро дар намуди $2^c$ ифода кардан лозим меояд. Гарчанде чунин $c$ вуҷуд дошта, ягона аст (вай адади ирратсионалӣ мебошад), мо ҳанӯз тайёр нестем, ки онро аниқ ё тақрибӣ нависем. Тарзи ҳалли ин гуна муодилаҳо дар банди18-и ҳамин боб оварда мешавад.

Акнун мисолҳои мушаххасро дида мебароем.

Мисоли 1. Муодилаи $6^{2x-3}=\sqrt[3]{36}$-ро ҳал мекунем.

Ҳал. Азбаски $36=6^2$ ва $\sqrt[3]{36}=\sqrt[3]{6^2}=6^{\frac{2}{3}}$ аст, пас муодиларо дар намуди $6^{2x-3}=6^{\frac{2}{3}}$ навиштан мумкин аст. Асосҳо якхела шуданд. Дараҷаҳои мувофиқро баробар карда, муодилаи $2x-3=\frac{2}{3}$-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо:

$$6x-9=2; \quad 6x=11; \quad x=1\frac{5}{6}.$$

Ҷ а в о б: $1\frac{5}{6}$.

М и с о л и 2. Решаи муодилаи $0{,}25^{\frac{9x-20}{2}}=0{,}5^{x^2}$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Аввал қисми чапи муодиларо табдил медиҳем:

$$0{,}25^{\frac{9x-20}{2}}=\left(0{,}5^2\right)^{\frac{9x-20}{2}}=0{,}5^{2\cdot\frac{9x-20}{2}}=0{,}5^{9x-20}.$$

Ҳамин тариқ, ҳалли муодилаи

$$0{,}5^{9x-20}=0{,}5^{x^2}$$

-ро ёфтан лозим аст. Решаҳои ин муодила фақат ҳамон ададҳои $x$ мебошанд, ки онҳо решаи $9x-20=x^2$ ё $x^2-9x+20=(x-4)(x-5)=0$ ҳастанд. Реша будани ададҳои 4 ва 5 возеҳ аст.

Ҷ а в о б: 4; 5.

М и с о л и 3. Ҳалли муодилаи $4^x+4^{x-1}=1{,}25$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Дорем: $4^{x-1}=\frac{4^x}{4}$. Инро дар муодила гузошта, $4^x+\frac{4^x}{4}=1{,}25$ ё $4\cdot4^x+4^x=5$ ва ё $5\cdot4^x=5$-ро ҳосил мекунем. Ҳамин тариқ, $4^x=1$ ё $4^x=4^0$. Аз ин ҷо: $x=0$.

Ҷ а в о б: 0.

Дар баъзе ҳолатҳо дар муодила функсияи номаълумдор дар дараҷаҳои гуногун меояд. Ин гуна муодилаҳоро бо дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал кардан мумкин аст.

М и с о л и 4. Муодилаи $2\cdot9^x-3^{x+1}-9=0$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Зарбшавандаи узви якуми муодиларо дар намуди $9^x=(3^2)^x=3^{2x}$ ва узви дуюмро дар намуди $3^{x+1}=3^x\cdot3=3\cdot3^x$

тасвир карда, муодиларо дар намуди $2\cdot 3^{2x}-3\cdot 3^{x}-9=0$ менависем. $3^{x}=t$ ишорат карда, муодилаи $2t^{2}-3t-9=0$-ро ҳосил мекунем. Решаҳои ин муодилаи квадратиро меёбем:

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 2\cdot 9}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 9}{4};\quad t_{1}=-\frac{6}{4}=-1{,}5;\quad t_{2}=\frac{12}{4}=3.$$

Муодилаи $3^{x}=t_{1}=-1{,}5$ ҳал надорад, чунки $-1{,}5<0$ аст. Муодилаи $3^{x}=t_{2}=3$ дорои решаи $x=1$ аст.

Ҷ а в о б: 1.

Дар охир боз ҳалли се муодиларо меорем, ки онҳо нисбат ба муодилаҳои муоинашуда мураккабанд.

М и с о л и 5. Муодилаи $\sqrt[4]{125^{3-2x}}=\frac{5}{\sqrt[4]{5}}$ - ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Қисмҳои чап ва рости муодиларо чунон табдил медиҳем, ки дар асос 5 бошад:

$$\sqrt[4]{125^{3-2x}}=\left[\left(5^{3}\right)^{3-2x}\right]^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{4}(3-2x)};\qquad \frac{5}{\sqrt[4]{5}}=\frac{5}{5^{\frac{1}{4}}}=5^{1-\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{4}}.$$

Аз ин табдилдиҳиҳо бармеояд, ки муодила ба муодилаи хаттии $\frac{3}{4}(3-2x)=\frac{3}{4}$ ё $3-2x=1$ баробарқувва аст. Аз ин ҷо меёбем, ки $x=1$ аст.

Ҷ а в о б: 1.

М и с о л и 6. Решаи муодилаи $3\cdot 2^{2x}+6^{x}-2\cdot 3^{2x}=0$- ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $2^{2x}=4^{x}$, $3^{2x}=9^{x}$ аст, пас решаи муодилаи $3\cdot 4^{x}+6^{x}-2\cdot 9^{x}=0$ -ро ёфтан лозим аст. Ин муодиларо узв ба узв ба $9^x$ тақсим мекунем:

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+\left(\frac{6}{9}\right)^x-2=0 \quad \text{ё} \quad 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0.$$

Тағйирёбандаи $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$-ро дохил карда, муодилаи квадратии $3t^2+t-2=0$-ро ҳосил мекунем. Решаҳои ин муодила

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm5}{6}; \qquad t_1=-1; \qquad t_2=\frac{2}{3}$$

ҳастанд. Муодилаи $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t_1=-1$ ҳал надошта, решаи муодилаи $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t_2=\frac{2}{3}$ бошад, $x=1$ аст.

Ҷ а в о б: 1.

М и с о л и 7. Муодилаи $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Азбаски $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ аст, пас муодилаи додашударо чунин навишта метавонем:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$$

Гузориши $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=y$ моро ба муодилаи $\frac{1}{y}+y=4$ ва ё $y^2-4y+1=0$ меорад. Решаҳои ин муодилаи квадратӣ чунинанд: $y_1=2-\sqrt{3};\ y_2=2+\sqrt{3}$. Ба номаълуми аввала баргашта, ҳосил мекунем:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3};\ \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^1;\ \frac{x}{2}=1;\ x=2;$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3};\ \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1};\ \frac{x}{2}=-1;\ x=-2.$$

Ҷ а в о б: -2; 2.

Х у л о с а. Муоинаи дақиқи тарзи ҳалли мисолҳои 1-7 нишон медиҳад, ки дар табдилдиҳии муодилаҳои (ифодаҳои) нишондиҳандагӣ баробариҳое, ки хосиятҳои асосии дараҷаро ифода менамоянд, нақши асосиро мебозанд (ниг. ба баробариҳои 1) – 5) –и банди 10-и §3).

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Баробариҳоеро, ки хосиятҳои асосии дараҷаро ифода менамоянд, нависед.

**2.** Чӣ гуна муодиларо муодилаи нишондиҳандагӣ меноманд?

**3.** Чаро муодилаи (1) ё ҳал надорад, ё танҳо якто ҳал дорад?

**4.** Дар кадом ҳолат дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳалли муодиларо осон мекунад?

**5.** Раванди ҳалли муодилаҳои нишондиҳандагиро фаҳмонед;

**6.** Чаро муодилаи (1)-ро муодилаи нишондиҳандагии одитарин меноманд?

## *Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ*

Муодилаи нишондиҳандагиро ҳал кунед (117-126):

**117.** а) $2^x = 32$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; в) $4^x = 128$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{625}$.

**118.** а) $2^{x-2} = 1$; б) $3^{5x+1} = 9^{2x}$; в) $\sqrt[3]{2^{x-1}} = \sqrt{2}$; г) $\sqrt{7^{2x+6}} = \frac{7}{\sqrt[4]{7}}$.

**119.** а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3-2x} = \left(\frac{49}{9}\right)^{-3}$; б) $\left(\frac{16}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^5$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1-2x} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-3}$; г) $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+2} = \left(\frac{5}{2}\right)^6$.

**120.** а) $4^{x+1} + 4^x = 320$; б) $3^{x+2} - 3^{x+1} = 6$;

в) $5^{3x+6} - 5^{3x+4} = 600$; г) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 120 = 0$.

**121.** а) $4^x + 2^x = 2$; б) $9^x - 3^x - 6 = 0$;

в) $4^{x+1} + 2^x - 5 = 0$; г) $4^x - 3(\sqrt{4})^x - 4 = 0$.

**122.** а) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-2} = 5$; б) $2 \cdot 9^x + 9^{x-1} = 19$;

в) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$; г) $5^{2x+1} - 5^{2x-1} = 24$.

**123.** а) $2^{x-1} = 3^{x-1}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}$;

в) $6^{x+1} = 7^{x+1}$; г) $8^{x-3} = 9^{3-x}$.

**124.** а) $3^{4x+10}\cdot 5^{6x+2}=15^{5x+6}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-1}=\left(\frac{1}{12}\right)^{4x+1}$;

в) $2^x\cdot 5^x=10^{3x+1}$; г) $7^{4x+3}\cdot 3^{4x+3}=21^{2x-1}$.

**125.** а) $2^x+2^{4-x}=10$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=-\frac{2}{3}$;

в) $9^{\sqrt{x-3}}+3=4\cdot 3^{\sqrt{x-3}}$; г) $4^x-0{,}25^{x-2}=15$.

**126.** а $\left(\frac{2}{3}\right)^{71\sqrt{x-1}-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3\sqrt{x-1}-293}$; б) $\left(\frac{11}{2}\right)^{8x^2+5x}=\left(\frac{2}{11}\right)^{-2x^2-8x}$;

в) $11-3^x=\sqrt{3^x-5}$; г) $3^{x+1}-2=\sqrt{10-3^{x+2}}$.

## *Машқҳо барои такрор*

**127.** Маълум, ки $0{,}1^x<0{,}1^y$ аст. $x$ калон аст ё $y$? Агар $3{,}2^x<3{,}2^y$ бошад - чӣ?

**128.** Муодилаи ирратсионалиро ҳал кунед:

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}-2=0.$$

**129.** Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои $y=-x^2+4x-3$ ва $y=0$ маҳдуд аст, ҳисоб кунед.

**130.** Барои истеҳсоли як детал коргари якум нисбат ба коргари дуюм 6 дақиқа вақт кам сарф мекунад. Ҳар кадоми онҳо дар муддати 7 соат чанд деталӣ истеҳсол менамоянд, агар маълум бошад, ки коргари якум дар ин муддат 8-то детал зиёд истеҳсол кардааст?

## 12. НОБАРОБАРИИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Ҳалли одитарин нобаробариҳои нишондиҳандагӣ, аз қабили $a^x > b$; $a^x \geq b$; $a^x < b$; $a^x \leq b$ ба хосиятҳои маълуми функсияи $y = a^x$ такя мекунад. Нобаробариҳое, ки бо онҳо сару кор хоҳем дошт, аслан бо ёрии табдилоти айниятӣ ба намуди

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \text{ ё } a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$$

оварда мешаванд. Ҳангоми ҳалли онҳо ҳаминро бояд ба эътибор гирифт, ки функсияи $y = a^x$ дар тамоми тири ададӣ муайян буда, ҳангоми $a > 1$ будан афзуншаванда ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан камшаванда аст. Масалан, нобаробарии $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ ҳангоми $a > 1$ будан ба нобаробарии $f(x) \geq g(x)$ ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан ба нобаробарии $f(x) \leq g(x)$ баробарқувва аст. Вобаста ба бузургии $a$ ҳалли яке аз нобаробариҳои мазкур ҳалли матлуби нобаробарии дар аввал додашуда мебошад.

Мисоли 1. Нобаробарии $7^{2x-1} \leq 7^{14-3x}$ -ро ҳал мекунем.

Ҳал. Азбаски функсияи нишондиҳандагии $y = 7^x$ афзуншаванда аст, пас ба қимати ками функсия қимати ками аргумент рост меояд. Барои ҳамин, нобаробарии мазкур ба нобаробарии

$$2x - 1 \leq 14 - 3x$$

баробарқувва аст. Ин нобаробарии хаттиро ҳал карда меёбем, ки $x \leq 3$ мебошад.

Ҷавоб: $(-\infty; 3]$.

Мисоли 2. Ҳалли нобаробарии $0{,}4^{5x-1} > 0{,}16$ -ро меёбем.

Ҳал. Баробарии $0{,}16 = 0{,}4^2$ - ро ба назар гирифта, нобаробариро дар шакли $0{,}4^{5x-1} > 0{,}4^2$ менависем. Функсияи $y = 0{,}4^x$ камшаванда аст (асосаш 0,4 аз 1 хурд аст!). Бинобар ин, нобаробарӣ ба нобаробарии $5x-1<2$ ё $5x<3$ баробарқувва аст. Аз ин ҷо: $x<0{,}6$.

Ҷ а в о б: $(-\infty; 0{,}6)$.

М и с о л и 3. Нобаробарии $2^{x+2}+3\cdot 2^{x+1}-5\cdot 2^{x}\geq 5$ - ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Аз баробарии $a^{x+y}=a^{x}\cdot a^{y}$ истифода карда, ҳосил мекунем:

$$2^{x}\cdot 2^{2}+3\cdot 2^{x}\cdot 2-5\cdot 2^{x}\geq 5;\ 4\cdot 2^{x}+6\cdot 2^{x}-5\cdot 2^{x}\geq 5;$$

$$2^{x}(4+6-5)\geq 5;\ \ 2^{x}\cdot 5\geq 5;\ 2^{x}\geq 1;\ 2^{x}\geq 2^{0};\ x\geq 0.$$

Ҷ а в о б: $[0;+\infty)$.

М и с о л и 4. Нобаробарии

$$2\cdot 9^{x+1}-5\cdot 3^{x+2}<27$$

-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Азбаски $9^{x+1}=(3^{2})^{x+1}=3^{2x+2}=9\cdot 3^{2x}$ ва $3^{x+2}=3^{x}\cdot 3^{2}=9\cdot 3^{x}$ аст, пас нобаробарии додашуда ба нобаробарии

$$18\cdot 3^{2x}-45\cdot 3^{x}-27<0$$

баробарқувва аст. Агар тағйирёбандаи нав $t=3^{x}$-ро дохил кунем, нобаробарӣ намуди $18t^{2}-45t-27<0$ ё $2t^{2}-5t-3<0$-ро мегирад. Ин нобаробариро ҳал мекунем. Муодилаи квадратии $2t^{2}-5t-3=0$-ро ҳал карда, решаҳои онро меёбем: $t_1=-\dfrac{1}{2}$, $t_2=3$. Яъне, $2t^{2}-5t-3=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)(t-3)$. Методи фосилаҳоро истифода карда, меёбем, ки $\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$ ҳалли нобаробарии квадратӣ аст. Аз ин ҷо, бо назардошти $-\frac{1}{2} < t < 3$ ва $t = 3^x$ ба нобаробарии $-\frac{1}{2} < 3^x < 3$ меоем. Нобаробарии якум $-\frac{1}{2} < 3^x$ барои қимати дилхоҳи ҳақиқии $x$ иҷро мешавад. Нобаробарии дуюм $3^x < 3$ бошад, дорои ҳалли $x < 1$ аст.

Ҷ а в о б: $(-\infty; 1)$.

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Хосиятҳои функсияи нишондиҳандагиро, ки ба онҳо тарзи ҳалли одитарин нобаробарии нишондиҳандагӣ асос карда шудааст, номбар кунед.

**2.** Чаро дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳалли нобаробариро осон мегардонад? Бо мисол фаҳмонед.

**3.** Моҳияти методи фосилаҳоро дар ҳалли мисоли мушаххас шарҳ диҳед.

**4.** Нобаробариҳои одитарини нишондиҳандагиро нависед ва гӯед, ки чаро онҳоро одитарин меноманд?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

Нобаробарии нишондиҳандагиро ҳал кунед (131-136):

**131.** а) $2^x \ge \frac{1}{2}$; б) $0{,}2^x < 0{,}2^5$; в) $\left(\sqrt{7}\right)^x \ge \frac{1}{49}$; г) $\left(\frac{4}{7}\right)^x \ge 1$.

**132.** а) $2^{2-x} < 16$; б) $0{,}3^{3x-4} > 0{,}09$; в) $0{,}1^{2x-1} \le 0{,}01$; г) $0{,}5^{2x-2} \ge 4$.

**133.** а) $3^{-2x} < \sqrt{3}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}} > 25$; в) $2^{\frac{3x}{2}+3} \geq 16$; г) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leq 7$.

**134.** а) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{1}{32}\right)^{2x}$; б) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x} \geq 64^{2\frac{2}{3}-x^2}$; г) $7^{2x-1} - 7^{x+1} < 7^{x-1} - 7$.

**135.** а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} + \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} > \frac{21}{16}$; б) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \geq 4$; г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}} \leq \frac{5}{2}$.

**136.** а) $\pi^{x} - \pi^{2x} \geq 0$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - 6 \cdot 2^{-x} - 8 < 0$;

в) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} - 28 \cdot 3^{-x-1} + 3 < 0$; г) $4^{x} + 2^{x} - 2 \geq 0$.

## ***Машқҳо барои такрор***

**137.** Графики функсияи $y = -x^2 + 1$-ро кашед. Барои кадом қимати $x$ ин функсия қимати калонтарин қабул мекунад?

**138.** Системаи муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 15. \end{cases}$$

**139.** Узви якуми прогрессияи геометрии $(b_n)$-ро ёбед, агар:

а) $b_5 = \frac{1}{64}$, $q = \frac{1}{2}$; б) $b_6 = 243$, $q = -3$ бошад.

**140.** Қимати ифодаи $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$ -ро ёбед.

**141.** Қимати $\cos\alpha$ ва $tg\alpha$ -ро ёбед, агар маълум бошад, ки $\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}$ ва $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ аст.

**142.** Муодиларо ҳал кунед: $3^x-\dfrac{6}{3^x}=1$.

## 13. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Тарзи ёфтани ҳалли системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ ҳалли муодилаи нишондиҳандагиро мемонад. Чун пештара аз хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ ва аз баробариҳое, ки бо онҳо хосияти асосии дараҷа ифода меёбанд, истифода карда, системаи нишондиҳандагиро ба системаи ба он баробарқувваи алгебравӣ иваз мекунем. Ҳал кардани ин система боқӣ мемонад. Мисолҳои мушаххасро дида мебароем.

М и с о л и 1. Ҳалли системаи зеринро меёбем:

$$\begin{cases} 3^{x+y}=9, \\ 3^{3x-2y-1}=1. \end{cases}$$

Ҳ а л. Баробариҳои $9=3^2$ ва $1=3^0$ -ро ба эътибор гирифта, системаро ба системаи алгебравии

$$\begin{cases} x+y=2, \\ 3x-2y-1=0 \end{cases}$$

иваз мекунем. Ин системаро бо тарзи гузориш ҳал мекунем. Аз муодилаи якум $x=2-y$ -ро ёфта, ба муодилаи дуюм мегузорем:

$$3(2-y)-2y-1=0 \text{ ё } 5-5y=0.$$

Аз ин ҷо: $y=1$. Пас, $x=2-y=2-1=1$.

Ҷ а в о б: (1; 1).

М и с о л и 2. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} 3^{x+1}+2^{y}=13, \\ 3^{x+2}+2^{y+3}=59 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Аз баробарии 1)-и хосияти асосии дараҷа (ниг. ба банди 10) истифода карда, системаро ба системаи ба вай баробарқувваи нишондиҳандагии

$$\begin{cases} 3\cdot 3^{x}+2^{y}=13, \\ 9\cdot 3^{x}+8\cdot 2^{y}=59 \end{cases}$$

иваз мекунем. Агар дар ин муодилаҳо $a=3^{x}$ ва $b=2^{y}$ гузорем, он гоҳ системаи муодилаҳои алгебравии

$$\begin{cases} 3a+b=13, \\ 9a+8b=59 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Нуқтаи $(a;b)=(3;4)$ ҳалли ин системаи хаттӣ аст. Акнун муодилаҳои одии $3^{x}=3$ ва $2^{y}=4$-ро ҳал карда, меёбем: $x=1;\quad y=2$.

Ҷ а в о б: (1; 2).

М и с о л и 3. Системаи муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 4^{x}=16y, \\ 2^{x+1}=4y. \end{cases}$$

Ҳ а л. Ҳар ду тарафи муодилаи якумро ба 4 тақсим карда, меёбем: $4^{x-1}=4y$. Аз ин истифода карда, муодилаи дуюми системаро ба таври $2^{x+1}=4^{x-1}$ ё $2^{x+1}=2^{2(x-1)}$ менависем. Аз ин ҷо $x+1=2(x-1)$, яъне $x=3$. Аз муодилаи $4^3=16y$ бармеояд, ки $y=4$.

Ҷ а в о б: (3; 4).

### *Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон*

**1.** Чӣ гуна системаи муодилаҳоро системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ меноманд?

**2.** Агар як муодилаи система нишондиҳандагӣ бошад, худи системаро метавонем нишондиҳандагӣ номем?

**3.** Барои ҳалли системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ аз кадом баробариҳо истифода мебаранд?

**4.** Як системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ тартиб дода, раванди ҳалли онро шарҳ диҳед.

### *Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ*

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (143-144):

**143.** а) $\begin{cases} 4^{x+y}=16, \\ 4^{x+2y-1}=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{2x-y}=\sqrt{5}, \\ 3^{4y-x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^{y-2x}=\dfrac{1}{32}, \\ 2^{x-y+1}=16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{7}\right)^{3x-2y}=49, \\ 7^{8x-\frac{y}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}. \end{cases}$

**144.** а) $\begin{cases} 6^x - 2\cdot 3^y = 0, \\ 6^x \cdot 3^y = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 6, \\ 7^{x+y} = 49; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24, \\ x + y = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \sqrt{xy} = 20. \end{cases}$

### *Машқҳо барои такрор*

**145.** Муодилаи нишондиҳандагиро ҳал кунед:

$$4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18 .$$

**146.** Дар имтиҳон 25%-и хонандагон ягон масъаларо ҳал карда натавонистанд. 150 хонанда ақаллан якто масъаларо ҳал кардааст. Дар имтиҳон чанд хонанда иштирок дошт?

**147.** Қиматҳои хурдтарин ва калонтарини функсияи $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ -ро дар порчаи $[-0{,}5;\ 0{,}5]$ ёбед.

**148.** Ҳисоб кунед:

а) $\int\limits_0^2 (1+2x)^2\, dx$ ; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin 2x)\, dx$ .

**149.** Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = \dfrac{2-x}{x-1}$ ; б) $y = \sqrt{4-x^2}$ .

# §5. ЛОГАРИФМ. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

## 14. ТАЪРИФИ ЛОГАРИФМИ АДАД

Ба муодилаи $a^x = b$ бармегардем. Дар банди 11 муайян карда будем, ки ҳангоми $b > 0$ будан ин муодила ҳалли ягона дорад ва агар $b$ -ро дар намуди $b = a^c$ тасвир карда тавонем, он гоҳ $x = c$ ҳалли муодила аст. Дар эзоҳи 2-и ҳамон ҷой қайд шуда буд, ки чунин тасвир на барои ҳар гуна адади $b > 0$ назаррас аст (Аз ҳамин сабаб, ҳамаи муодилаҳо ва нобаробариҳои дар бандҳои 11-13 оварда шуда, чунон интихоб шуда буданд, ки барояшон ин тасвир амалан возеҳ аст.).

*Ҳалли муодилаи $a^x = b$ -ро бо $\ell og_a b$ ишорат мекунанд.* Яъне, $\ell og_a b = c$ адади ҳақиқиест, ки ҳангоми $b > 0$, $a > 0$ ва $a \neq 1$ будан айнияти

$$a^c = b$$

-ро қаноат мекунонад. Навишти $\ell og_a b = c$ ин тавр хонда мешавад: *логарифми $b$ аз рӯйи асоси $a$ ё логарифми асосаш $a$ аз адади $b$ ва ё логарифми $a$ -и адади $b$ ба $c$ баробар аст.* Ададе, ки асоси логарифмро ташкил медиҳад, дар сатри поён навишта мешавад.

Ҳамин тариқ, **логарифми адади *b* аз рӯйи асоси *a* гуфта, адади *c*-ро меноманд, агар *a* дар дараҷаи *c* ба *b* баробар бошад.**

Ин таърифро математикӣ ин тавр навиштан мумкин аст: $\ell og_a b = c$ аст, агар $a^c = b$ бошад ва баръакс, агар $a^c = b$ бошад, он гоҳ $\ell og_a b = c$ аст.

Аз таърифи логарифм бевосита баробарии

$$a^{\ell og_a b} = b$$

бармеояд, ки он **айнияти асосии логарифмӣ** ном дорад.

Аз таърифи логарифм бармеояд, ки:

$$2^5 = 32, \qquad 5 = \ell og_2 32;$$

$$10^2 = 100, \qquad 2 = \ell og_{10} 100;$$

$$3^4 = 81, \qquad 4 = \ell og_3 81;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8, \qquad -3 = \ell og_{\frac{1}{2}} 8;$$

$$a^y = x, \qquad y = \ell og_a x;$$

$$a^c = b, \qquad c = \ell og_a b.$$

Баробариҳои мувофиқи ҳар ду сутун баробарқувваанд: яке дигареро ба миён меорад ва баръакс. Яъне, $2^5 = 32$ ва $\ell og_2 32 = 5$ тасдиқи худи ҳамон як чиз аст.

Таърифи логарифм имкон медиҳад, ки муодилаҳои намуди

$$1)\ a^x = b; \qquad 2)\ x^a = b,$$

ки дар онҳо аз рӯйи ду адади додашуда ёфтани адади сеюм талаб карда мешавад, ҳал карда шаванд.

М и с о л и 1. Логарифми адади 27-ро аз рӯйи асоси 9 меёбем.

Ҳ а л. Бигузор $x = \ell og_9 27$ бошад. Мувофиқи таърифи логарифм $9^x = 27$ мебошад, вале $9 = 3^2$ ва $27 = 3^3$. Пас, $3^{2x} = 3^3$ ва аз ин ҷо $2x = 3$ ё $x = \frac{3}{2}$.

М и с о л и 2. Асосеро меёбем, ки логарифми адади 32 аз рӯйи он ба 10 баробар аст.

Ҳ а л. Мувофиқи шарт $\ell og_x 32 = 10$ мебошад. Аз ин ҷо дар асоси таърифи логарифм меёбем, ки $x^{10} = 32$ аст. Пас,

$x=\sqrt[10]{32}=\sqrt[10]{2^5}=2^{\frac{5}{10}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$. Ҳамин тариқ, $\ell og_{\sqrt{2}}32=10$ будааст.

М и с о л и 3. Ададеро меёбем, ки логарифми он аз рӯйи асоси 64 ба $-\dfrac{2}{3}$ баробар аст.

Ҳ а л. Агар адади матлубро бо $x$ ишорат кунем, он гоҳ бояд $\ell og_{64}x=-\dfrac{2}{3}$ шавад. Аз ин ҷо мувофиқи таърифи логарифми адад $x=64^{-\frac{2}{3}}$ ё $x=\dfrac{1}{64^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{\left(4^3\right)^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{1}{16}$. Инак, $\ell og_{64}\dfrac{1}{16}=-\dfrac{2}{3}$ аст.

М и с о л и 4. Аз айнияти асосии логарифмӣ истифода карда, қимати ифодаи $3^{3-\ell og_3 18}$-ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Дорем: $3^{3-\ell og_3 18}=\dfrac{3^3}{3^{\ell og_3 18}}=\dfrac{27}{18}=1{,}5$.

### ***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Таърифи логарифми ададро баён кунед ва онро бо мисолҳо шарҳ диҳед.

**2.** Кадом намуди муодилаҳоро бевосита бо истифодаи таърифи логарифми адад ҳал кардан мумкин аст?

**3.** Ифодаеро оред, ки барои ҳисоби қимати он айнияти асосии логарифмӣ истифода шавад.

**4.** Логарифми адад дар кадом мавридҳо вуҷуд надорад?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

Дуруст будани баробариҳои зеринро санҷед (150-152):

**150.** а) $\log_2 16 = 4$; б) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$;

в) $\log_{17} 1 = 0$; г) $\log_4 64 = 3$.

**151.** а) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; б) $\log_{0,2} 0,04 = 2$;

в) $\log_{10} 0,01 = -2$; г) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$.

**152.** а) $\log_{\frac{4}{3}} \frac{27}{64} = -3$; б) $\log_{0,3} \frac{1}{0,09} = -2$;

в) $\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\frac{3}{2}$; г) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$.

**153.** Логарифми ададро аз рӯйи асоси $a$ ёбед:

а) $32$; $\frac{1}{8}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$ ҳангоми $a = 2$ будан;

б) $1000$; $\frac{1}{10}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[5]{100}$ ҳангоми $a = 10$ будан;

в) $9$; $\frac{1}{9}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[6]{3}$ ҳангоми $a = 3$ будан.

**154.** Аз баробарӣ асоси логарифмро ёбед:

а) $\log_x 9 = 2$; б) $\log_x \frac{1}{8} = -3$;

в) $\log_x \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$; г) $\log_x 243 = 3$.

Адади $x$ -ро ёбед (155-156):

**155.** а) $\log_2 x = -1$;  б) $\log_{\frac{1}{5}} x = -2$;

в) $\log_4 x = 2$;  г) $\log_6 x = -2$.

**156.** а) $\log_9 x = -2$;  б) $\log_{\sqrt{3}} x = 0$;

в) $\log_{\frac{1}{7}} x = 1$;  г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$.

**157.** Ададро дар намуди логарифми асосаш $a$ нависед:

а) 2; -2; 1; 0  ҳангоми $a = 4$ будан;

б) 1; -1; 0; 4  ҳангоми $a = 2$ будан;

в) 4; -1; 1; 2  ҳангоми $a = 3$ будан;

г) -3; -2; 2; 1  ҳангоми $a = 5$ будан.

Аз айнияти асосии логарифмӣ истифода карда, ифодаро сода кунед (158-160):

**158.** а) $1{,}2^{\log_{1,2} 3}$;  б) $\pi^{\log_\pi 3{,}14}$;  в) $2^{\log_2 1}$;  г) $2{,}8^{\log_{2,8} 1{,}4}$.

**159.** а) $4^{1+\log_4 3}$;  б) $10^{1-\log_{10} 3}$;  в) $\left(\frac{1}{8}\right)^{1+\log_{\frac{1}{8}} 4}$;  г) $2^{2-\log_2 8}$.

**160.** а) $3^{2\log_3 2}$;  б) $2^{-2\log_2 4}$;  в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2\log_{\frac{1}{4}} 2}$;  г) $\left(\frac{1}{12}\right)^{2\log_{\frac{1}{12}} 1}$.

### ***Машқҳо барои такрор***

**161.** Нобаробариро ҳал кунед: $\left(\frac{1}{3}\right)^{7x-1} \le 27$.

**162.** Ба маҳлули 18 фоизаи намаки вазнаш 2 кг 0,25 кг об рехтанд. Маҳлули чандфоизаи намак ҳосил шуд?

**163.** Ҳисоб кунед: 10+11+12+…+98+99.

**164.** Муодилаи тригонометриро ҳал кунед:

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 .$$

**165.** Муодилаи ратсионалиро ҳал кунед:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4} .$$

## 15. ХОСИЯТҲОИ ЛОГАРИФМ

Бигузор $a$ ададИ дилхоҳи мусбат ва нобаробари як бошад. Аз таърифи логарифми адад бармеояд, ки:

$$\text{I. } \ell og_a 1 = 0 ; \qquad \text{II. } \ell og_a a = 1 .$$

Шумо аллакай ҳангоми иҷрои машқҳои банди 14 ҷой доштани ин баробариҳоро барои $a$ -и мушаххас пайхас кардаед (масалан, ҳангоми иҷрои машқи 156).

Фарз мекунем, ки $x$ , $y$ ададҳои дилхоҳи мусбат ва $p$ ададИ дилхоҳи ҳақиқӣ аст. Нишон медиҳем, ки баробариҳои зерин ҷой доранд:

III. $\ell og_a(xy) = \ell og_a x + \ell og_a y$;

IV. $\ell og_a \dfrac{x}{y} = \ell og_a x - \ell og_a y$;

V. $\ell og_a x^p = p\,\ell og_a x$ .

Барои исботи хосияти III аз айнияти асосии логарифмӣ истифода мекунем:

$$x = a^{\ell og_a x}, \quad y = a^{\ell og_a y} .$$

Ин баробариҳоро узв ба узв зарб карда, ҳосил мекунем:

$$xy = a^{\ell og_a x} \cdot a^{\ell og_a y} = a^{\ell og_a x + \ell og_a y} .$$

Вале мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ $xy = a^{\ell og_a (xy)}$ , пас $a^{\ell og_a (xy)} = a^{\ell og_a x + \ell og_a y}$ . Аз ин ҷо, мувофиқи хосияти функсияи нишондиҳандагӣ баробарии $\ell og_a(xy) = \ell og_a x + \ell og_a y$ бармеояд.

Ҳамин тариқ, *логарифми ҳосили зарб ба суммаи логарифмҳои зарбшавандаҳо баробар аст*. Аён аст, ки ин хосият барои миқдори дилхоҳи зарбшавандаҳо низ дуруст мебошад. Масалан, $\ell og_a(xyz) = \ell og_a x + \ell og_a y + \ell og_a z$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Акнун исботи хосияти IV–ро меорем. Барои ин боз айнияти асосии логарифмиро истифода мекунем. Мувофиқи он $\frac{x}{y} = a^{\ell og_a \frac{x}{y}}$ мешавад. Аз тарафи дигар, $\frac{x}{y} = \frac{a^{\ell og_a x}}{a^{\ell og_a y}} = a^{\ell og_a x - \ell og_a y}$.

Аз ин ду баробарӣ ҳосил менамоем:

$$a^{\ell og_a \frac{x}{y}} = a^{\ell og_a x - \ell og_a y} \quad \text{ва аз ин ҷо} \quad \ell og_a \frac{x}{y} = \ell og_a x - \ell og_a y .$$

Инак, *логарифми ҳосили тақсим ба фарқи логарифми сурат ва логарифми махраҷ баробар аст.*

Барои исботи хосияти V силсилаи баробариҳоро, ки онҳо аз айнияти асосии логарифмӣ бармеоянд, менависем:

$$x^p = a^{\ell og_a x^p} = \left(a^{\ell og_a x}\right)^p = a^{p\ell og_a x} .$$

Аз ин ҷо, мувофиқи хосияти функсияи нишондиҳандагӣ

$$\ell og_a x^p = p\ell og_a x .$$

Яъне, *логарифми дараҷа ба ҳосили зарби нишондиҳандаи дараҷа бар логарифми асоси ин дараҷа баробар аст*.

Хосиятҳои I-V–и ҳосилкардаамон хосиятҳои *асосии* логарифм ном доранд. Онҳоро хосиятҳои *умумӣ* ҳам мегӯянд, чунки онҳо ба асос вобаста нестанд (танҳо зарур аст, ки $a > 0$ ва $a \neq 1$ бошад).

Хулосаи 1. Аз хосияти V ва айнияти асосии логарифмӣ бармеояд, ки барои ҳар гуна ададҳои $a > 0$, $b > 0$ ва $a \neq 1$, $b \neq 1$

айнияти зерин ҷой дорад:

$$a^x = b^{x\ell og_b a}.$$

Дар ҳақиқат, $b^{x\ell og_b a} = b^{\ell og_b a^x} = a^x$.

Х у л о с а и 2. Агар $x$, $a$, $b$ ададҳои мусбат бошанд ва $a \neq 1$, $b \neq 1$ бошад, он гоҳ формулаи

$$\ell og_a x = \frac{\ell og_b x}{\ell og_b a}$$

ҷой дорад, ки вай *формулаи гузариш* аз логарифми як асос ба логарифми асоси дигар ном дорад.

Барои исботи ин формула боз айнияти асосии логарифмӣ ва хосияти V–и логарифмро истифода мекунем:

$$log_b x = log_b(a^{\log_a x}) = log_a x \cdot log_b a.$$

Қисмҳои чап ва рости ин баробариро ба $\ell og_b a$ тақсим карда, формулаи матлубро ҳосил мекунем.

Формулаи гузариш имкон медиҳад, ки аз ҷадвали пешакӣ сохташудаи логарифмҳои ададҳо аз рӯйи асоси додашудаи $b$ истифода карда, логарифми ададро аз рӯйи асоси дилхоҳи $a$ ёбем. Бо ин мақсад, аксар вақт ҷадвалҳои логарифмҳои даҳӣ ё логарифмҳои натуралӣ, ки онҳоро дар бештари воситаҳои таълимии мактабӣ дарёфт кардан мумкин аст, истифода мешаванд. Агар асоси логарифм ба 10 баробар бошад, онро логарифми даҳӣ меноманд. Ишорати *логарифми даҳӣ* $\ell g$ аст, яъне $\ell g x = \ell og_{10} x$. Бо логарифми натуралӣ дар банди 17 шинос хоҳем шуд.

Формулаи гузариш инчунин барои ёфтани ҳалли муодилаҳое, ки дар таркибашон аз рӯйи асосҳои гуногун логарифм доранд, васеъ истифода карда мешавад.

Х у л о с а и 3. Баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\ell og_{a^q} x = \frac{1}{q}\ell og_a x \quad (q \neq 0); \quad \ell og_a x = \frac{1}{\ell og_x a}.$$

Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи гузариш қисми чапи формулаи якумро ин тавр навишта метавонем:

$$\ell og_{a^q} x = \frac{\ell og_a x}{\ell og_a a^q} = \frac{\ell og_a x}{q \ell og_a a} = \frac{1}{q} \ell og_a x .$$

(Хосиятҳои V ва II –ро истифода кардем). Формулаи дуюм бевосита аз формулаи гузариш ҳангоми $b = x$ будан бармеояд.

Хосиятҳои асосии логарифмҳо, формулаи гузариш ва формулаҳои дар ду хулосаи дигар овардашуда ҳангоми айниятан табдил додани ифодаҳои дар таркибашон логарифмдошта истифода мешаванд. Масалан, хосияти III имкон медиҳад, ки ёфтани ҳосили зарб ба ёфтани логарифми суммаи онҳо ва баъд ба ёфтани адад аз рӯйи логарифми ёфташуда иваз карда шавад. Айнан ба ҳамин монанд, хосияти V ба дараҷабардориро ба зарби дараҷа бар логарифми адади додашуда, сонӣ аз рӯйи логарифм ёфтани натиҷа меоварад. Яъне, ҳисоб бо истифодаи логарифмҳо аз ду зина иборат аст: логарифмгирӣ ва потенсиронӣ.

Раванди ҳисоби логарифми ифодаро аз рӯйи асоси дода-шуда *логарифмгирӣ* ва раванди ёфтани ифодаро аз рӯйи логарифми додашудаи ин ифода *потенсиронӣ* меноманд. Зоҳиран фаҳмост, ки ин ду раванд нисбат ба ҳамдигар мувофиқан баръаксанд.

Барои амалан мустаҳкам кардани маводди дар боло овардашуда чанд мисолро дида мебароем.

М и с о л и 1. Аз рӯйи асоси 2 аз ифодаи $16a^5\sqrt[3]{b^2}$ логарифм мегирем.

Ҳ а л. Хосиятҳои III ва V -и логарифмро истифода карда, ҳосил мекунем:

$$\ell og_2\left(16a^5\sqrt[3]{b^2}\right) = \ell og_2\left(16 \cdot a^5 \cdot b^{\frac{2}{3}}\right) = \ell og_2 16 + \ell og_2 a^5 + \ell og_2 b^{\frac{2}{3}} =$$

$$= 4 + 5\ell og_2 a + \frac{2}{3}\ell og_2 b\,.$$

М и с о л и 2. Қимати ифодаи $\dfrac{\ell g96 - \ell g24}{\ell g5 + \ell g3{,}2}$-ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Аз хосиятҳои III, IV ва баъд аз V истифода карда, сурат ва махраҷро табдил медиҳем:

$$\ell g96 - \ell g24 = \ell g\frac{96}{24} = \ell g4 = \ell g2^2 = 2\ell g2\,,$$

$$\ell g5 + \ell g3{,}2 = \ell g(5 \cdot 3{,}2) = \ell g16 = \ell g2^4 = 4\ell g2\,.$$

Пас,

$$\frac{\ell g96 - \ell g24}{\ell g5 + \ell g3{,}2} = \frac{2\ell g2}{4\ell g2} = \frac{1}{2}\,.$$

М и с о л и 3. Қимати ифодаи $\ell og_3 8 - 2\ell og_3 2 + \ell og_3 4{,}5$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Хосиятҳои III-V –ро истифода мекунем:

$$\ell og_3 8 - 2\ell og_3 2 + \ell og_3 4{,}5 = \ell og_3 8 - \ell og_3 2^2 + \ell og_3\frac{9}{2} =$$

$$= \ell og_3 8 - \ell og_3 4 + \ell og_3\frac{9}{2} = \ell og_3\frac{8}{4} + \ell og_3\frac{9}{2} = \ell og_3 2 + \ell og_3\frac{9}{2} =$$

$$= \ell og_3\left(2 \cdot \frac{9}{2}\right) = \ell og_3 9 = 2\,.$$

М и с о л и 4. Қимати ифодаи $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\ell og_2 7}}$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Формулаи дуюми хулосаи 3-ро истифода карда, дар нишондиҳандаи дараҷа ба логарифми асоси 7 мегузарем ва баъд аз рӯйи айнияти асосии логарифмӣ меёбем:

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\ell og_2 7}} = \left[(7)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{\ell og_2 7}} = 7^{\frac{1}{\ell og_2 7}} = 7^{\ell og_7 2} = 2.$$

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Хосиятҳои асосии логарифмро номбар кунед.

**2.** Дурустии хосиятҳои логарифмро бо мисолҳои мушаххас санҷед.

**3.** Як тарзи истифодаи формулаи гузаришро қайд кунед.

**4.** Логарифми даҳӣ гуфта, чиро мегӯянд? Вай чӣ тавр ишорат карда мешавад?

**5.** Моҳияти равандҳои логарифмгирӣ ва потенсирониро шарҳ даҳед. Чаро онҳо амалиёти баръаксанд?

**6.** Хосиятҳои логарифм ва хулосаҳои онҳо барои чӣ лозиманд?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани мавodди назариявӣ***

**166.** Аз ифодаҳои зерин, аз рӯйи асоси 2 логарифм гиред ( $a>0, b>0$ ):

а) $\left(2a^2b\right)^4$; б) $\left(\dfrac{4a^2}{\sqrt[7]{b^3}}\right)^{-0,2}$; в) $\left(\sqrt[5]{8a^2b}\right)^{\frac{4}{5}}$; г) $\dfrac{a^2}{16b^6}$.

**167.** Аз рӯйи асоси 10 логарифм гиред ( $a>0, b>0, c>0$ ):

а) $100\sqrt{a^4b^2c}$; б) $\dfrac{10}{a^2bc^3}$; в) $10^{-2}a^2b^4c^{\frac{5}{6}}$; г) $\dfrac{b^{\frac{4}{5}}}{10^4a^5}$.

**168.** Ёбед: а) $\ell g1000$; б) $\ell g0,1$; в) $\ell g0,0001$; г) $\ell g100$.

**169.** Маълум, ки $\ell og_7 2 = a$ ва $\ell og_7 3 = b$ мебошад. Ифодаро бо воситаи $a$ ва $b$ нависед:

а) $\ell og_7 42$ ; б) $\ell og_7 21$ ; в) $\ell og_7 24$ ; г) $\ell og_7 98$ .

Ҳисоб кунед (170-171):

**170.** а) $\ell g4 + \ell g25$; б) $\ell og_2 9 - \ell og_2 \dfrac{9}{16}$;

в) $\ell og_{12} 2 + \ell og_{12} 72$ ; г) $\ell g11 - \ell g110$.

**171.** а) $\dfrac{\ell g2 + \ell g32}{2\ell g4 - \ell g8}$; б) $\dfrac{\ell og_2 125}{\ell og_2 25}$;

в) $\ell og_9 13 - \ell og_9 39$ ; г) $\ell og_{0,4} 16 - 2\ell g_{0,4} 10$.

Аз баробариҳои зерин $x$ –ро ёбед (172-173):

**172.** а) $\ell og_4 x = \ell og_4 5 - \ell og_4 2 + \ell og_4 3$ ;

б) $\ell og_7 x = 3\ell og_7 2 - 2\ell og_7 3 + \ell og_7 5$;

в) $\ell og_9 x = \dfrac{1}{2}\ell og_9 3 + \dfrac{2}{3}\ell og_9 5 - \dfrac{1}{3}\ell og_9 2$ ;

г) $\ell g x = \ell g\dfrac{1}{4} - 2\ell g\dfrac{2}{3} + \ell g\dfrac{4}{9}$.

**173.** а) $\ell og_2 x = \ell og_4 2$ ; б) $\ell og_3 x = \ell og_{\frac{1}{3}} 5$;

в) $\ell og_{\frac{1}{4}} x = \ell og_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\ell og_4 x = \ell og_2 3 + \ell og_2 \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Қимати ифодаро ёбед (174-175):

**174.** а) $3^{\ell og_{\sqrt{3}} 7}$ ; б) $9^{\ell og_3 \sqrt{5}}$; в) $2^{\ell og_4 9}$; г) $7^{\ell og_{\sqrt[3]{7}} 3}$.

**175.** а) $\ell og_2 \ell og_5 \sqrt[8]{5}$ ; б) $\ell og_4 \ell og_3 \sqrt{81}$;

в) $\ell og_{\frac{1}{3}} \ell og_3 27$ ; г) $\ell og_{\frac{1}{3}} \ell og_{343} 7$.

**176*.** Исбот кунед, ки:

а) $\ell og_{\frac{1}{3}} 5 + \ell og_5 \frac{1}{3} \le -2$; б) $\ell og_4 9 + \ell og_9 4 \ge 2$.

**177*.** Исбот кунед, ки агар $a > 0, b > 0, c > 0$ ва $a \ne 1$, $b \ne 1$, $c \ne 1$ бошанд, он гоҳ формулаи

$$a^{\ell og_b c} = c^{\ell og_b a}$$

ҷой дорад.

### *Машқҳо барои такрор*

**178.** Муодиларо ҳал кунед: $|5 - x| = 2(2x - 5)$.

**179.** Қимати ифодаи $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ -ро ҳисоб кунед, агар $x_1$ ва $x_2$ решаҳои муодилаи $3x^2 - 2x - 6 = 0$ бошанд.

**180.** Функсияи $y = x^2 - 2x + 3$-ро тадқиқ карда, графикашро созед.

**181.** Ифодаи $(1 + a^{0,5})^2 - 2a^{0,5}$ - ро сода кунед.

**182.** Ҳисоб кунед: $2\cos\frac{\pi}{6} + tg\frac{\pi}{4}$.

## 16. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ. ХОСИЯТҲО ВА ГРАФИКИ ОН

Дар бандҳои 9-10 график ва хосиятҳои функсияи нишондиҳандагии $y = a^x$ оварда шуда буданд. Ин функсия вобастагии байни $y$-тарафи чапро нисбат ба тағйирёбии нишондиҳандаи дараҷа $x$ инъикос мекунад. Акнун вобастагии дараҷаро нисбат ба тағйирёбии қимати функсия меомӯзем.

Агар $y = a^x$ ($a > 0$ ва $a \ne 1$) бошад, он гоҳ мувофиқи таърифи логарифм

$$x = \ell og_a y$$

аст. Ишоратҳои аргумент ва функсияро ҷойиваз карда, ҳосил мекунем:

$$y = \ell og_a x \ . \tag{2}$$

Т а ъ р и ф. **Функсияеро, ки бо формулаи (2) муайян мешавад, функсияи логарифмии асосаш *a* меноманд.**

Хосиятҳои функсияи логарифмиро дида мебароем.

$1^0$. Соҳаи муайянии функсияи логарифмӣ маҷмуи ададҳои ҳақиқии мусбат $R_+ = (0; \infty)$ аст.

Дар ҳақиқат, ифодаи $\ell og_a x$ барои ҳар гуна адади мусбати ҳақиқии $x$ қимати ягона дорад ва муайян нест, агар $x \leq 0$ бошад.

$2^0$. Соҳаи қиматҳои функсия маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ $R = (-\infty; \infty)$ мебошад.

Ин аз он бармеояд, ки муодилаи $\ell og_a x = y$ барои ҳар гуна адади ҳақиқии $y$ танҳо якто решаи $x = a^y$ -ро дорост.

$3^0$. Азбаски функсия танҳо барои ададҳои мусбат муайян аст, пас вай на даврӣ, на ҷуфт ва на тоқ аст.

$4^0$. Функсияи логарифмӣ қиматҳои хурдтарин ва калонтарин надорад, чунки соҳаи қиматҳояш тамоми ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

$5^0$. Нуқтаи буриши графики функсияи логарифмӣ бо тири абсисса нуқтаи (1;0) аст. Координатаҳои ин нукта ба асоси функсия вобастагӣ надорад, чунки решаи муодилаи $\ell og_a x = 0$ барои ҳар гуна $a > 0$ ба як баробар аст. Қимати $x = 0$ ба соҳаи муайянии функсия тааллуқ надорад, бинобар ин график тири ординатаро намебурад.

$6^0$. Агар $a > 1$ бошад, он гоҳ қиматҳои функсияи логарифмӣ дар фосилаи (0;1) манфӣ ва дар фосилаи $(1; \infty)$ мусбат мебошанд. Ҳангоми $0 < a < 1$ будан, қиматҳои функсияи логарифмӣ дар фосилаи (0; 1) мусбат ва дар фосилаи $(1; \infty)$ манфианд.

Дар ҳақиқат, бигузор $a > 1$ ва $x > 1$ бошад. Исбот мекунем, ки дар ин ҳолат қиматҳои функсияи логарифмӣ мусбат ҳастанд.

Баръаксашро фарз мекунем. Бигузор чунин қимати $x > 1$ вуҷуд дошта бошад, ки барояш $\ell og_a x = y \leq 0$ аст. Аз ин ҷо ва аз хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ бо асоси $a > 1$ бармеояд, ки $a^y \leq a^0 = 1$ аст. Аз тарафи дигар, мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ бояд $a^y = a^{\ell og_a x} = x$ шавад. Азбаски $x > 1$ аст, пас $a^y > 1$. Зиддиятро ҳосил кардаем. Ин нишон медиҳад, ки фарзи кардаамон нодуруст будааст.

Ҳолатҳои $a > 1$ ва $x < 1$; $0 < a < 1$ ва $x > 1$; $0 < a < 1$ ва $x < 1$ айнан ҳамин тавр муоина карда мешаванд.

$7^0$. Функсияи логарифмӣ дар тамоми соҳаи муайяниаш ҳангоми $a > 1$ будан меафзояд (афзуншаванда аст) ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан кам мешавад (камшаванда аст).

Дар ҳақиқат, бигузор $0 < x_1 < x_2$ ва $a > 1$ буда, $y_1 = \ell og_a x_1$, $y_2 = \ell og_a x_2$ аст. Аз таърифи логарифм бармеояд, ки

$$a^{y_1} = x_1 < x_2 = a^{y_2}, \text{ яъне } a^{y_1} < a^{y_2}.$$

Нобаробарии мазкур ва хосияти афзуншаванда будани функсияи нишондиҳандагии асосаш $a > 1$-ро истифода карда, ҳосил мекунем:

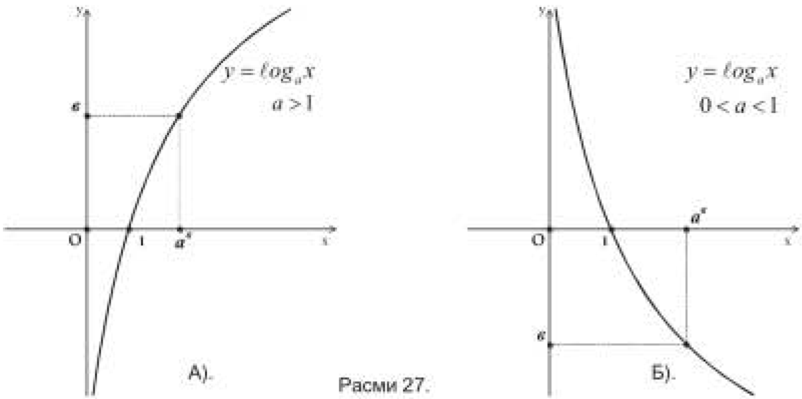
$$y_1 < y_2.$$

Аз ин ҷо афзуншавандагии функсияи логарифмӣ ҳангоми $a > 1$ будан бармеояд.

Ҳолати $0 < a < 1$ айнан ҳамин тавр муоина карда мешавад.

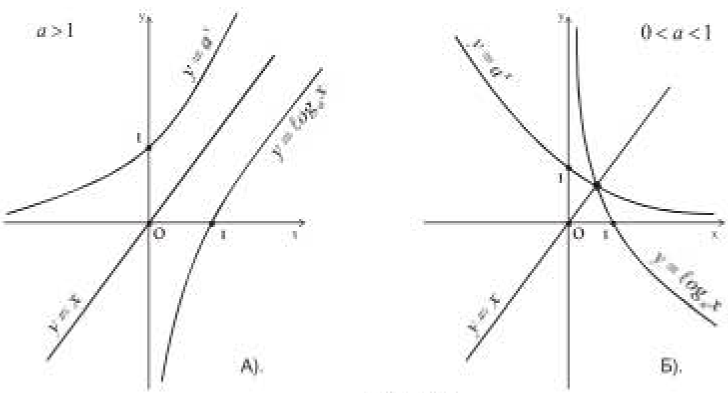
Акнун ба хосиятҳои $1^0$ - $7^0$ такя карда, функсияи $y = \ell og_a x$

-ро ҳангоми $a > 0$ будан (расми 27, А) ва ҳангоми $0 < x < 1$ будан (расми 27, Б) схемавӣ месозем.




Расми 27.

Агар графикҳои функсияҳои $y = a^x$ ва $y = \ell og_a x$ -ро дар як системаи координатӣ схемавӣ кашем (расми 28), он гоҳ пай мебарем, ки онҳо нисбат ба хатти рости $y = x$ симметрӣ мебошанд. Ин тасдиқро қотеона исбот кардан мумкин аст (Исбот аз доираи математикаи мактабӣ берун аст, бинобар ин оварда намешавад).




Расми 28.

Акнун татбиқи хосиятҳои функсияи логарифмиро дар ҳалли чанд мисол дида мебароем.

Мисоли 1. Соҳаи муайянии функсияи $y = \ell og_4(2-5x)$ -ро меёбем.

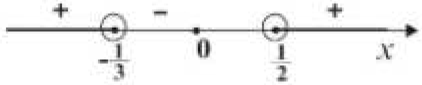
Ҳал. Соҳаи муайянии функсияи логарифмӣ $R_+ = (0;\infty)$ аст. Бинобар ин, функсияи мазкур танҳо барои ҳамон қиматҳои аргументи $x$ муайян мебошад, ки дар онҳо $2-5x>0$ аст, яъне ҳангоми $x<0,4$ будан. Пас фосилаи $(-\infty; 0,4)$ соҳаи муайянии функсия аст.

Мисоли 2. Соҳаи муайянии функсияи $f(x)=\ell og_2(3-2x-x^2)$ -ро меёбем.

Ҳал. Мулоҳизаҳои дар ҳалли мисоли 1 гузаронидаро такрор карда, ба хулоса меоем, ки функсия барои ҳамон қиматҳои $x$ муайян аст, ки дар онҳо $3-2x-x^2>0$ мебошад. Ин нобаробариро ҳал мекунем. Решаҳои муодилаи $3-2x-x^2=0$ -ро ёфта, сеузваи квадратии $3-2x-x^2$ -ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем: $3-2x-x^2 = (3+x)(1-x)$. Ҳалли нобаробарии $(3+x)(1-x)>0$ фосилаи (-3; 1) аст.

Инак, соҳаи муайянии функсияи мазкур фосилаи (-3; 1) мебошад.

Мисоли 3. Соҳаи муайянии функсияи $f(x) = \ell og_{\frac{1}{2}}\dfrac{3x+1}{4x-2}$ - ро меёбем.




Ҳал. Нобаробарии $\dfrac{3x+1}{4x-2}>0$ -ро бо методи фосилаҳо ҳал карда (расми 29), ба натиҷа меоем, ки соҳаи муайянии функсия аз якҷояшавии фосилаҳои $(-\infty; -\frac{1}{3})$ ва $(\frac{1}{2}; +\infty)$ иборат аст.

Ҷ а в о б: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

М и с о л и 4. Ададҳои зеринро муқоиса мекунем:
а) $\ell og_4 5$ ва $\ell og_4 7$; б) $\ell og_{\frac{1}{4}} 5$ ва $\ell og_{\frac{1}{4}} 7$; в) $\ell og_2 9$ ва $\ell og_3 15$.

Ҳ а л. а) Функсияи логарифмии асосаш аз 1 калон дар тамоми хатти рост афзуншаванда мебошад. Азбаски 7>5 аст, пас $\ell og_4 7 > \ell og_4 5$ мебошад.

б) Дар ҳолати мазкур асоси логарифм аз 1 хурд аст. Бинобар ин, функсияи $y = \ell og_{\frac{1}{4}} x$ камшаванда мебошад. Пас, $\ell og_{\frac{1}{4}} 7 < \ell og_{\frac{1}{4}} 5$.

в) Мебинем, ки $9 > 8 = 2^3$ аст. Аз ҳамин сабаб $\ell og_2 9 > \ell og_2 2^3$ ё $\ell og_2 9 > 3$ мебошад. Аз тарафи дигар, $15 < 27 = 3^3$, пас $\ell og_3 15 < 3$. Инак, $\ell og_3 15 < \ell og_2 9$ мебошад.

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Таърифи функсияи логарифмиро баён карда, якчанд мисолҳои мушаххаси онро оред.

**2.** Хосиятҳои функсияи логарифмиро номбар кунед.

**3.** Хосияти $6^0$-и функсияро ҳангоми $0 < a < 1$ ва $x < 1$ будан исбот кунед.

**4.** Исботи хосияти $7^0$-ро ҳангоми $0 < a < 1$ будан оред.

**5.** Оё графики функсияи логарифмӣ каниш дошта метавонад?

**6.** Чаро графики функсияи логарифмӣ тири абсиссаро намебурад?

### ***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

**183.** Хосиятҳои функсияи зеринро номбар кунед ва графикашро созед:

а) $y=\ell og_2 x$; б) $y=\ell og_{\frac{1}{3}} x$; в) $y=\ell og_4 x$; г) $y=\ell og_{\frac{1}{5}} x$.

Соҳаи муайянии ифодаро ёбед (184-186):

**184.** а) $\ell og_{\pi}(3-2x)$; б) $\ell og_4(16-x^2)$;

в) $\ell og_{\frac{1}{3}}(-\sqrt{x}+3)$; г) $\ell og_7(1-2x)$.

**185.** а) $\ell og_{0,8}\dfrac{4x-2}{5x+7}$; б) $\ell og_{\sqrt{2}}(3-2x-x^2)$;

в) $\ell og_{2,5}\dfrac{x-1}{2-3x}$; г) $\ell og_3(-x+x^2)$.

**186.** а) $\ell og_{\frac{1}{2}}\sin x$; б) $\ell og_4(2^x-1)$;

в) $\ell og_{\frac{1}{4}}\cos x$; г) $\ell g(1-5^x)$.

Ададҳоро муқоиса кунед (187-188):

**187.** а) $\ell og_3 5$ *ва* $\ell og_3 7$; б) $\ell og_{\frac{2}{3}} 12$ *ва* $\ell og_{\frac{2}{3}} 15$;

в) $\ell og_8\dfrac{5}{7}$ *ва* $\ell og_8\dfrac{3}{7}$; г) $\ell og_{0,6}\dfrac{6}{11}$ *ва* $\ell og_{0,6}\dfrac{8}{11}$.

**188.** а) $\ell og_2 12$ *ва* $\ell og_5 30$; б) $\ell og_3 2$ *ва* $\ell og_4 0{,}2$;

в) $\ell og_3 5$ *ва* $\ell og_7 4$; г) $\ell og_3 10$ *ва* $\ell og_7 46$;

д) $\ell og_7 3$ *ва* $\ell og_5 9$; е) $\ell og_{11} 7$ *ва* $\ell og_{13} 19$.

**189.** Адади зеринро бо як муқоиса кунед:

а) $\ell og_\pi 3{,}1$; б) $\ell og_6 8{,}2$; в) $\ell g 2{,}9$; г) $\ell og_{0,2} 0{,}7$.

**190.** Қимати ифодаро ёбед:

а) $\ell og_2(2\sin\frac{\pi}{12}) + \ell og_2 \cos\frac{\pi}{12}$; б) $\ell og_3(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}) + \ell og_3(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16})$;

в) $\ell g\, tg10 + \ell g\, ctg10$; г) $\ell og_\pi(5+2\sqrt{6}) + \ell og_\pi(5-2\sqrt{6})$.

**191.** Аз баробарӣ $x$ -ро ёбед:

а) $\ell og_2 x = 2\ell og_4 6 - \ell og_4 18$; б) $\ell og_3 x = \ell og_2 6 - 2\ell og_2 4\sqrt{6}$;

в) $\ell og_5 x = \frac{1}{2}\ell og_3 144 + \ell og_3 0{,}75$; г) $\ell og_\pi x = 2\ell og_{0,1} 5 + \ell og_{0,1} 4$.

**192.** Қиматҳои хурдтарин ва калонтарини функсияи

а) $f(x) = \ell og_{\frac{1}{4}} x$ -ро дар порчаи $\left[\frac{1}{16}; 2\right]$;

б) $f(x) = \ell og_2 x$ -ро дар порчаи $[1; 4]$

ёбед.

### *Машқҳо барои такрор*

**193*.** Муодиларо ҳал кунед:

$$2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x+\sqrt{x^2-4}-2} = 6.$$

**194*.** Нобаробариро ҳал кунед:

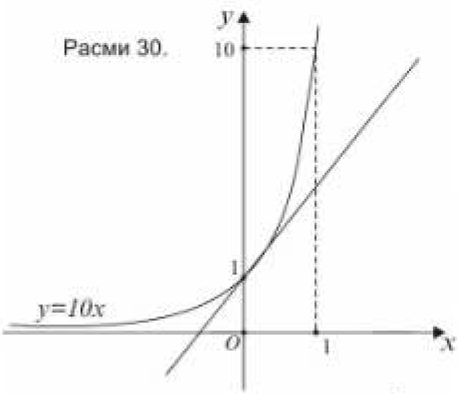
$$\frac{1}{x-1} > \frac{2}{2-x}.$$

**195.** Миқдори китобҳо дар як раф нисбат ба дигараш 2 маротиба кам аст. Агар аз рафи якум 6 китобро гирем ва дар рафи дуюм 8 китоб монем, он гоҳ адади китобҳо дар рафи якум нисбат ба рафи дуюм 7 маротиба кам мешавад. Дар ҳар як раф чанд китоб ҳаст?

**196.** Ҳосилаи функсияи $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ -ро ёбед.

**197.** $XKY$ - хурдтарин каратнокии умумии ададҳои 18 ва 14-ро ёбед.

## 17. АДАДИ *e*. ЛОГАРИФМИ НАТУРАЛӢ



Расми 30.

Функсияи $y=10^x$ -ро дида мебароем. Ин функсия афзуншаванда буда, графики он хатти каҷи яклухт аст (расми 30). Аз афзуншавии функсия бармеояд, ки агар вай ҳосила дошта бошад, пас ҳосилаи он барои ҳамаи қиматҳои аргумент адади мусбат аст.

Фарзияи зеринро, ки исботаш оянда (дар банди 21) оварда мешавад, бе исбот қабул мекунем: *функсияи* $10^x$ *дар ҳамаи нуқтаҳои тири ададӣ ҳосилаи мусбат* дорад. Ҳосилаи ин функсияро дар нуқтаи $x=0$ бо $\dfrac{1}{M}$ ишорат мекунем.

Тавре медонем, ҳосилаи функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи $x_0$ ададест, ки ба он нисбати

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

ҳангоми ба нул майл кардани $\Delta x$ майл мекунад. Ҳамин тариқ,

$$\frac{10^{0+\Delta x}-10^0}{\Delta x}=\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to\frac{1}{M}\ \text{ ҳангоми } \Delta x\to 0\,.$$

Ҳисоб карда шудааст, ки қимати тақрибии адади доимии $M$ зерин аст: $M = 0,4343...$

Т а ъ р и ф и 1. **Адади $10^M$ адади $e$ номида мешавад.**

Ҳамин тариқ, $e = 10^M$. Аз ин ҷо $M = \ell g e$. Исбот карда шудааст, ки адади $e$ адади ирратсионалӣ мебошад. Яъне, онро дар намуди касри даҳии даврии беохир ё дар намуди $\frac{m}{n}$, ки $m$ адади бутун ва $n$-натуралӣ мебошад, тасвир кардан мумкин нест. Дар замони мо бо ёрии компютерҳо зиёда аз дуним ҳазор рақами даҳии адади $e$ ёфта шудааст. Аввалин рақамҳои ин адад чунинанд:

$$e = 2,718281828459045...$$

Ҳангоми ҳисоббарориҳо (вобаста ба саҳеҳии зарурии натиҷа) $e = 2,72$ ё $e = 2,718$ ва ё $e = 2,7183$ қабул мекунанд.

Функсияи нишондиҳандагии асосаш $e$-ро, яъне $y = e^x$-ро баъзан *экспонента* ҳам мегӯянд.

Э з о ҳ. Таърифи аниқи адади $e$ чунин аст: $e$ ададест, ки ба он ифодаи $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ҳангоми ба беохир майл кардани $n$ майл мекунад. Исботи ин тасдиқ аз доираи математикаи мактабӣ берун аст.

Адади $e$ мусбат ва ба 1 баробар нест. Барои ҳамин логарифмҳо аз рӯйи асоси $e$ муайян мебошанд.

Т а ъ р и ф и 2. **Логарифми асосаш $e$ логарифми натуралӣ номида мешавад.**

Ин логарифм бо $\ell n$ ишорат карда мешавад, яъне $\ell nb = \ell og_e b$.

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Фарзияеро, ки бо истифодаи он адади $e$ дохил карда шудааст, баён кунед.

**2.** Чӣ гуна логарифмро натуралӣ меноманд ва онро чӣ тавр ишорат мекунанд?

**3.** Таърифи аниқи адади $e$ - ро баён кунед.

**4.** Адади $e$ чӣ гуна адад аст ва он ба чанд баробар мебошад?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

**198.** Тақрибан ҳисоб кунед (бо саҳеҳии $10^{-3}$):

а) $e^2$; б) $\frac{1}{e}$; в) $\sqrt{e}$; г) $\frac{1}{e^2}$.

**199.** Қимати ифодаро ёбед:

а) $\ell ne^2$; б) $\ell ne^{-3}$; в) $e^{\ell n4}$; г) $\ell n\frac{1}{\sqrt{e}}$.

**200.** Ҳисоб кунед:

а) $\frac{2\ell n3}{\ell n45 - \ell n5} \cdot \frac{\ell n4}{\ell n32}$; б) $\frac{\ell n8 - \ell n4}{\ell n8 + \ell n4} \cdot \frac{\ell n3}{\ell n81 - \ell n9}$.

**201.** Ададҳоро муқоиса кунед:

а) $\ell n\frac{1}{3}$ *ва* $\ell n\frac{1}{2}$; б) $\ell n7$ *ва* $\ell n19$;

в) $-\ell n0{,}1$ *ва* $1$; г) $-\ell n11$ *ва* $-1$.

**202.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $e^{-2x+1}=1$;  б) $e^{x^2-2x}=\frac{1}{e}$;

в) $e^{\sqrt{x}-2}=\sqrt{e}$;  г) $e^{x^3-x-4}=-1$.

**203.** Нобаробариро ҳал кунед:

а) $e^{3x-5}\geq 1$;  б) $e^{-x+4}<1$;

в) $e^{2x}+e^{x}\leq 2$;  г) $e^{x}-2e^{-x}>-1$.

**204*.** Нишон диҳед, ки логарифми натуралии адад тақрибан 2,3 маротиба аз логарифми даҳии ҳамин адад зиёд аст.

### *Машқҳо барои такрор*

**205.** КТУ- калонтарин тақсимкунандаи умумии ададҳои 18 ва 12-ро ёбед.

**206.** Ҳисоб кунед: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

**207.** Ифодаро сода кунед: $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{a}-2b}{\dfrac{b}{a}-1}$.

**208.** Муодилаи $\cos(1-2x)=-\frac{1}{2}$ – ро ҳал кунед.

**209.** Ҳалли нобаробарии зеринро ёбед:

$$\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2-2x}\geq 1.$$

## §6. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИИ ЛОГАРИФМӢ

### 18. МУОДИЛАИ ЛОГАРИФМӢ

*Муодилаи логарифмӣ* гуфта, муодилаеро меноманд, ки он дар тахти аломати логарифм тағйирёбанда дорад. Муодилаи одитарини логарифмӣ муодилаи

$$\ell og_a x = b$$

аст. Аз хосиятҳои функсияи логарифмӣ (ниг. ба банди 16) ё бевосита аз таърифи логарифм бармеояд, ки ин муодила барои ҳар гуна адади ҳақиқии $b$ ҳал дорад ва ҳаллаш ягона аст. Ин ҳал бо формулаи $x = a^b$ ифода меёбад, яъне бо амали потенсиронӣ ёфта мешавад.

Э з о ҳ. Дар бандҳои пешина, аниқаш дар бандҳои 14-16 мо аллакай бо муодилаи одитарини логарифмӣ вохӯрда будем, вале бе истифодаи истилоҳи муодилаи логарифмӣ (ниг., масалан, ба машқҳои 154-156, 172-173 ва 191, ё ба исботи хосияти $2^0$-и функсияи логарифмӣ дар банди 16).

Барои ҳал кардани муодилаи логарифмии нисбатан мураккаб бо истифодаи хосиятҳои логарифм (ниг. ба банди15) табдилоти айниятӣ гузаронидан лозим меояд. Ин имконият медиҳад, ки аз муодилаи мурракаби логарифмӣ ба муодилаи алгебравии бароямон муқаррарӣ гузарем. Дар айни ҳол ин гузариш боиси васеъ шудани соҳаи қиматҳои имконпазири тағйирёбанда шуда метавонад. Ин васеъшавӣ ба он оварда мерасонад, ки баъзе аз решаҳои ёфташуда, решаҳои муодилаи аввала нестанд. Барои ҳамин, ҳангоми ҳалли муодила ҳатман бояд ё соҳаи имконпазири тағйирёбандаи муодила дар ҳар қадами табдилдиҳӣ ба эътибор гирифта шавад, ё бо гузаронидани санҷиш муайян карда шавад, ки решаҳои ёфташудаи муодилаи муқаррарӣ решаҳои муодилаи аввалаанд ё не.

Табдилдиҳиҳо имконият медиҳанд, ки муодилаи аввала ба яке аз намудҳои:

$$\text{а)}\ \ell og_a f(x) = b; \qquad \text{б)}\ \ell og_a f(x) = \ell og_a g(x)$$

оварда шавад. Дар ҳолати а) маҷмуи қиматҳои имконпазири $x$ бо нобаробарии $f(x) > 0$ муайян шуда, муодила дар ин маҷмуъ ба муодилаи $f(x) = a^b$ баробарқувва аст. Мувофиқан, дар мавриди б) маҷмуи қиматҳои имконпазир бо системаи нобаробариҳои $f(x) > 0$ ва $g(x) > 0$ муайян мешавад. Муодила дар ин маҷмуъ ба муодилаи $f(x) = g(x)$ баробарқувва аст.

Дар поён ин гуфтаҳоро бо ҳалли муодилаҳои мушаххас равшан мекунем.

М и с о л и 1. Муодилаи $\ell og_2(x+1) + \ell og_2(x-1) = 3$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Ҷамъи логарифмҳоро дар қисми чап дар намуди ҳосили зарб тасвир карда, муодилаи

$$\ell og_2\left[(x+1)(x-1)\right] = 3 \quad \text{ё ин ки} \quad \ell og_2(x^2-1) = 3$$

-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо мувофиқи таърифи логарифм $x^2 - 1 = 8$. Қиматҳои $x_1 = -3$ ва $x_2 = 3$ решаҳои ин муодилаанд. Вале ҳангоми $x = -3$ будан тарафи чапи муодила маъно надорад, чунки барои чунин қимат ҳам $x + 1 < 0$ ва ҳам $x - 1 < 0$ аст. Пас адади $x = -3$ решаи муодилаи квадратӣ буда, решаи муодилаи аввала нест.

Ҷ а в о б: 3.

М и с о л и 2. Решаҳои муодилаи

$$\ell og_x(x^2 - 3x + 3) = 1$$

-ро меёбем.

Ҳ а л. Қисми чапи муодила маъно дорад, агар $x > 0$, $x \neq 1$ ( $x$ асоси логарифм аст) ва $x^2 - 3x + 3 > 0$ бошад. Аз таърифи логарифм бевосита

$$x^2 - 3x + 3 = x$$

бармеояд. Аз ин ҷо $x^2-4x+3=0$. Ададҳои 1 ва 3 решаҳои ин муодилаи квадратианд. Вале $x=1$ решаи муодилаи аввала нест. Ҳангоми $x=3$ будан $x^2-3x+3=3^2-3\cdot3+3=3>0$ аст. Пас, танҳо адади 3 ҳалли муодила аст.

Ҷ а в о б: 3.

М и с о л и 3. Муодилаи

$$\ell og_2{}^2 x-\ell og_2 x-2=0$$

-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Ҳанӯз дар банди 11 (ниг. ба тарзи ҳалли мисоли 4) қайд карда будем, ки агар функсияи номаълумдор дар муодила дар дараҷаҳои гуногун ояд, муодиларо бо дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал кардан мумкин аст. Дар муодилаи мазкур $\ell og_2 x$ чунин функсия мебошад. $t=\ell og_2 x$ ишорат карда, ба ҷойи муодилаи аввала муодилаи

$$t^2-t-2=0$$

-ро ҳосил мекунем. Ададҳои $t_1=-1$ ва $t_2=2$ решаҳои ин муодилаанд. Акнун қиматҳои матлуби $x$ -ро меёбем:

$$t_1=\ell og_2 x=-1, \qquad x_1=2^{-1}=\frac{1}{2};$$

$$t_2=\ell og_2 x=2, \qquad x_2=2^2=4.$$

Ҳар ду қимати ёфташуда муодиларо қаноат мекунонанд, чунки соҳаи қиматҳои имконпазири ифодаи тарафи чапи муодила ададҳои мусбат аст.

Ҷ а в о б: $\frac{1}{2}$; 4.

М и с о л и 4. Муодилаи $\ell og_{0,6}x+4\ell og_{\frac{5}{3}}x=3$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Дар ҷамъшавандаи дуюм ба логарифми асосаш 0,6 мегузарем. Барои ин формулаи гузаришро истифода мекунем (ниг. ба хулосаи 2-и банди 15):

$$\ell og_{\frac{5}{3}}x=\frac{\ell og_{0,6}x}{\ell og_{0,6}\frac{5}{3}}.$$

Азбаски $\ell og_{0,6}\frac{5}{3}=\ell og_{\frac{3}{5}}\frac{5}{3}=\ell og_{\frac{3}{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}=-\ell og_{\frac{3}{5}}\frac{3}{5}=-1$ аст, пас $\ell og_{\frac{5}{3}}x=-\ell og_{0,6}x$. Акнун муодилаи додашуда намуди $-3\ell og_{0,6}x=3$ ё $\ell og_{0,6}x=-1$-ро мегирад. Аз ин ҷо $x=(0,6)^{-1}=\frac{1}{0,6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

Ҷ а в о б: $1\frac{2}{3}$.

М и с о л и 5. Муодилаи $log_2(x+1)+log_{x+1}2=2,5$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Аз формулаи $log_a x=\frac{1}{log_x a}$ истифода карда, ҳосил мекунем:

$log_2(x+1)+\frac{1}{log_2(x+1)}=\frac{5}{2}$ ё $2log_2^2(x+1)-5log_2(x+1)+2=0.$

Гузориши $log_2(x+1)=y$ моро ба муодилаи $2y^2-5y+2=0$ меорад. Қиматҳои $y_1=2;\ y_2=\frac{1}{2}$ решаҳои ин муодилаанд. Акнун ба номаълуми аввала бармегардем:

$$log_2(x+1)=2;\ \ x+1=2^2;\ x=3;$$

$$log_2(x+1)=\frac{1}{2};\ \ x+1=2^{\frac{1}{2}};\ \ x=\sqrt{2}-1.$$

Бо осонӣ мебинем, ки қиматҳои ёфташудаи $x$ ҳалли муодилаанд.

Ҷ а в о б: 3; $\sqrt{2}-1$.

М и с о л и 6. Решаи муодилаи $3^{7-2x}=5$-ро меёбем.

Ҳ а л. Хотирнишон мекунем, ки ин муодила ба ҳамон гурӯҳи муодилаҳо дохил мешавад, ки дар бораашон дар эзоҳи 2-и банди 11 сухан ронда будем.

Аз ҳар ду тарафи муодила аз рӯйи асоси 3 логарифм гирифта, ҳосил мекунем:

$$\ell og_3 3^{7-2x}=\ell og_3 5 \quad \text{ё} \quad 7-2x=\ell og_3 5.$$

Инак, $x=3{,}5-\dfrac{1}{2}\ell og_3 5$ аст.

Қайд мекунем, ки ин намуд муодилаҳои нишондиҳандагиро, ки танҳо бо истифодаи таърифи логарифм ҳал мешаванд, ҳанӯз дар банди 14 дида баромадан мумкин буд.

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Баробариҳоеро, ки хосиятҳои асосии логарифмро ифода мекунанд, нависед.

**2.** Муодилаи одитарини логарифмиро нависед ва гӯед, ки барои чӣ онро одитарин меноманд?

**3.** Чаро муодилаи одитарини логарифмӣ танҳо якто реша дорад?

**4.** Бо мисолҳо фаҳмонед, ки ҳангоми табдилдиҳии айниятии ифодаи логарифмӣ соҳаи муайянии ифодаи ҳосилшаванда васеътар буданаш мумкин аст.

**5.** Раванди ҳалли муодилаи логарифмиро шарҳ диҳед.

**6.** Муодилаи логарифмие тартиб диҳед, ки он бо дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал карда шавад.

## *Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ*

Муодиларо ҳал кунед (210-219):

**210.** а) $8^x = 0{,}4$; б) $(0{,}2)^x = 4$; в) $3^x = 7$; г) $9^x = e$.

**211.** а) $(0{,}3)^{x-1} = 2$; б) $4^{x^2} = 5$; в) $10^{2x} = 6$; г) $e^{2-5x} = 2$.

**212.** а) $\ell og_3 x = 2$; б) $\ell og_{0,2} x = -1$; в) $\ell g x = -\frac{1}{2}$; г) $\ell n x = 2$.

**213.** а) $\ell og_3(2x-1) = 2$; б) $\ell n(x^2 + 2x + 4) = \ell n 7$;

в) $\ell n(4-x) = 0$; г) $\ell og_{\frac{1}{2}}(5-x) = 1$.

**214.** а) $\ell og_a x = \ell og_a 4 - 2\ell og_a 5$; б) $\ell g x + \ell g(9x+10) = 3$;

в) $\ell og_a x = 2\ell og_a 3 + \ell og_a 2$; г) $\ell g(3x-2) + \ell g 25 = 3$.

**215.** а) $\dfrac{\ell og_2 x + 1}{\ell og_2(4x-15)} = 2$; б) $\dfrac{1}{5-\ell g x} + \dfrac{2}{1+\ell g x} = 1$;

в) $\dfrac{\ell g x - 5}{2} + \dfrac{13 - \ell g x}{3} = 2$; г) $\ell n(16-6x) = 2\ell n x$.

**216.** а) $\ell og_3^2 x - 3\ell og_3 x + 2 = 0$; б) $\ell n^2 x + \ell n x - 2 = 0$;

в) $2\ell og_3^2 x - 7\ell og_3 x + 3 = 0$; г) $\ell n(x^2 - 6x + 9) = \ell n 3 + \ell n(x+3)$.

**217.** а) $\ell og_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$; б) $\ell og_x(x^2 + 7x - 1) = 2$;

в) $\ell og_7[46 + \ell og_3(x-5)] = 2$; г) $\ell og_2[\ell og_5(4-x) + 6] = 3$.

**218.** а) $\ell og_a x = \ell og_{\sqrt{a}} 4 + \ell og_{\frac{1}{a}} 5$; б) $\ell og_9 x + \ell og_3 x = 3$;

в) $2\ell og_2 x + \ell og_{\frac{1}{2}} x = 5$; г) $\ell og_x 2 - \ell og_4 x = -\frac{1}{2}$.

**219.** а) $\ell og_3(10 - 3^x) = 2 - x$; б) $\ell og_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4$;

в) $x^{\ell g x - 1} = 100$; г) $x^{1 - \frac{\ell g x}{3}} = \sqrt[3]{100}$.

**220.** Муодиларо ҳал кунед:

$$2^{x+2}+2^{x}=5^{x}-5^{x-1}.$$

**221.** Ифодаро сода кунед:

$$\left(\frac{1}{5}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}\cdot(ab^{5})^{-1}.$$

**222.** Масофаи байни ду шаҳр 720 км аст. Ду қатора ба пешвози ҳамдигар ҳаракат карда, дар миёнаҷойи роҳ бо ҳамдигар вохӯрданд. Маълум аст, ки қатораи дуюм 1 соат пас аз қатораи якум ба роҳ баромада, 4 км/соат тезтар роҳ тай мекард. Суръати ҳар як қатораро ёбед.

**223.** 0,1% -и адади $(2-1\frac{1}{4}):0{,}25$-ро ёбед.

**224.** Нуқтаҳои критикии функсияи $f(x)=x^{4}-3x^{3}$ -ро ёбед.

## 19. НОБАРОБАРИИ ЛОГАРИФМӢ

Нобаробариеро, ки тағйирёбанда дар он дар таҳти аломати логарифм аст, *нобаробарии логарифмӣ* меноманд. Ҳангоми ҳалли чунин нобаробариҳо аз хосияти афзуншавӣ ё камшавии (монотонии) функсияи логарифмӣ истифода мекунанд:

а) ҳангоми $a>1$ будан: агар $0<x<1$ бошад, он гоҳ $\log_a x<\log_a 1$ аст, яъне $\log_a x<0$; агар $x>1$ бошад, он гоҳ $\log_a x>\log_a 1$, яъне $\log_a x>0$.

б) ҳангоми $0<a<1$ будан: агар $0<x<1$ бошад, он гоҳ $\log_a x>0$ аст; агар $x>1$ бошад, он гоҳ $\log_a x<0$ аст.

М и с о л и 1. Нобаробарии

$$\log_3(2x+1)<\log_3 5$$

-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Асоси логарифм $a=3>0$ аст. Пас ҳангоми ҷой доштани нобаробарии мазкур нобаробарии

$$2x+1<5$$

ҷой дорад. $x<2$ ҳалли ин нобаробарӣ аст. Вале тағйирёбандаи $x$ бояд чунин бошад, ки ифодаҳои дар нобаробарӣ буда маъно дошта бошанд. Қисми чапи нобаробарии мазкур маъно дорад, агар $2x+1>0$ ё $x>-\frac{1}{2}$ бошад.

Инак, ҳалли нобаробарӣ фосилаи $\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)$ аст.

М и с о л и 2. Ҳалли нобаробарии

$$\ell og_{\frac{1}{3}}(x^2+2x)>-1$$

-ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $\frac{1}{3}<1$ аст, пас ҳангоми ҷой доштани нобаробарии мазкур ҳатман нобаробарии $x^2+2x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$ ҷой дорад. Инчунин, барои маъно доштани ифодаи тарафи чапи нобаробарӣ зарур аст, ки $x^2+2x>0$ бошад. Ҳамин тариқ, нобаробарии додашуда ба системаи нобаробариҳои

$$\begin{cases} x^2+2x-3<0, \\ x^2+2x>0 \end{cases}$$

баробарқувва аст. Фосилаи (-3;1) ҳалли нобаробарии $x^2+2x-3<0$, фосилаҳои $(-\infty;-2)$ ва $(0;\infty)$ ҳалли нобаробарии $x^2+2x>0$ мебошанд. Қисми умумии ин фосилаҳо фосилаҳои (-3;-2) ва (0;1) мебошанд.

Инак, фосилаҳои (-3;-2) ва (0;1) ҳалли нобаробарии додашудаанд.

М и с о л и 3. Нобаробарии $log_{\frac{1}{2}}(x+1) - log_{\frac{1}{2}}(2x-6) \geq -2$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Қисми чапи нобаробарии додашуда маъно дорад, агар $\begin{cases} x+1>0, \\ 2x-6>0 \end{cases}$ ё $\begin{cases} x>-1, \\ x>3 \end{cases}$ ва ё $x>3$ бошад. Дар ин соҳа нобаробариро ҳал мекунем:

$$log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{2x-6} \geq -2; \quad \frac{x+1}{2x-6} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2};$$

$$\frac{x+1}{2x-6} \leq 4; \quad \frac{-7x+25}{2x-6} \leq 0.$$

Бо усули фосилаҳо меёбем, ки нимфосилаи $(3;\frac{25}{7}]$ ҳалли нобаробарии охирин аст ва соҳаи $x>3$ онро дар бар мегирад.

Ҷ а в о б: $(3;\frac{25}{7}]$.

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Чӣ гуна нобаробариро нобаробарии логарифмӣ меноманд?

**2.** Ҳангоми ҳалли нобаробарии логарифмӣ аз чӣ истифода мебаранд?

**3.** Раванди ҳалли нобаробарии логарифмиро вобаста ба асоси логарифм шарҳ диҳед.

**4.** Моҳияти усули фосилаҳоро дар мисоли нобаробарии мушаххас баён кунед.

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

Нобаробариро ҳал кунед (225-230).

**225.** а) $\ell og_2 x>1$; б) $\ell og_{\frac{1}{4}} x<2$; в) $\ell og_{0,6} x<1$; г) $\ell og_{2,5} x>2$.

**226.** а) $\ell og_3(x-2)<2$;   б) $\ell og_{\frac{1}{2}}(2-3x)>-1$;

в) $\ell og_5(3x-1)>2$;   г) $\ell og_{\frac{1}{6}}(7x+1)<-2$.

**227.** а) $\ell g(2x-3)>\ell g(x+1)$;

б) $\ell g(2x-4)\geq \ell g(x+1)$;

в) $\ell og_2(4x-3)\leq \ell og_2(3x-4)$;

г) $\ell og_{0,3}(2x+7)<\ell og_{0,3}(4x-1)$.

**228.** а) $\ell og_{\pi}(x+1)+\ell og_{\pi}x<\ell og_{\pi}2$;

б) $\ell nx+\ell n(x-1)\leq \ell n6$;

в) $\ell og_2(x^2-x-12)<3$;

г) $\ell og_{\frac{1}{2}}(8-x)\leq \ell og_{\frac{1}{2}}(x^2+2)$.

**229.** а) $\ell n^2x-\ell nx\leq 0$;   б) $\ell og^2_{\frac{1}{5}}x-3>0$;

в) $\ell g^2x+3\ell gx>4$;   г) $\ell og^2_5x-25\leq 0$.

**230*.** а) $\ell og_2\cos x<-\frac{1}{2}$;   б) $|2-\ell nx|\leq 1$;

в) $\ell og_{\frac{1}{2}}\sin 2x>1$;   г) $|3\ell gx-1|<2$.

## *Машқҳо барои такрор*

**231.** Муодилаи $2\sin^2 x=5\cos x+2$ -ро ҳал кунед.

**232.** Муодиларо ҳал кунед: $\ell og_2(5^x+3)+\ell og_2(5^x-3)=4$.

**233.** Фосилаҳои афзуншавию камшавӣ ва нуқтаҳои экстремуми функсияи $y=-x^2+6x-8$ -ро ёбед.

**234.** Сода кунед: $\dfrac{27-27a+9a^2-a^3}{a^2-6a+9}$.

**235.** Комбайн 4 соат кор карду баъд ба он комбайни дуюм ҳамроҳ шуд. Ҳар ду пас аз ин даравро дар 8 соат ба охир расониданд. Ҳар як комбайн дар алоҳидагӣ даравро дар чанд соат ба охир мерасонд, агар маълум бошад, ки барои ин комбайни дуюм бояд 8 соат зиёд дарав мекард.

## 20. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ЛОГАРИФМӢ ВА ОМЕХТА

Барои ҳал кардани системаи муодилаҳои логарифмӣ тарзи маъмули ёфтани ҳалли муодилаҳои логарифмиро истифода карда, системаи муодилаҳои алгебравии муқарририро ҳосил мекунанд. Ин системаро ҳал карда, аз байни онҳо ҳалли системаи муодилаҳои логарифмиро ҷудо менамоянд.

Усули умумии ҳалли системаҳои омехта (системаҳое, ки дар таркиби худ ғайри муодилаи логарифмӣ боз муодилаҳои намуди дигарро, масалан, муодилаҳои хаттӣ, квадратӣ, ирратсионалӣ, нишондиҳандагӣ ва ғайраро доранд) низ аз ҳосил кардани системаи муқаррарии алгебравӣ иборат аст.

М и с о л и 1. Системаи

$$\begin{cases} \ell og_2 x - \ell og_2 y = 1, \\ \ell og_2 (xy) = 3 \end{cases}$$ -ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Муодилаи якуми системаро дар намуди $\ell og_2 \frac{x}{y} = 1$ навишта, меёбем: $\frac{x}{y} = 2$ ё $x = 2y$. Аз муодилаи дуюм дорем: $xy = 2^3 = 8$. Дар ин ҷо $x = 2y$ гузошта, ҳосил мекунем: $y = \pm 2$ аст. Аз $x = 2y$ бармеояд, ки $x = \pm 4$. Вале қисми чапи система маъно дорад, агар $x > 0$ ва $y > 0$ бошад. Бо назардошти ин ҳалро меёбем.

Ҷ а в о б: (4; 2).

Э з о ҳ.  Системаи

$$\begin{cases} \ell og_2 \dfrac{x}{y} = 1, \\ \ell og_2 (xy) = 3 \end{cases}$$

ду ҳал дорад: (4; 2) ва (-4; -2). Инро маънидод кунед.

М и с о л и  2.  Системаи зеринро ҳал менамоем:

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \ell g\sqrt{xy} = 1 + \ell g2. \end{cases}$$

Ҳ а л. Аз $512 = 2^9$ ва $1 + \ell g2 = \ell g10 + \ell g2 = \ell g(10 \cdot 2) = \ell g20$ истифода карда, системаи

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ \sqrt{xy} = 20 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Агар $\sqrt{x} = u$ ва $\sqrt{y} = \vartheta$ гузорем, он гоҳ системаи

$$\begin{cases} u + \vartheta = 9, \\ u \cdot \vartheta = 20 \end{cases}$$

- ро доро мешавем. Дар муодилаи дуюми ин система $u = 9 - \vartheta$ гузошта, муодилаи квадратии $\vartheta^2 - 9\vartheta + 20 = 0$-ро соҳиб мешавем. Решаҳои он

$$\vartheta_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}, \quad \vartheta_1 = 4, \ \vartheta_2 = 5$$

мебошанд. Аз $u = 9 - \vartheta$ бармеояд: $u_1 = 5$, $u_2 = 4$. Вале $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = \vartheta$ ё $x = u^2$, $y = \vartheta^2$ аст. Пас, (25; 16) ва (16;25) ҳалҳои системаи аввалаанд.

М и с о л и 3. Системаи муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} xy = -1, \\ \log_{x+y} \sqrt{x^2 + y^2} = 2. \end{cases}$$

Ҳ а л. Муодилаи дуюми системаро чунин менависем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = (x + y)^2; \; x^2 + 2xy + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - \sqrt{x^2 + y^2} + 2xy = 0.$$

Муодилаи якуми системаро истифода карда, ишораи $\sqrt{x^2 + y^2} = t$ - ро дохил намуда, пайдо мекунем:

$$t^2 - t - 2 = 0; \; D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9;$$

$$t = \frac{1 \pm 3}{2}; \; t_1 = -1; \; t_2 = 2.$$

Решаи якум ношоям аст, чунки $t > 0$ бояд бошад. Пас,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2; \; x^2 + y^2 = 4; \quad (x + y)^2 - 2xy = 4;$$

$$(x + y)^2 + 2 = 4; \; (x + y)^2 = 2; \; x + y = \pm\sqrt{2}.$$

Азбаски $x + y > 0$ аст (ҳамчун асоси логарифм), пас танҳо як системаи алгебравии $\begin{cases} x + y = \sqrt{2}, \\ xy = -1 \end{cases}$ - ро ҳосил мекунем.

Ҷуфти ададҳои $\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right)$ ва $\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)$ ҳалли ин системаанд. Бо осонӣ мебинем, ки онҳо ҳалли системаи аввала низ мебошанд.

Ҷ а в о б: $\left(\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2} \mp \sqrt{6}}{2}\right)$.

### *Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон*

**1.** Кадом тарзҳои ҳалли системаи муодилаҳои алгебравиро медонед?

**2.** Чӣ гуна системаи муодилаҳоро системаи муодилаҳои логарифмӣ меноманд?

**3.** Системаи муодилаҳои омехта гуфта, чӣ гуна системаҳоро дар назар доранд?

**4.** Раванди ҳалли системаи муодилаҳои логарифмиро баён кунед.

### *Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводи назариявӣ*

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (236-238):

**236.** а)
$$\begin{cases} \ell og_{\frac{1}{9}}(x+y)=-2, \\ \ell og_5(x-y)=2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \ell og_2 x+\ell og_4 y=4, \\ \ell og_4 x+\ell og_2 y=5; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \ell og_2(x-y)=5-\ell og_2(x+y), \\ \dfrac{\ell gx-\ell g4}{\ell gy-\ell g3}=-1; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \ell g(y-x)=\ell g2, \\ \ell og_2 x-4=\ell og_2 3-\ell og_2 y. \end{cases}$$

**237.** а)
$$\begin{cases} 5^x\cdot 2^y=80, \\ \ell og_{\sqrt{5}}(x+y)=2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=972, \\ \ell og_{\sqrt{3}}(x-y)=2; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81, \\ \ell g\sqrt{xy}=1+\ell g3; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \ell gx-\ell gy=\ell g15-1, \\ 10^{\ell g(3x+2y)}=39. \end{cases}$$

**238.** а)

$$\begin{cases} x-y=90, \\ \ell gx+\ell gy=3; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \ell og_4 x+\ell og_4 y=1+\ell og_4 9, \\ x+y-20=0; \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} \ell og_4 x-\ell og_2 y=0, \\ x^2-2y^2-8=0; \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} \ell og_4 (x+y)=0, \\ (x+14)(x+y)=64. \end{cases}$$

### *Машқҳо барои такрор*

**239.** Ифодаро сода кунед:

$$\left(\frac{a}{5+a}+\frac{5+a}{5-a}\right):\frac{3a+5}{a+5}.$$

**240.** Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 2x+9\geq 6x-5, \\ -\dfrac{x}{2}<-1. \end{cases}$$

**241.** Велосипедрон аз шаҳри А ба шаҳри Б, ки масофаи байнашон 45 км аст равон шуд. Пас аз 30 дақиқа аз паси ӯ велосипедрони дигар ба роҳ баромад. Вай ба шаҳри Б 15 дақиқа тезтар омада расид. Суръати велосипедрони аввала чанд аст, агар маълум бошад, ки суръати вай нисбат ба суръати дигарӣ 3 км/соат кам аст?

**242*.** Муодиларо ҳал кунед: $16^{\ell og_x 2}=8x$.

**243.** Айниятро исбот кунед: $\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha=\sin\alpha\, tg\alpha$.

## §7. ҲОСИЛА ВА ФУНКСИЯИ ИБТИДОИИ ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГИЮ ЛОГАРИФМӢ ВА ДАРАҶАГӢ

### 21. ҲОСИЛАИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Дар банди 17 ҳангоми дохил кардани мафҳуми логарифми натуралӣ фарз када будем, ки нисбати афзоиши функсияи $y=10^x$ бар афзоиши аргумент дар нуқтаи $x=0$ ҳангоми ба нул майл кардани афзоиши аргумент ба $\frac{1}{M}$ майл мекунад, яъне

$$\frac{10^{0+\Delta x}-10^0}{\Delta x}=\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to\frac{1}{M},\ \text{ҳангоми } \Delta x\to 0. \qquad (3)$$

Инчунин қайд карда будем, ки $M=0{,}4343...$ аст.

Ин фарзия ба тасдиқи дар нуқтаи $x=0$ ҳосила доштани функсияи $y=10^x$ ва ба $\frac{1}{M}$ баробар будани он баробарқувва аст. Фарзияро истифода карда, ҳосилаи функсияи нишондиҳандагии $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ -ро меёбем. Барои ин аввал ҳосилаи функсияи $y=10^x$ -ро дар нуқтаи дилхоҳ ҳисоб мекунем. Нисбати афзоиши ин функсия бар афзоиши аргумент

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{10^{x+\Delta x}-10^x}{\Delta x}=10^x\cdot\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

аст ва ҳангоми $\Delta x\to 0$ мувофиқи (3) он ба $\frac{1}{M}\cdot 10^x$ майл мекунад. Аз ин мулоҳизаҳо ва аз таърифи ҳосила бармеояд, ки

$$(10^x)'=\frac{1}{M}\cdot 10^x.$$

Барои асоси дилхоҳи $a>0,\ a\neq 1$ мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ (ниг. ба банди 14)

$$a^x = 10^{\ell g a^x} = 10^{x \ell g a}.$$

Пас, мувофиқи қоидаи дифферентсиронии функсияи мураккаб

$$(a^x)' = (10^{\ell g a^x})' = \frac{1}{M} \cdot 10^{x\ell g a} \cdot (x \ell g a)' = \frac{\ell g a}{M} \cdot 10^{x \ell g a} = \frac{\ell g a}{M} a^x.$$

Азбаски $10^M = e$ (ниг. ба таърифи 1-и банди 16) аст, пас $M = \ell g e$. Аз рӯи формулаи гузариш $\dfrac{lga}{M} = \dfrac{lga}{lge} = log_e a = lna$, бинобар ин

$$(a^x)' = a^x \ell n a. \qquad (4)$$

Т е о р е м а и 1. **Функсияи нишондиҳандагии $y = a^x$ дар ҳар як нуқтаи тири ададӣ ҳосила дорад ва ҳосилаи он бо формулаи (4) ифода карда мешавад.**

Х у л о с а. Функсияи нишондиҳандагӣ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ бефосила аст, яъне ҳангоми $x \to x_0$ $a^x \to a^{x_0}$.

Ин хулоса аз дифференсиалпазир будани функсия ва аз лемма оид ба бефосилагии ҳар гуна функсияи ҳосиладошта бармеояд.

Ҳосилаи функсияи $y = e^x$ -ро бевосита аз (4) ҳангоми $a = e$ будан ҳосил каран мумкин аст. Азбаски $\ell n e = 1$ аст, пас

$$(e^x)' = e^x. \qquad (5)$$

Яъне, **ҳосилаи экспонента $e^x$ ба худаш баробар аст.** Бар замми ин нишон додан мумкин аст, ки ҳар гуна функсияе, ки ҳосилааш ба худаш баробар буда, дар нуқтаи $x = 0$ ин ҳосила ба 1 баробар аст, экспонента мебошад.

М и с о л и 1. Ҳосилаи функсияҳои $y = 10^x$ ва $y = 3^{-5x}$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳ а л. Аз рӯйи формулаи (4) дорем:

$$(10^x)' = 10^x \ell n 10\,; \quad (3^{-5x})' = 3^{-5x}\ell n3\cdot(-5x)' = -5\cdot 3^{-5x}\ell n3\,.$$

М и с о л и 2. Ҳосилаи функсияи $y = e^{2x}$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Мувофиқи қоидаи ҳосилаи функсияи мураккаб ва формулаи (5) ҳосил мекунем: $(e^{2x})' = e^{2x}\cdot(2x)' = 2e^{2x}$.

М и с о л и 3. Функсияи $f(x) = (x-1)e^x$ -ро оид ба афзуншавӣ (камшавӣ) ва экстремум тадқиқ мекунем.

Ҳ а л. Ҳосилаи функсияро меёбем:

$$f'(x) = \left[(x-1)e^x\right]' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x\,.$$

Азбаски барои ҳар гуна қимати $x$, $e^x > 0$ аст, пас аломати ҳосила бо аломати $x$ якхела аст. Яъне, дар фосилаи $(0;\infty)$ $f'(x) > 0$ буда функсия меафзояд. Дар фосилаи $(-\infty;0)$ $f'(x) < 0$ аст, бинобар ин дар ин фосила функсия камшаванда аст. Дар атрофи нуқтаи $x = 0$ ҳосила аломаташро аз минус ба плюс иваз мекунад, яъне ин нуқта нуқтаи минимум аст: $f_{\min} = f(0) = -1$.

### *Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон*

**1.** Фарзияро, ки аз он истифода карда ҳосилаи функсияи нишондиҳандагӣ ёфта шудааст, баён кунед.

**2.** Теорема дар бораи мавҷудияти ҳосилаи функсияи нишондиҳандагиро оред.

**3.** Чаро функсияи нишондиҳандагӣ барои ҳар гуна қимати аргументаш бефосила аст?

**4.** Ҳосилаи экспонента ба чӣ баробар аст ва он чӣ тавр ҳосил карда мешавад?

**5.** Қоидаи ёфтани фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияро ба ёд оред.

**6.** Муодилаи расанда ба графики функсияи $y = e^x$ дар нуқтаи абсиссааш $x_0$ чӣ намуд дорад?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани мавodди назариявӣ***

Ҳосилаи функсияро ёбед (244-246):

**244.** а) $y = 2e^x + 3$; б) $y = 3x + 5e^{-x}$;

в) $y = 1 - \frac{1}{3}e^x$; г) $y = 5e^{-x} + x^2$.

**245.** а) $y = e^x \sin x$; б) $y = 2e^x + 3x$;

в) $y = 4x^2 - 4^x$; г) $y = x^2 \cdot 3^x$.

**246*.** а) $y = e^{x^2} \cos\frac{x}{2}$; б) $y = 6^{\frac{x}{2}} \cdot tg4x$;

в) $y = \frac{2^x}{1+2^{-x}}$; г) $y = \frac{0{,}2^{-x}}{x+1}$.

**247.** Дар нуқтаи абсиссааш $x_0$ муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)$ нависед:

а) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = 3^{-x}$, $x_0 = 1$.

**248.** Функсияро оид ба афзуншавӣ (камшавӣ) ва экстремумҳо тадқиқ кунед:

а) $f(x) = xe^{3x}$; б) $f(x) = x^2 \cdot 4^{-x}$;

в) $f(x) = xe^{-x}$; г) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$.

*Машқҳо барои такрор*

**249.** Қимати $x$ -ро ёбед: $\dfrac{2\frac{1}{3}-1}{4-x:7{,}5}=3$.

**250.** Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{5}-\dfrac{2x-y}{2}=3y-1, \\ \dfrac{5y-2}{2}+\dfrac{4x-5}{6}=8-2x. \end{cases}$$

**251.** Ҳисоб кунед: $\left(7\cdot\sqrt{\dfrac{5}{7}}-5\cdot\sqrt{\dfrac{7}{5}}\right)^2$.

**252.** Исбот кунед, ки $\dfrac{a^2}{1+a^4}\le\dfrac{1}{2}$ аст ( $a$ - адади дилхоҳ).

**253.** Муодилаи зеринро ҳал кунед:

$$8^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}.$$

## 22. ФУНКСИЯИ ИБТИДОИИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Дар ин банд ба ҳосил кардани функсияи ибтидоӣ барои функсияи нишондиҳандагӣ машғул мешавем.

Т е о р е м а и 2. **Функсияи** $\dfrac{a^x}{\ell na}$ **барои функсияи** $y=a^x$ **дар тири ададии** $\boldsymbol{R}=(-\infty;\infty)$ **функсияи ибтидоӣ аст.**

Дар ҳақиқат, $\ell na$ адади доимӣ аст, барои ҳамин мувофиқи формулаи (4) барои ҳар гуна қимати $x$

$$\left(\frac{a^x}{\ell na}\right)' = \frac{1}{\ell na}\left(a^x\right)' = \frac{1}{\ell na}\cdot a^x \ell na = a^x .$$

Ин баробарӣ нишон медиҳад, ки функсияи $\dfrac{a^x}{\ell na}$ барои $a^x$ функсияи ибтидоӣ аст.

Ҳамин тариқ, мувофиқи теоремаи банди 2 намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $y = a^x$ чунин аст:

$$F(x) = \frac{a^x}{\ell na} + C ,$$

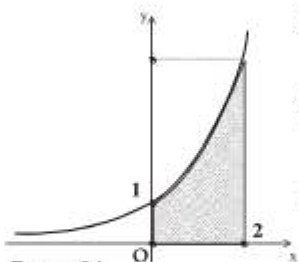
ки дар ин ҷо $C$ доимии дилхоҳ мебошад.

Э з о ҳ. Аз баробарии (5): $(e^x)' = e^x$ бармеояд, ки функсияи $e^x + C$ **намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи** $e^x$ **аст.**

М и с о л и 1. Функсияи ибтидоии функсияи зеринро меёбем:

а) $f(x) = 3^x$; б) $g(x) = 4\cdot 2^x$; в) $h(x) = 2e^{5x} - 10\cdot 0{,}7^x$ .

Ҳ а л. Аз теоремаи 2 ва қоидаҳои ёфтани функсияи ибтидоӣ истифода мекунем:



Расми 31.

а) $F(x) = \dfrac{3^x}{\ell n3} + C$;

б) $G(x) = 4\cdot\dfrac{2^x}{\ell n2} + C = \dfrac{2^{x+2}}{\ell n2} + C$;

в) $H(x) = \dfrac{2e^{5x}}{5} - 10\cdot\dfrac{0{,}7^x}{\ell n0{,}7} + C$ .

М и с о л и 2. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y = 4^x$, $y = 0$, $x = 0$ ва $x = 2$ маҳдудро меёбем.

Ҳ а л. Графикҳоро схемавӣ кашида, мебинем, ки фигураи додашуда трапетсияи каҷхаттаи дар расми 31 тасвир кардашуда мебошад. Бинобар ин, $S$ - масоҳати онро аз рӯйи формулаи масоҳати трапетсияи каҷхатта меёбем:

$$S = \int_0^2 4^x dx = \frac{4^x}{\ell n4}\bigg|_0^2 = \frac{16}{\ell n4} - \frac{1}{\ell n4} = \frac{15}{\ell n4}.$$

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Барои функсияи нишондиҳандагӣ кадом функсия, функсияи ибтидоӣ мебошад?

**2.** Намуди умумии функсияи ибтидоӣ барои экспонента чӣ гуна аст?

**3.** Соҳаи муайянии функсияи ибтидоии функсияи нишондиҳандагӣ кадом аст?

**4.** Оё ғайри экспонента функсияи дигареро нишон дода метавонед, ки функсияи ибтидоиаш ба худаш баробар бошад?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

**254.** Интегралро ҳисоб кунед:

а) $\int_0^1 0{,}5e^x dx$;   б) $\int_0^1 e^{3x} dx$;   в) $\int_2^4 2^x dx$;   $\int_{0,5}^2 4^x dx$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ёбед (255-256):

**255.** а) $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

б) $y = 2^x$, $y = 4^x$, $x = 1$;

в) $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

г) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$.

**256.** а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=2$, $x=0$;

б) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=e$;

в) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $x=-1$, $y=1$;

г) $y=e^{4x}$, $x=1$, $y=1$.

### *Машқҳо барои такрор*

**257.** Муодиларо ҳал кунед: $\sin 3x\cos 3x=-\frac{1}{4}$.

**258.** Чор адад, ки се тараф ва периметри секунҷаро ифода мекунанд, прогрессияи арифметикиро ташкил карда метавонанд?

**259.** Бригадаи коргарон бояд дар муҳлати муайян 260 детал тайёр мекард. Ҳар рӯз аз миқдори зарурӣ 6 деталӣ зиёд истеҳсол карда, бригада се рӯз пеш аз муҳлат супоришро иҷро намуд. Бригада чанд рӯз кор кардааст? Агар бригада супоришро барзиёд иҷро намекард, вай бояд ҳар рӯз чанд деталӣ истеҳсол менамуд?

**260.** Соҳае, ки дар ҳамворӣ бо нобаробарии зерин муайян мешавад, тасвир кунед:

а) $x^2+y^2\le 9$; б) $x+y\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

**261.** Ҳисоб кунед: $2\frac{3}{7}-3\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}\cdot 2$.

**262.** Аз ифода аз рӯи асоси дилхоҳ логарифм гиред:

а) $\frac{\sqrt{a\sqrt{a}}}{2ab}$; б) $\left(\frac{2}{3}c^{\frac{1}{3}}d^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

## 23. ҲОСИЛАИ ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ

Ҳосилаи функсияи логарифми натуралии $y = \ell nx$-ро меёбем. Исбот мекунем, ки барои дилхоҳ $x$-и калон аз нул формулаи

$$(\ell nx)' = \frac{1}{x} \tag{6}$$

дуруст аст. Мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ барои ҳар гуна $x > 0$ навишта метавонем: $x = e^{\ell nx}$. Пас, ҳангоми $x > 0$ будан ҳосилаҳои функсияҳои $y = x$ ва $y = e^{\ell nx}$ ба ҳам баробаранд, яъне

$$(x)' = (e^{\ell nx})' \tag{7}$$

аст. Маълум, ки $(x)' = 1$. Ҳосилаи $e^{\ell nx}$-ро аз рӯйи қоидаи ёфтани ҳосилаи функсияи мураккаб ва формулаи (5)-и банди 21 ҳисоб мекунем:

$$(e^{\ell nx})' = e^{\ell nx} \cdot (\ell nx)' = x(\ell nx)'.$$

Ҳамин тариқ, аз ин ҷо ва аз (7) бармеояд, ки $1 = x(\ell nx)'$. Ниҳоят, аз ин ҷо баробарии (6) ҳосил мешавад.

Инак, функсияи логарифми натуралӣ дар $R_+ = (0; \infty)$ дорои ҳосила буда, ҳосилааш бо формулаи (6) ҳисоб карда мешавад. Ин функсия дар $R_+$ ҳамчун функсияи дифференсиалпазир бефосила аст.

Э з о ҳ и 1. Ҳосилаи функсияи $y = \ell og_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ аз рӯйи формулаи

$$(\ell og_a x) = \frac{1}{x\ell na} \tag{8}$$

ҳисоб карда мешавад. Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи гузариш $\ell og_a x = \dfrac{\ell nx}{\ell na}$. Аз ин ҷо $(\ell og_a x)' = \dfrac{1}{\ell na}(\ell nx)' = \dfrac{1}{x\ell na}$.

Э з о ҳ и 2. Функсияи $F(x)=x(\ell nx-1)+C$ барои функсияи $y=\ell nx$ функсияи ибтидоӣ мебошад (тарзи ҳосил кардани $F(x)$ аз доираи математикаи мактабӣ берун аст). Дар ҳақиқат,

$$F'(x)=\left[x(\ell nx-1)+C\right]'=x'(\ell nx-1)+x(\ell nx-1)'+C'=$$

$$=\ell nx-1+x\cdot\frac{1}{x}=\ell nx.$$

Мувофиқан намуди умумии функсияҳои ибидоии функсияи $y=\ell og_a x$, $a>0$, $a\neq 1$ чунин аст:

$$F(x)=\frac{x(\ell nx-1)}{\ell na}+C.$$

М и с о л и 1. Ҳосилаи функсияи зеринро меёбем:

а) $y=\ell n(4+3x)$; б) $y=\ell og_3(x^2+1)$.

Ҳ а л. Мувофиқи формулаҳои (6) ва (8), инчунин қоидаҳои ҳосилагирӣ дорем:

а) $y'=\left[\ell n(4+3x)\right]'=\dfrac{1}{4+3x}\cdot(4+3x)'=\dfrac{3}{4+3x}$;

б) $y'=\left[\ell og_3(x^2+1)\right]'=\dfrac{1}{(x^2+1)\ell n3}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ell n3}$.

М и с о л и 2. Муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)=\ell nx+3$ дар нуқтаи абсиссааш $x_0=1$ менависем.

Ҳ а л. Тавре медонем, муодилаи расанда дар нуқтаи $x=a$ ба графики функсияи $y=f(x)$ намуди зеринро дорад:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

Дорем: $f'(x)=(\ell nx+3)'=\dfrac{1}{x}$, пас $f'(1)=1$, инчунин

$f(1) = \ell n1 + 3 = 3$. Ҳамин тариқ, муодилаи расандаи матлуб

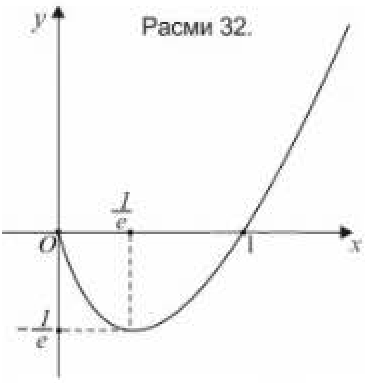
$$y - 3 = x - 1 \quad ё \quad y - x - 2 = 0$$

аст.

М и с о л и 3. Функсияи $f(x) = x\ell nx$ -ро оид ба афзуншавӣ, камшавӣ ва экстремум тадқиқ намуда, графикашро схемавӣ месозем.

Ҳ а л. Функсияи додашуда ҳангоми $x > 0$ будан муайян аст. Ҳосиларо меёбем:

$$f'(x) = \ell nx + 1.$$



Расми 32.

Нобаробарии $f'(x) > 0$ ё $\ell nx + 1 > 0$ ҳангоми $x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ будан ҷой дорад. Яъне, дар $\left(\frac{1}{e}; \infty\right)$ функсия меафзояд. Дар $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ ҳосила манфӣ аст, бинобар ин дар ин фосила функсия кам мешавад. Пас, нуқтаи $x_0 = \frac{1}{e}$ нуқтаи минимум аст:

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ell n\frac{1}{e} = \frac{1}{e}(\ell n1 - \ell n\, e) = \frac{1}{e}(0-1) = -\frac{1}{e}.$$

Графикро схемавӣ аз баробариҳои $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -e^{-1}$ ва $f(1) = 0$ истифода карда, мекашем (расми 32).

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Формулае, ки бо он ҳосилаи функсияи логарифмӣ ифода мешавад, чӣ намуд дорад?

**2.** Чаро функсияи логарифмӣ дар маҷмуи $R_+$ бефосила аст?

**3.** Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияҳои $y = lnx$ ва $y = log_a x$ чӣ гуна аст?

**4.** Оё графики функсияи логарифмӣ бо графики функсияи ҳосилаи он якхела аст?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

Ҳосилаи функсияро ёбед (263-265):

**263.** а) $y = \ell n(2+5x)$; б) $y = \ell og_{0,2}(x+4)$;

в) $y = \ell g\, x - \sin x$; г) $y = \ell og_3(2x+1)$.

**264.** а) $y = x + \ell n\, x$; б) $y = x^2 \ell n\, x$;

в) $y = \dfrac{\ell n\, x}{x}$; г) $y = \dfrac{x}{\ell n\, x}$.

**265.** а) $y = \dfrac{\ell n(x+3)}{x^2+1}$; б) $y = \dfrac{x}{\ell n(1-x)}$;

в) $y = \dfrac{x^2}{\ell n 3x}$; г) $y = \dfrac{\ell og_4 x}{x+1}$.

**266.** Муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)$ дар нуқати абсиссааш $x_0$ нависед:

а) $f(x) = \ell n(x+1),\ x_0 = 0$; б) $f(x) = 2\ell n\, x + 1,\ x_0 = 1$;

в) $f(x) = 3\ell n\, x,\ x_0 = \dfrac{1}{e}$; г) $f(x) = \ell og_2(x+1),\ x_0 = 0$.

**267.** Функсияи зеринро оид ба афзуншавӣ, камшавӣ ва экстремум тадқиқ кунед:

а) $f(x)=\sqrt{x}\,\ell n\,x$; б) $f(x)=\dfrac{\ell n\,x}{x}$;

в) $f(x)=x-\ell n\,x$; г) $f(x)=x^2\ell n\,x$.

### *Машқҳо барои такрор*

**268.** Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ маҳдуд аст, ёбед.

**269.** Муодилаи нишондиҳандагиро ҳал кунед:

$$2^{x^2+x-0,5}=2\sqrt{2}\,.$$

**270.** Ҳосилаи функсияи $y=3^{tgx}$ -ро ёбед.

**271.** Ифодаи

$$\frac{x-9x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+3x^{\frac{1}{2}}}$$

-ро сода кунед.

**272.** Фарқи ду адад ба 5 баробар буда, ҳосили зарби онҳо 84 аст. Ин ададҳоро ёбед.

## 24. ҲОСИЛА ВА ФУНКСИЯИ ИБТИДОИИ ФУНКСИЯИ ДАРАҶАГӢ

Ҳосила ва функсияи ибтидоии функсияи дараҷагии $y=x^{\alpha}$ -ро ҳангоми ратсионалӣ будани $\alpha$ медонем (масалан, ниг. ба ҷадвали функсияҳои ибтидоӣ, ки дар банди 3 омадааст). Онҳоро беисбот оварда, дар ҳалли чандин масъалаҳо истифода кардаем (ниг. ба мисоли 7-и банди 4.).

Акнун дараҷаи $\alpha$ -ро адади дилхоҳи ҳақиқӣ ҳисоб карда, формулаҳои ҳосила ва намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи дараҷагиро комилан исбот мекунем.

**I.** Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ дар $R_+ = (0;\infty)$ бо формулаи

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \tag{9}$$

ифода карда мешавад.

Дар ҳақиқат, азбаски мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ $e^{\ell nx} = x \ \ (x>0)$ аст, пас $x^{\alpha} = (e^{\ell nx})^{\alpha} = e^{\alpha \ell nx}$. Аз ин ҷо

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ell nx})' = e^{\alpha \ell nx} \cdot (\alpha\, \ell nx)' = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Формулаи (9) исбот шуд. Формула нишон медиҳад, ки ҳосилаи функсияи дараҷагӣ низ функсияи дараҷагӣ аст.

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияи:

$$\text{а) } y = \left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n2}; \qquad \text{б) } y = x^{-\sqrt{10}}$$

-ро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (9) дорем:

$$\text{а) } y' = \left[\left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n2}\right]' = \ell n2 \left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n2-1} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{\ell n2}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n2-1};$$

$$\text{б) } y' = \left(x^{-\sqrt{10}}\right)' = -\sqrt{10}\, x^{-\sqrt{10}-1} = -\frac{\sqrt{10}}{x^{1+\sqrt{10}}}.$$

**II.** Ба ёфтани намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи дараҷагӣ шуруъ мекунем. Ду ҳолатро дида мебароем.

А) $\alpha \neq -1$. Барои ин ҳолат функсияҳои матлуб бо формулаи

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

ифода мешаванд.

Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи (9) дорем:

$$F'(x) = \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1})' + C' = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^{\alpha+1-1} = x^{\alpha}.$$

Б) $\alpha$ =-1. Формулаи (6) нишон медиҳад, ки барои функсияи $y = \frac{1}{x}$ дар фосилаи $(0;\infty)$ намуди умумии функсияи ибтидоӣ $\ell n\, x + C$ аст.

Функсияи $\frac{1}{x}$ дар фосилаи $(-\infty;0)$ низ функсияи ибтидоӣ дорад, ки ин функсияи $\ell n(-x)$ мебошад. Дар ҳақиқат,

$$\left(\ell n(-x)\right)' = \frac{1}{-x}(-x)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

Ҳамин тариқ, намуди умумии функсияҳои ибтидоӣ барои $y = \frac{1}{x}$ ҳангоми $x > 0$ будан $\ell n\, x + C$ ва ҳангоми $x < 0$ будан $\ell n(-x) + C$ аст. Таърифи қимати мутлақро барои ифодаи $x$ истифода карда, ба хулоса меоем, ки ҳангоми $x \neq 0$ будан намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $\frac{1}{x}$ чунин аст:

$$F(x) = \ell n|x| + C.$$

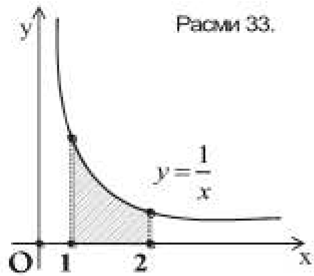
Мисоли 2. Функсияи ибтидоиро барои функсияи $y = \frac{1}{2x+3}$ меёбем (Дар назар дошта мешавад, ки соҳаи муайянии ин функсия фосилаест, ки он нуқтаи $x = -\frac{3}{2}$ -ро дарбар намегирад.).

Ҳал. Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки барои ҳар гуна нуқтаи фосилаи муайянӣ ва барои адади дилхоҳи $C$ функсияи

$$F(x)=\frac{1}{2}\ell n|2x+3|+C$$

функсияи ибтидоӣ аст.

Умуман, барои функсияи $y=\frac{1}{ax+b}$ функсияи $F(x)=\frac{1}{a}\ell n|ax+b|+C$ функсияи ибтидоӣ мебошад, агар $x\neq-\frac{b}{a}$ бошад.




М и с о л и 3. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$ ва $x=2$ маҳдудро меёбем (расми 33).

Ҳ а л. Аз рӯйи формулаи масоҳати трапетсияи каҷхатта меёбем:

$$S=\int_1^2\frac{dx}{x}=\ell nx\Big|_1^2=\ell n2-\ell n1=\ell n2\,.$$

### *Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон*

**1.** Дар кадом ҳолат функсияи дараҷагӣ меафзояд?

**2.** Фосилаи камшавандагии функсияи дараҷагӣ кадом аст?

**3.** Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ аз рӯйи кадом формула ёфта мешавад?

**4.** Формулаи функсияи ибтидоии функсияи дараҷагӣ чӣ намуд дорад?

***Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ***

Ҳосилаи функсияро ёбед (273-274):

**273.** а) $y = x^{-\frac{1}{3}}$; б) $y = x^{\sqrt{6}}$; в) $y = x^{\frac{4}{5}}$; г) $y = x^{-\sqrt{7}}$.

**274.** а) $y = x^{-e}$; б) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\ln 4}$; в) $y = (3x)^{\ln 2}$; г) $y = x^{\pi}$.

Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияро ёбед (275-276):

**275.** а) $y = \frac{1}{2}x^{\sqrt{2}}$; б) $y = x^{3\sqrt{2}}$; в) $y = x^{e}$; г) $y = -\frac{1}{5}x^{-\sqrt{5}}$.

**276.** а) $y = \frac{2}{x+3}$; б) $y = \frac{1}{x+1}$; в) $y = \frac{2}{x}$; г) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+4}$.

**277.** Интегралро ҳисоб кунед:

а) $\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx$; б) $\int_1^2 \frac{2dx}{x^{\frac{1}{2}}}$; в) $\int_0^1 6x^{\frac{1}{5}}dx$; г) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед (278-279):

**278.** а) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = 0$, $x = 1$;

б) $y = x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$;

в) $y = x^{0,4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 32$;

г) $y = x^{-0,2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 32$.

**279.** а) $y=\frac{2}{x}+1,\quad y=0,\quad x=2,\quad x=4$;

б) $y=-\frac{3}{x},\quad y=0,\quad x=-3,\quad x=-1$;

в) $y=\frac{1}{2x},\quad y=0,\quad x=\frac{1}{4},\quad x=2$;

г) $y=4-\frac{1}{x},\quad y=0,\quad x=-4,\quad x=-2$.

### *Машқҳо барои такрор*

**280.** Соҳаи муайянии функсияи $y=\ell n(x^2+x+6)$-ро ёбед.

**281.** Қимати $x$-ро ёбед: $\ell og_3 x=\frac{1}{2}\ell og_3 16+3\ell og_3 0{,}5$.

**282.** Барои 4 қалам ва 3 дафтар 70 дирам ва барои 2 қаламу 1 дафтар 28 дирам доданд. Қалам ва дафтар чанд дирамӣ меистанд?

**283.** Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x)=x+\frac{1}{x}$-ро дар порчаи $\left[-2;\ -\frac{1}{2}\right]$ ёбед.

**284.** Нишон диҳед, ки $\frac{\sin 15^0+\sin 75^0}{\cos 15^0-\cos 75^0}=\sqrt{3}$ аст.

## 25. МАФҲУМИ МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ

То ҳол ба муоинаи муодилаҳое машғул будем, ки ҳаллашон адад буд. Акнун муодилаҳоеро дида мебароем, ки ҳалли онҳо функсия аст. Агар чунин муодила ғайри худи функсия боз ҳосилаи функсияи матлубро доро бошад, он гоҳ онро муодилаи *дифференсиалӣ* меноманд.

Ҳалли бисёр масъалаҳои илм ва техника ба ёфтани ҳалли муодилаи дифферентсиалии

$$f'(x) = kf(x), \qquad (10)$$

ки дар он $k$ адади доимӣ буда, $y = f(x)$ функсияи матлуб аст, оварда мешаванд. Маънои муодилаи (баробарии) (10) ин аст, ки суръати тағйирёбии функсия дар нуқтаи $x$ ба қимати функсия дар ҳамин нуқта мутаносиб мебошад.

Барои тасдиқи ин гуфтаҳо равандҳои зерини воқеиро ҳамчун мисол дида мебароем.

Мисоли 1 **(Таҷзияи радиоактивӣ)**. Амалан муқаррар карда шудааст, ки суръати таҷзияи радиоактивии модда бо мурури вақт $t$ ба миқдори модда $m(t)$ мутаносиб аст, яъне

$$m'(t) = bm(t).$$

Дар ин ҷо $b$ коэффитсиенти мутаносибӣ буда, шиддатнокии таҷзияро муайян менамоянд. Ҳангоми таҷзия миқдори модда кам мешавад. Бо ибораи дигар, функсияи $m(t)$ камшаванда аст, яъне $m'(t) \leq 0$. Бо мақсади бо параметри мусбат сару кор доштан, $b = -\alpha > 0$ гузошта, вобастагиро дар намуди

$$m'(t) = -\alpha m(t) \qquad (11)$$

менависанд.

Мисоли 2 **(Афзоиши аҳолӣ)**. Ҳангоми омӯзиши афзоиши аҳолии ин ё он мамлакат фарз мекунанд, ки суръати афзоиши аҳолӣ ба миқдори аҳолӣ мутаносиб аст. Агар дар лаҳзаи вақти $t$ миқдори аҳолиро бо $N(t)$ ишорат кунем, он гоҳ

$$N'(t) = \beta N(t), \qquad (12)$$

ки $\beta > 0$ буда, шиддатнокии афзоиши аҳолиро ифода мекунад.

Мисоли 3 **(Қонуни тағйирёбии фишори атмосферӣ)**.

Дар ҳудуди баландиҳои аз сатҳи баҳр якхела, ки дар онҳо ҳарорати ҳаво амалан доимӣ аст, суръати камшавии фишори атмосферӣ ба худи фишор мутаносиб аст. Яъне, агар бо $P(h)$ фишорро дар баландии $h$ ишорат кунем, он гоҳ

$$P'(h) = -\gamma P(h), \tag{13}$$

ки дар ин ҷо $\gamma > 0$ мебошад.

Муодилаҳои (11)-(13) муодилаҳои дифферентсиалӣ буда, намуди (10)-ро доранд. Дар онҳо бузургиҳои мусбат $\alpha$, $\beta$ ва $\gamma$ коэффитсиентҳои мутаносибӣ, функсияҳои $m(t)$, $N(t)$, $P(h)$ - матлубанд.

Акнун ба муодилаи (10) бармегардем. Дар он $k$ адади маълум буда, функсияи $f(x)$ номаълум аст. Формулаи ҳосилаи функсияи нишондиҳандагиро ба хотир оварда (ниг. ба банди 21) мебинем, ки барои ҳар гуна адади $C$ функсияи намуди

$$f(x) = Ce^{kx} \tag{14}$$

ҳалли муодилаи (10) аст. Дар ҳақиқат,

$$f'(x) = C(e^{kx})' = Cke^{kx} = kf(x).$$

Нишон медиҳем, ки муодилаи (10) ғайр аз функсияҳои намуди (14) ҳалҳои дигар надорад. Барои ин функсияи $f(x)$-ро, ки ҳалли дилхоҳи (10) аст, гирифта функсияи ёрирасони

$$g(x) = f(x)e^{-kx}$$

-ро тартиб медиҳем. Дорем:

$$g'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x)(e^{-kx})' = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}.$$

Дар ин ҷо ба ҷойи $f'(x)$ қиматаш $kf(x)$-ро аз муодилаи (10) гузошта, ҳосил мекунем:

$$g'(x) = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0.$$

Аз айнан нул будани ҳосилаи $g(x)$ бармеояд, ки вай барои тамоми қиматҳои $x$ доимӣ аст (ниг. ба леммаи банди 2):

$g(x)=C$. Акнун баробарии $g(x)=f(x)e^{-kx}$-ро истифода карда, пайдо мекунем:

$$f(x)e^{-kx}=C \quad \text{ва аз ин ҷо} \quad f(x)=Ce^{kx}.$$

Инак, ҳар гуна ҳалли (10) намуди (14)-ро дорад. Бо ибораи дигар, ҳалли *умумии* муодилаи (10) бо формулаи (14) ифода карда мешавад (Ҳалли умумии муодила гуфта, ҳаллеро меноманд, ки аз он ҳалли дилхоҳи мушаххасро ҷудо кардан мумкин аст.).

Намуди умумии ҳалли муодилаи (10) (формулаи (14)) нишон медиҳад, ки вай аз як параметри доимии $C$ вобаста аст. Ин ба хулоса меорад, ки ҳангоми дода шудани қимати ҳал дар як нуқтаи $x=x_0$, яъне дода шудани $f(x_0)$, ҳалли (10) яққимата муайян мегардад. Шарти $f(x_0)=f_0$ шарти *аввала* ё *ибтидоӣ* номида мешавад. Ҳангоми дода шудани $f_0$ функсияи

$$f(x)=f_0e^{k(x-x_0)} \qquad (15)$$

ҳалли (10) буда, шарти $f(x_0)=f_0$-ро қаноат мекунонад. Дурустии ин тасдиқ бевосита санҷида мешавад.

Ба муоинаи равандҳое, ки онҳоро дар боло бо муодилаи дифферентсиалӣ ифода кардем, бармегардем. Ҳалли муодилаҳоро ёфта, қиматҳои ададии коэффитсиентҳоро ҳосил мекунем.

*Таҷзияи радиоактивӣ.* Бигузор дар лаҳзаи қайдшудаи вақти $t_0$ миқдори модда ба $m_0$ баробар аст, яъне $m(t_0)=m_0$. Барои муайянӣ $t_0=0$ қабул карда, ҳалли муодилаи (11)-ро бо шарти ибтидоии $m(0)=m_0$ аз рӯйи формулаи (15) меёбем ($f_0=m_0,\ x_0=0$):

$$m(t)=m_0e^{-\alpha t}.$$

Дар бисёр ҳолатҳо тавсифи моддаи радиоактивӣ *даври нимтаҷзия* $T$ - вақте, ки дар муддати он миқдори модда ду маротиба кам мешавад мебошад. Даври нимтаҷзия барои бисёр моддаҳои радиоактивӣ хеле калон аст. Масалан, барои радий $T = 1590$ сол, барои уран $T = 4{,}56$ миллиард сол мебошад. Даври нимтаҷзияро дониста, коэффитсиенти мутаносибиро ёфтан мумкин аст. Дар ҳақиқат, аз баробариҳои

$$m_0 = 2m(T) \text{ ё } 2 = \frac{m_0}{m(T)} = \frac{m_0}{m_0 e^{-\alpha T}} = e^{\alpha T}$$

баробарии $T = \frac{1}{\alpha} \ell n 2$ ё $\alpha = \frac{\ell n 2}{T}$ бармеояд. Барои радий $\alpha = \frac{\ell n 2}{1590} \approx 0{,}000446 = 4{,}46 \cdot 10^{-6}$.

*Афзоиши аҳолӣ.* Агар бо $N_0 = N(0)$ миқдори ҳозираи аҳолиро ишорат кунем, он гоҳ пас аз $t$ сол миқдори аҳолӣ мувофиқи формулаи (15) ба

$$N(t) = N_0 e^{\beta t}$$

баробар мешавад, ки ин функсия ҳалли муодилаи (12) аст. Коэффитсиенти $\beta$–ро дар асоси додашудаҳои оморӣ муайян кардан мумкин аст. Масалан, бигузор маълум бошад, ки дар муддати 10 сол миқдори аҳолӣ 1,2 маротиба афзудааст. Дар ин ҳолат,

$$\frac{N(10)}{N(0)} = 1{,}2; \quad \frac{N_0 e^{10\beta}}{N_0} = 1{,}2; \quad e^{10\beta} = 1{,}2.$$

Аз ин ҷо: $10\beta = \ell n 1{,}2$ ва $\beta = \frac{1}{10} \ell n 1{,}2 \approx 0{,}0182$.

Ҳамин тариқ, $N(t) = N_0 e^{\frac{\ln 1{,}2}{10} t} \approx N_0 e^{0{,}0182 t}$. Ин баробарӣ имконият медиҳад, ки миқдори аҳолиро баъди 20 сол ҳисоб кунем ё кай ду маротиба зиёд шудани онро донем ва ғайра.

*Қонуни тағйирёбии фишори атмосферӣ.* Агар $P_0 = P(h_0)$ бузургии фишор дар баландии $h = h_0$ бошад, он гоҳ ҳалли муодилаи (13) мувофиқи формулаи (15) функсияи

$$P(h) = P_0 e^{-\gamma(h-h_0)}$$

аст, ки он бузургии фишорро дар баланди $h$ ифода менамояд. Агар $h_0 = 0$ гузорем, он гоҳ

$$P(h) = P_0 e^{-\gamma h}.$$

Қимати $P(h)$-ро дар ягон баландии $h_1$ дониста, коэффитсиенти мутаносибии $\gamma$-ро меёбем:

$$\gamma = \frac{1}{h_1}(\ell n P_0 - \ell n P(h_1)).$$

Мисолҳои овардашуда ба хулоса меоранд, ки муодилаҳои дифферентсиалӣ василаи тавонои тадқиқ мебошанд. Ин аст, ки тадқиқотчиён қонунҳоеро, ки онҳо ба ягон раванд хосанд, бо воситаи чунин муодилаҳо ифода карда, рафти инкишофи ин равандро бо мурури вақт ҳамчун ҳалли ин муодилаҳо меомӯзанд. Масъалаҳои овардашуда мисоли татбиқи математика дар амалия шуда метавонанд.

Қайд мекунем, ки муодилаҳои дифферентсиалӣ як шохаи алоҳидаи илми математикаи олиро ташкил медиҳанд.

***Саволҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон***

**1.** Чӣ гуна муодиларо муодилаи дифференсиалӣ мегӯянд?

**2.** Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалӣ чист? Вай бо кадом формула ифода меёбад?

**3.** Мазмуни шарти ибтидоӣ аз чӣ иборат аст?

**4.** Даври нимтаҷзияи модда чист ва он чӣ тавр муайян карда мешавад?

**5.** Баробарии (10)-ро нависед ва гӯед, ки он чӣ маъно дорад?

**6.** Чаро муодилаҳои дифференсиалӣ татбиқи васеи амалӣ дошта метавонанд?

### *Машқҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ*

**285.** Нишон диҳед, ки функсияи $f(x) = 6e^{4x}$ ҳалли муодилаи $f'(x) = 4f(x)$ аст.

**286.** Нишон диҳед, ки функсияи $y = 2e^{-3x}$ ҳалли муодилаи $y' = -3y$ мебошад.

**287.** Даври ниматаҷзияи моддаи радиоактивӣ муайян карда шавад, агар маълум бошад, ки дар муддати 2 сол ин модда якуним маротиба кам шудааст.

**288.** Баъди як соат аз 50 гр. моддаи радиоактивӣ 47 гр. боқӣ монд. Баъди 5 соат чӣ қадари ин модда боқӣ мемонад?

**289.** Даври нимтаҷзияи радий 1590 сол аст. Баъди чанд сол миқдори радий 10 маротиба кам мешавад?

**290.** Дар муддати 10 сол аҳолии мамлакат 10% афзудааст. Дар 20 соли пасоянд аҳолӣ чанд маротиба меафзояд?

**291.** Дар муддати 15 сол аҳолии ҷумҳурӣ 20% зиёд шудааст. Пас аз чанд сол миқдори аҳолӣ ду маротиба зиёд мешавад?

**292.** Аз сатҳи баҳр чӣ қадар баланд баромадан даркор, ки фишори ҳаво 40% кам шавад, агар маълум бошад, ки ҳангоми ба баландии 1000 м баромадан фишор 20% кам мешавад?

### *Машқҳо барои такрор*

**293.** Ифодаи $2y - 3y^2 + y^3$ -ро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед.

**294.** Сода кунед: $\cos(\pi - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$.

**295.** Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 13 см аст. Катетҳоро ёбед, агар фарқи онҳо 7 см бошад.

**296.** Муодилаи $\ell og_4(x^2 - x) = 1 + \ell og_4 5$ -ро ҳал кунед.

**297.** Масоҳати фигурае, ки бо хатҳои $y = x(2 - x)$, $y = 0$ маҳдуд аст, ҳисоб кунед.

## Маълумоти таърихӣ

Дар охири асри XVII кори дохил кардани дараҷа дар шакли ҳозира аз тарафи олимони англис *Ҷон Валлис* (1616-1703) ва *Исаак Нютон* (1643-1727) ба субут расонида шудааст. Валлис дар соли 1665 аввалин шуда истифодаи нишондиҳандаҳои манфӣ ва касриро мувофиқи мақсад ҳисоб карда буд. И. Нютон дар яке аз мактубҳои худ дар соли 1676 навишта буд: «Тавре алгебрадонон ба ҷойи АА, ААА ва ғайра, $A^2$, $A^3$ ва ғайра менависанд, ман ҳам ба ҷои $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ ва ғайра, $a^{-1}$, $a^{-2}$, $a^{-3}$ ва ғайра менависам».

Бо тадриҷ васеъ кардани мафҳуми дараҷа дар илм ҳамин хел буд, ки мафҳумҳои нав – дараҷаҳои нулӣ, касрӣ ва манфӣ ба таърифҳои дараҷа, ки пештар қабул шуда буданд, зиддият надоштанд. Онҳо ба ҳамон қоидаҳое, ки онҳоро дараҷаи натуралӣ қонеъ мекард, итоат менамуданд. Дар охири асри XVII аз сабаби мураккаб гардидани масъалаҳои математикӣ зарурати таъҷилии паҳн кардани таърифи нишондиҳандаи дараҷа барои ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ ба миён омад. Умумӣ кардани дараҷа имконият дод, ки функсияи нишондиҳандагии $y = a^x$ дар маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ муоина карда шавад. Назарияи ниҳоят ба ҳозира наздики функсияи нишондиҳандагӣ дар ду боби китоби *Леонард Эйлер* (1707-1783) «Муқаддима ба анализ» дарҷ гардидааст. Вобастагии байни функсияи нишондиҳандагӣ ва функсияҳои тригонометрӣ, ки онро Л.Эйлер дар ин китоб пешниҳод кардааст, яке аз умдатарин натиҷаҳои илми математика аст. Вобастагии мазкурро аз сабаби аз доираи математикаи мактабӣ берун буданаш намеорем.

Калимаи *логарифм* юнонӣ буда, чун нисбати ададҳо тарҷума мешавад. Кашфи логарифмҳо (соли 1594), номи онҳо ва аввалин ҷадвали логарифмҳо ба олими шотландӣ *Ҷон Непер* (1550-1617) тааллуқ дорад. Сабаби чунин номгузорӣ он буд, ки логарифмҳо ҳангоми муқоиса кардани ду адад, ки яке узви прогрессияи арифметикӣ ва дигаре узви прогрессияи геометрӣ мебошад, пайдо шудаанд. Соатсоз ва устои асбобҳои нуҷумӣ, олими швейтсарӣ *Й.Бюрги* (1552-1632), ки ёрдамчии нуҷумшиноси машҳур *И.Кеплер* (1571-1630) шуда кор мекард, аз Ҷ. Непер пештар ҷадвалҳои логарифмҳоро тартиб дода буд. Вале ҷадвалҳои Бюрги соли 1620 чоп шуданд, ҳол он ки ҷадвалҳои Непер соли 1614 чоп шуда буданд. Аз ҳамин сабаб, дар кашфи логарифмҳо аввалият ба Непер дода шудааст.

Ғояи кашфи логарифмҳоро асосан математики олмонӣ *М.Штифел* (1487-1567) пешниҳод кардааст. Ӯ фарз карда буд, ки дар баробарии $x = a^y$ паси ҳам $y$ қиматҳои

$$1, 2, 3, 4, \ldots, y, y+1 \qquad (16)$$

-ро қабул мекунад. Он гоҳ $x$ ин тавр ифода мешавад:

$$1, a^1, a^2, a^3, a^4, \ldots, a^y, a^{y+1}. \qquad (17)$$

Ададҳои дар қатори (16) буда прогрессияи арифметикӣ ва ададҳои дар қатори (17) буда прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Зоҳиран фаҳмост, ки ададҳои дар (16) буда логарифми ададҳои дар (17) буда аз рӯйи асоси $a$ ҳастанд. Пурсида мешавад, қимати $a$-ро чанд гирем, то ки ададҳои дар қатори (17) буда ба қадри имкон зич (ду узви ҳамсоя ба ҳам наздик) бошанд. Непер ва Бюрги новобаста ба ҳамдигар, мувофиқан $a = 1 - 10^{-7}$ ва $a = 1 + 10^{-4}$ қабул карда буданд.

И. Бюрги соли 1603 ҳисобкуниҳои худро оғоз карда, соли 1611 онҳоро анҷом дода буд. Вале тавре дар боло қайд шуд, ҷадвалҳои ӯ аз сабаби дер чоп шуданашон ба эътирофи ҳамагон сазовор нагаштанд. Баръакс, ҷадвалҳои Непер, ки пештар дарҷ гардида буданд, қабули ҳамагон гашта, васеъ истифода шуданд.

Логарифми асосаш $e$-ро математики англис *Спейдел* дохил кардааст. Соли 1620 вай ҷадвали логарифмҳои натуралии ададҳои аз 1 то 1000-ро чоп карда буд. Ҷадвали ба таври кофӣ пурраи логарифмҳои натуралӣ танҳо соли 1770 пайдо шудааст.

Ҷадвалҳои логарифмии Непер заҳмати ҳисоббарорро хеле сабук карда бошанд ҳам, онҳо мукаммал набуданд. Бинобар ин вай ҳамроҳи дӯст ва ҳамкори худ *Г. Бриггс* (1561-1630) ба тартиб додани ҷадвали логарифмҳои даҳӣ машғул шуд. Баъди фавти Непер, Бриггс соли 1624 ҷадвали логарифмҳои даҳии чорраҳамаро нашр кард, ки логарифмҳои ададҳои бутуни аз 1 то 2000-ро дарбар мегирифт.

Заҳмати чандинсолаи риёзидонҳои забардаст беҳуда нарафт. Онҳо кори ҳисоббароронро ҳазорҳо маротиба осон карда буданд. Бояд гуфт, ки ҳаҷми кори ҳисоббарорӣ маҳз дар асри XVII ҳангоми ҳалли масъалаҳои гуногуни ба амалия алоқаманд, дар навбати аввал масъалаҳои амалии илми нуҷум, аз ҷумла муайян кардани мавқеи киштиҳо аз рӯйи ситораҳо ва Офтоб, хеле афзуда буд. Кашф шудани логарифмҳо, ки зарб ва тақсими ададҳоро ба ҷамъ ва тарҳи логарифмҳои онҳо меоваранд, ба гуфти *Лаплас* (1749-1827) умри ҳисоббароронро дароз кард.

Ҷадвали логарифмҳо ва хаткашаки логарифмӣ, ки онро *У. Отред* (1575-1660) ихтироъ карда буд, зиёда аз 350 сол ҳамчун воситаи боэътимоди ҳисоббарориҳои тақрибӣ хизмат карданд ва ба сатҳи баланди инкишофи илм ва прогресси техникӣ расидани инсоният кумак расониданд. Вале пайдоиши компютерҳо, ки онҳо суръати ҳисоббарориро миллионҳо маротиба зиёд кардаанд, махсусан пас аз ихтирои микрокалкуляторҳо, ҳоло амалан ҷадвалҳои логарифмӣ қимати худро ҳамчун василаи ҳисоббарорӣ гум кардаанд.

Логарифмҳои натуралӣ (табиӣ) на танҳо аҳаммияти амалӣ, балки аҳаммияти назариявӣ низ доштанд ва ҳоло ҳам доранд. Дертар маълум шуд, ки қаторҳоро истифода карда, бо саҳеҳии дилхоҳ қимати тақрибии бузургиҳои гуногунро ёфтан мумкин аст. Инчунин, нишон дода шуд, ки дуузваи дараҷагӣ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ки ба сифати асоси логарифми натуралӣ гирифта мешавад, ҳангоми $n \to \infty$ ба адади муайян майл мекунад. Маҳз ин адад, адади $e$ аст. Бо истифодаи қатори ададӣ нишон дода шуд, ки $e = 2,718281183...$ аст. *И.Ламберт* (1728-1777) соли 1766 аз вобастагии байни функсияи нишондиҳандагӣ ва функсияҳои тригонометрии Л.Эйлер, ки мо роҷеъ ба он дар аввали банд сухан ронда будем, истифода карда исбот намуд, ки ададҳои $\pi$ ва $e$ ирратсионалианд.

Авҷи инкишофи анализи математикӣ ба асри XVII рост меояд. Дар ин кор ададҳои $\pi$ ва $e$ нақши махсусро мебозанд, чунки онҳо дар формулаҳои гуногун дохил мешаванд. Логарифмҳои асосашон $e$ имконият медиҳанд, ки вобастагиҳои гуногуни математикиро, ки онҳо равандҳои гуногуни табиат ва илмро тавсиф менамоянд, бо воситаи чунин логарифмҳо ифода шаванд (ниг. ба банди 25). Аҷаб нест, ки сабаби натуралӣ, яъне табиӣ номгузорӣ кардани ин логарифмҳо дар ҳамин бошад. Истилоҳи «логарифмҳои натуралӣ»-ро *П.Менголи (1626-1686)* соли 1659 дохил карда буд. Баъди вай соли 1668 аз ин истилоҳ *Н.Меркатор* (1620-1687) истифода кардааст. Таърифи ҳозиразамони логарифми натуралиро дар корҳои Л. Эйлер пайдо кардан мумкин аст. Ба шарафи ӯ ададе, ки ба он $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ҳангоми ба беохир майл кардани $n$ майл мекунад, бо ҳарфи $e$ ишорат карда, худи ададро ба шарафи Непер «адади неперӣ» меноманд.

## МАШҚҲОИ ИЛОВАГӢ ДОИР БА БОБИ 2

### Ба параграфи 3

**298.** Графики функсияро созед:

а) $y=6^x$; б) $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$; в) $y=8^x$; г) $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$.

**299.** Кадоме аз ин ду адад калон аст:

а) $3^{0,4}$ ё $3^{\frac{\sqrt{3}}{5}}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ ё $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$;

в) $1{,}4^{-\sqrt{7}}$ ё $1{,}4^{\sqrt{5}}$; г) $0{,}2^{-\pi}$ ё $0{,}2^{-3}$?

### Ба параграфи 4

Муодиларо ҳал кунед (300-301):

**300.** а) $16^x=2^{\frac{1}{7}}$; б) $3^{x+1}+3^{x+2}=36$;

в) $4^{x-2}=5^{x-2}$; г) $7^{2x+3}=\frac{1}{49}$.

**301.** а) $9^{x+1}+3^{x+2}=18$; б) $e^x-1=\frac{6}{e^x}$;

в) $25^x-6\cdot5^x+5=0$; г) $2\cdot4^x-5\cdot2^x+2=0$.

Нобаробариҳоро ҳал кунед (302 - 303):

**302.** а) $5^{x-1}>25$; б) $6^{2x}<\frac{1}{6}$;

в) $0{,}5^{2x+3}\le1$; г) $0{,}7^{4x+3}\ge0{,}49$.

**303.** а) $0{,}2^{2-x^2}<5$; б) $2^{2x^2-x}>1$;

в) $0{,}1^x - 0{,}1^{2x} \le 0$;  г) $\pi^{2x} - \pi^x \ge 0$.

**304.** Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 2^{x-2y} = \frac{1}{4}, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$  б) $\begin{cases} 4^{3x-4y} = 0{,}25, \\ 4^{x+2y} = 64; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{2x+y} = 1, \\ xy = -1; \end{cases}$  г) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$

### Ба параграфи 5

**305.** Ҳисоб кунед:

а) $\ell og_3 9\sqrt{3}$;  б) $\ell og_{0,2} 125$;  в) $\ell g 0{,}01$;  г) $\ell og_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}$.

**306.** Айнияти асосии логарифмро истифода карда, қимати ифодаро ёбед:

а) $2^{3+\ell og_2 5}$;  б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1+\ell og_3 2}$;  в) $5^{-1+\ell og_5 2}$;  г) $0{,}1^{1+\ell og_{0,1} 3}$.

**307.** Аз ифода аз рӯйи асоси $a$ логарифм гиред $(b>0, c>0)$:

а) $9b^4\sqrt[5]{c}$ ҳангоми $a=3$ будан;

б) $\dfrac{c^5}{\sqrt[3]{100b^2}}$ ҳангоми $a=10$ будан;

в) $\dfrac{0{,}25\sqrt{b}}{c^3}$ ҳангоми $a=5$ будан;

г) $\dfrac{0{,}16b^2}{c^4\sqrt{c}}$ ҳангоми $a=0{,}4$ будан.

**308.** Аз баробарии зерин $x$ -ро ёбед:

а) $\ell og_7 x = \ell og_7 196 - 2\ell og_7 2$;

б) $\ell og_4 x = 2\ell og_4 3 + \frac{1}{2}\ell og_4 49$;

в) $\ell g x = 1 + 3\ell g 4 - 2\ell g 6$;

г) $\ell og_{0,3} x = \ell og_{0,3} 9 - 2\ell og_{0,3} 10$.

**309.** Графики функсияро созед:

а) $y = \ell og_5 x$; б) $y = \ell og_{0,5} x$.

**310.** Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = \ell og_7(3x-1)$; б) $y = \ell og_\pi(7-x)$;

в) $y = \ell og_{0,4}(9-x^2)$; г) $y = \ell og_3(6+x-x^2)$.

**311.** Кадоме аз ададҳои зерин калон аст:

а) $\ell g 8$ ё $2\ell g 3$; б) $\ell og_{\frac{1}{4}} 3$ ё $\ell og_{\frac{1}{4}} 7$;

в) $\ell og_3 5$ ё $\ell og_7 4$; г) $\ell og_{0,3} 2$ ё $\ell og_5 3$?

**Ба параграфи 6**

Муодиларо ҳал кунед (312-315):

**312.** а) $2^x = 5$; б) $0,3^{x+1} = 0,2$; в) $4^{x+1} = 5^x$; г) $3^{x-1} = 6^{x+2}$.

**313.** а) $\ell og_6(2x-1) = 2$; б) $\ell n(3x-5) = 0$;

в) $\ell og_{\sqrt{2}}(5x-1) = 2$; г) $\ell og_3(7x-2) = 1$.

**314.** а) $\ell og_3^2 x - 3\ell og_3 x + 2 = 0$; б) $2\ell og_{0,5} x = \ell og_{0,5}(2x^2 - x)$;

в) $\ell og_4(x^2 - x) = 1 + \ell og_4 5$; г) $\ell og_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 3) = -2$.

**315.** а) $\ell og_x 4 = 2$; б) $\ell og_x(6 - x^2) = 1$;

в) $\ell og_2(1,5 - 2^x) = x - 1$; г) $\sqrt{x}^{\ell g\sqrt{x}} = 10$.

Нобаробариро ҳал кунед (316-317):

**316.** а) $\ell og_{\frac{1}{2}}(x-3)\le 3$;  б) $\ell g(4x-1)\ge 1$;

в) $\ell n(3x+2)<0$;  г) $\ell og_{\frac{1}{3}}(3x+1)>\ell og_{\frac{1}{3}}(x+2)$.

**317.** а) $\ell og_3(12-2x-x^2)>2$;  б) $\ell og_2(x^2-x-4)\le 3$;

в) $\ell g(x+1)+\ell gx<\ell g2$;  г) $\ell g^2x+2\ell gx\ge 3$.

**318.** Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x+y=7, \\ \ell gx+\ell gy=1; \end{cases}$  б) $\begin{cases} 2^{x-2y}=1, \\ \ell og_2x+\ell og_2(2y+7)=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \ell og_3(4x+y)=2, \\ xy=2; \end{cases}$  г) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=144, \\ \ell og_{\sqrt{2}}(y-x)=2. \end{cases}$

**Ба параграфи 7**

**319.** Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $y=2-3e^{5-2x}$;  б) $y=4\cdot 7^{4x-1}$;

в) $y=\left(\dfrac{1}{e^{2x}}\right)^7$;  г) $y=5^{-3x}$.

**320.** Барои функсияҳои зерин намуди умумии функсияҳои ибтидоиро нависед:

а) $y=e^{4x}-3e^{-2x}$;  б) $y=3e^{0,5x}$;

в) $y=4^x$;  г) $y=0,3^x$.

**321.** Ҳосилаи функсияро ҳисоб кунед:

а) $y = x\ell g\,5x$;    б) $y = \ell n(\sin x)$;

в) $y = \ell og_2(3x+1)$;    г) $y = \ell og_{0,2}(x^2+1)$.

**322.** Барои функсияҳои зерин ҳосила ва намуди умумии функсияҳои ибтидоиро нависед:

а) $y = x^{5\sqrt{3}}$;    б) $y = x^{-e}$;    в) $y = x^{\frac{1}{\pi}}$;    г) $y = x^{\sqrt{23}}$.

**323.** Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияро нависед:

а) $y = \dfrac{1}{x+3}$;    б) $y = \dfrac{4}{x}$;

в) $y = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+3}$;    г) $y = \dfrac{3}{2x+1}$.

**324.** Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед:

а) $y = 5^x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

б) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

в) $y = \dfrac{1}{5x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 10$;

г) $y = x^{\sqrt{5}}$, $y = 0$, $x = 1$.

## МАСЪАЛАҲОИ ТЕСТӢ ДОИР БА БОБИ 2

**Ба параграфи 4.**

**1.** Муодиларо ҳал кунед:

$$2^{\frac{x+4}{3}} = 8.$$

$A)$ 4; $B)$ 5; $C)$ 2; $D)$ 6 .

**2.** Муодиларо ҳал кунед:

$$25^x = \frac{1}{125}.$$

$A)$ 2; $B)$ 2,5; $C)$ $-$1,5; $D)$ 1,5 .

**3.** Муодиларо ҳал кунед:

$$4 \cdot 3^{2x+1} + 9^x = 39.$$

$A)$ 0,5; $B)$ 1,5; $C)$ 2,5; $D)$ 3 .

**4.** Муодиларо ҳал кунед:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1-3x} = 16^{2x-1}.$$

$A)$ 2; $B)$ 3; $C)$ 1; $D)$ 2,5 .

**5.** Муодиларо ҳал кунед:

$$\sqrt[5]{3^x} - \frac{1}{3} = 0.$$

$A)$ 4; $B)$ 5; $C)$ $-$5; $D)$ 6.

**6.** Муодиларо ҳал кунед:

$$\sqrt{3^{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

$A)$ 4; $B)$ 3; $C)$ 1; $D)$ 2 .

**7.** Муодиларо ҳал кунед:

$$3^{x+1} - 28 \cdot 3^x = -25.$$

$A)$ 0; $B)$ 3; $C)$ 2; $D)$ 1 .

**8.** Муодиларо ҳал кунед:

$$5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+2} - 7 = 0.$$

$A)$ 2; $B)$ − 2; $C)$ 3; $D)$ 1 .

**9.** Муодиларо ҳал кунед:

$$4^x + 16^x - 2 \cdot 8^x = 0.$$

$A)$ 2; $B)$ 3; $C)$ 0; $D)$ 1 .

**10.** Муодиларо ҳал кунед:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{27}{8}.$$

$A)$ 2; $B)$ 3; $C)$ $2\frac{1}{3}$; $D)$ 6 .

**11.** Муодиларо ҳал кунед:

$$3 \cdot 6^x - \frac{1}{9} \cdot 2^x \cdot 3^x = 104.$$

$A)$ 2; $B)$ 3; $C)$ $2\frac{1}{3}$; $D)$ 4 .

**12.** Муодиларо ҳал кунед:

$$25^x + 9^x = 2 \cdot 15^x.$$

$A)$ 1; $B)$ 3; $C)$ 2; $D)$ 0 .

**13.** Решаи муодиларо ёбед:

$$3 \cdot 9^x + 26 \cdot 3^x - 9 = 0.$$

$A)$ 1; $B)$ − 1; $C)$ 2; $D)$ − 1,5 .

**14.** Суммаи решаҳои муодиларо ёбед:

$$12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x = 0.$$

$A)$ 1,5; $B)$ 3; $C)$ 2; $D)$ 1 .

**15.** Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2-1,5} = \sqrt{0,75}.$$

$A)$ $-1$; $B)$ 3; $C)$ $-2$; $D)$ 1 .

**16.** Решаи муодиларо ёбед:

$$0,5^{2-x} - 2^{3-x} = -1.$$

$A)$ 1; $B)$ 3; $C)$ 2; $D)$ 0 .

**17.** Мувофиқати байни муодилаҳо ва решаҳои онҳоро муайян кунед:

$A)$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-3x} = 16^{2x-1}$, 1. 2;

$B)$ $\sqrt[5]{3^x} - \frac{1}{3} = 0$, 2. 6;

$C)$ $3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{12}{25}$, 3. 1;

$D)$ $0,25^{x-3} = \frac{1}{64}$, 4. $-5$,

5. $-4$.

**18.** Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \dfrac{2^x}{4^y} = 32, \\ 9^x \cdot 27^y = 27. \end{cases}$$

$A)$ $(2;\ -3)$; $B)$ $(3;\ -1)$; $C)$ $(2;\ 3)$; $D)$ $(4;\ -1)$ .

**19.** Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{x+1} - 3^{y-1} = 15, \\ 5\cdot 3^{y-2} - 3\cdot 2^{x} = 3. \end{cases}$$

$A)$ $(2;\ 3)$; $B)$ $(3;\ 2)$; $C)$ $(1;\ 3)$; $D)$ $(4;\ 2)$.

**20.** Системаи муодилаҳои зеринро ҳал карда, дар ҷавоб қимати калони $x$- ро нишон диҳед:

$$\begin{cases} 5^{x}\cdot 0{,}2^{-y} = 5, \\ 3^{xy} = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

$A)$ 2; $B)$ 3; $C)$ 2,5; $D)$ 1.

**21.** Системаи муодилаҳои зеринро ҳал карда, дар ҷавоб қимати калони $y$- ро нишон диҳед:

$$\begin{cases} 0{,}6^{x}\cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^{y} = \dfrac{3}{5}, \\ 2^{xy} = 64. \end{cases}$$

$A)$ 4; $B)$ 3; $C)$ 2; $D)$ 1.

**22.** Нобаробариро ҳал кунед:

$$3^{2x-1} \le 27^{x}.$$

$A)$ $(2;\ +\infty)$; $B)$ $(3;\ 6)$; $C)$ $[-1;\ +\infty)$; $D)$ $(1;\ +\infty)$.

**23.** Қимати калонтарини $x$ -ро, ки нобаробарии зеринро қаноат мекунонад, ёбед:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \ge \frac{1}{16}.$$

$A)$ 3,5; $B)$ 4; $C)$ 5; $D)$ 4,5.

**24.** Нобаробариро ҳал кунед:

$$9^{x} - 4\cdot 3^{x} + 3 \le 0.$$

$A)$ $(0;\ 1]$; $B)$ $(0;\ 1)$; $C)$ $(1;\ +\infty)$; $D)$ $[0;\ 1]$.

**25.** Нобаробариро ҳал кунед:

$$\sqrt{7}\cdot 49^{x} \le 343.$$

$A)\ (-\infty;\ \frac{5}{4}];\quad B)\ (0;\ \frac{3}{4});\quad C)\ (1;\ \frac{7}{3});\quad D)\ (\frac{5}{4};\ +\infty)\ .$

**26.** Қимати хурдтарини бутуни $x$ -ро, ки ҳалли нобаробарии зерин аст, ёбед:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{x} > \frac{3}{16}.$$

$A)\ 1;\quad B)\ -3;\quad C)\ -1;\quad D)\ -2\ .$

**27.** Нобаробариро ҳал кунед:

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{x} - 5\cdot 6^{-x} - 6 \le 0.$$

$A)\ (2;\ +\infty);\quad B)\ [-1;\ +\infty);\quad C)\ (-1;\ +\infty);\quad D)\ (1;\ +\infty)\ .$

**28.** Қимати калонтарини бутуни $x$, ки нобаробарии $7^{x^2-3x-8} \le 49$ - ро қаноат мекунонад, ёфта шавад.

$A)\ 5;\quad B)\ 6\ ;\quad C)\ 4;\quad D)\ 7\ .$

**29.** Ҳалҳои бутуни нобаробарии $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} > 9$ - ро дар порчаи $[1;\ 3]$ ёбед.

$A)\ 1;\ 2:\ \ 3;\quad B)\ 2;\ 3;\quad C)\ 3;\ \ 4;\quad D)\ 1\ .$

**30.** Нобаробарии зеринро ҳал кунед:

$$\frac{4^{x}}{2^{x+1}-1} \ge 1.$$

$A)\ (2;\ +\infty);\quad B)\ [-1;\ +\infty);\quad C)\ (-1;\ +\infty);\quad D)\ (1;\ +\infty)\ .$

**31.** Ҳалли нобаробариро ёбед:

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 1} \ge 2.$$

$A)\ (1;\ 2);\quad B)\ (0;\ 1];\quad C)\ [0;\ 1);\quad D)\ [0;\ 1]$.

**32.** Қимати калонтарини *x*-ро, ки нобаробарии зеринро қонеъ мекунонад, ёбед:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} \geq \frac{4}{3}.$$

$A)\ 2;\quad B)\ 1;\quad C)\ 3;\quad D)\ 4$.

**33.** Мувофиқати байни нобаробариҳо ва ҳалҳои онҳоро барқарор кунед:

$A)\ \sqrt{6^x} \geq 216,$ 1. $\left(\frac{3}{7};\ +\infty\right);$

$B)\ 2^{\frac{x-1}{3}} - \frac{1}{2} > 0,$ 2. $[6;\ +\infty);$

$C)\ \left(\frac{6}{7}\right)^{5-6x} - \frac{7}{6} \leq 0,$ 3. $[1;\ +\infty);$

$D)\ \left(\frac{3}{5}\right)^{1-7x} - 2\frac{7}{9} > 0,$ 4. $(-2;\ +\infty),$ 5. $(1;\ +\infty)$.

**Ба параграфи 5.**

**34.** Ҳисоб кунед:

$$log_{\sqrt{3}}12 - log_{\sqrt{3}}4 + 2.$$

$A)\ 4;\quad B)\ 3;\quad C)\ 5;\quad D)\ 2$.

**35.** Ҳисоб кунед:

$$log_3\sqrt{3} + log_3 3^{-1} + log_4 16.$$

$A)\ 2{,}5;\quad B)\ 3;\quad C)\ 1{,}5;\quad D)\ 2$.

**36.** Қимати ифодаро ёбед:

$$2^{5-log_2 5} + log_3 27^{-1}.$$

$A)\ 4;\quad B)\ 3{,}4;\quad C)\ 3{,}5;\quad D)\ 3{,}2$.

**37.** Ҳисоб кунед:

$$3log_4 5 + 2log_4 \frac{4}{\sqrt{125}} - 3.$$

$A) -2,5;$ $B) -1,4;$ $C) -1,2;$ $D) -1.$

**38.** Қимати ифодаи логарифмиро ёбед:

$$4^{1+2log_2 3} + 3^{2+log_9 4}.$$

$A)$ 332; $B)$ 342; $C)$ 243; $D)$ 431.

**39.** Ҳисоб кунед:

$$3log_4 5 + 2log_4 \sqrt{\frac{16}{125}}.$$

$A)$ 1; $B)$ 2,5; $C)$ 3; $D)$ 2.

**40.** Ҳисоб кунед:

$$4log_3 6 - 2log_3 12.$$

$A)$ 1; $B)$ 2; $C)$ 3; $D)$ 2,5.

**41.** Қимати ифодаро ёбед:

$$2log_{\sqrt{3}} 3 - log_3 \sqrt{3}.$$

$A)$ 3,5; $B)$ 2; $C)$ 3; $D)$ 2,5.

**42.** Қимати ифодаро ёбед:

$$3^{1+log_3 11} + 10.$$

$A)$ 35; $B)$ 42; $C)$ 43; $D)$ 25.

**43.** Ҳисоб кунед:

$$3^{1+log_3 5} + 2^{2+2log_4 8}.$$

$A)$ 46; $B)$ 42; $C)$ 43; $D)$ 47.

**44.** Ҳисоб кунед:

$$log_6 2 - log_6 3^{-1} + 2^{log_2 3}.$$

$A)$ 4; $B)$ 12; $C)$ 8; $D)$ 7.

**45.** Қимати ифодаро ёбед:

$$9^{2-0,5log_3 10} + log_2 0,5.$$

$A)$ 7,4; $B)$ 7,2; $C)$ 7,8; $D)$ 7,1.

**46.** Қимати ифодаро ёбед:

$$2^{3-log_2 5} - log_3 \frac{1}{9}.$$

$A)$ 3,4; $B)$ 3,6; $C)$ 3,8; $D)$ 3,1.

**47.** Ҳисоб кунед:

$$7^{2log_7 3+1} + 2log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$A)$ 63; $B)$ 66; $C)$ 62; $D)$ 64.

**48.** Ҳисоб кунед:

$$81^{0,5log_3 7+\frac{1}{4}} - 12.$$

$A)$ 135; $B)$ 132; $C)$ 122; $D)$ 134.

**49.** Қимати ифодаро ёбед:

$$log_{16} 64 + (\sqrt[3]{3})^{log_3 27}.$$

$A)$ 3,5; $B)$ 4,5; $C)$ 4,2; $D)$ 3,4.

**50.** Қимати ифодаро ёбед:

$$9^{1+log_{27} 8} + log_{\frac{1}{9}} 27.$$

$A)$ 32,5; $B)$ 24,5; $C)$ 34,2; $D)$ 34,5.

**51.** Ҳисоб кунед:

$$log_2\left(log_2(log_2 2^{16})\right) + 10^{lg6}.$$

$A)$ 6; $B)$ 8; $C)$ 7; $D)$ 9.

**52.** Ҳисоб кунед:

$$log_2(log_3 81) + 5 \cdot 3^{log_3 0,2}.$$

$A)$ 3; $B)$ 5; $C)$ 4; $D)$ 2.

**53.** Мувофиқати байни ифодаҳои логарифмӣ ва қиматҳои онҳоро муайян кунед:

$A)$ $log_8 16 - \frac{3}{2} log_2 4 + \frac{2}{3}$, 1. 0,5;

$B)$ $log_{\frac{1}{4}} log_{49} log_2 128$, 2. 8,5;

$C)$ $\frac{1}{2} log_3 81 \cdot log_5 \frac{1}{25}$, 3. $-1$;

$D)$ $3log_3\sqrt{27} + 9^{log_3 2}$, 4. 6;

5. $-4$.

**Ба параграфи 6.**

**54.** Муодиларо ҳал кунед:

$$log_{16}(2x-3) = \frac{1}{2}.$$

$A)$ {3,5}; $B)$ { 3}; $C)$ {4}; $D)$ {2}.

**55.** Муодиларо ҳал кунед:

$$25^{log_5 2x} = 16.$$

$A)$ {3,5}; $B)$ { 3}; $C)$ {4}; $D)$ {2}.

**56.** Решаи калони муодиларо ёбед:

$$log_9(x^2 - 4x + 6) = \frac{1}{2}.$$

$A)\ \{3{,}5\};\quad B)\ \{3\};\quad C)\ \{4\};\quad D)\ \{2\}.$

**57.** Муодиларо ҳал кунед:

$$log_2 log_4(log_6 x + 3) = 0.$$

$A)\ \{5\};\quad B)\ \{3\};\quad C)\ \{6\};\quad D)\ \{2\}.$

**58.** Решаи муодиларо ёбед:

$$log_{\frac{1}{2}}(1 - log_4(2 - x)) = 1.$$

$A)\ \{1\};\quad B)\ \{3\};\quad C)\ \{4\};\quad D)\ \{0\}.$

**59.** Муодиларо ҳал кунед:

$$log_4 x + log_2 x = 3.$$

$A)\ \{5\};\quad B)\ \{3\};\quad C)\ \{4\};\quad D)\ \{2\}.$

**60.** Муодиларо ҳал кунед:

$$log_5 x + log_5 5x = -1.$$

$A)\ \{0{,}5\};\quad B)\ \{0{,}2\};\quad C)\ \{0{,}4\};\quad D)\ \{0{,}3\}.$

**61.** Решаи муодиларо ёбед:

$$\lg(x + 2) - lg_{100}(x + 2) = \frac{1}{2}.$$

$A)\ \{8\};\quad B)\ \{6\};\quad C)\ \{4\};\quad D)\ \{7\}.$

**62.** Муодиларо ҳал кунед:

$$\lg(4x + 2) - \lg(3x + 4) = 0.$$

$A)\ \{5\};\quad B)\ \{3\};\quad C)\ \{4\};\quad D)\ \{2\}.$

**63.** Муодиларо ҳал кунед:

$$log_2(x + 12) - log_2(6 - x) = 3.$$

$A)\ \{5\};\quad B)\ \{3\};\quad C)\ \{4\};\quad D)\ \{2\}.$

**64.** Решаи бутуни муодиларо ёбед:

$$x^{log_3 x+2} = 27.$$

$A)$ $\{3\}$; $B)$ $\{4\}$; $C)$ $\{9\}$; $D)$ $\{6\}$.

**65.** Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$x^{\frac{lgx-1}{2}} = 10.$$

$A)$ $\{40\}$; $B)$ $\{100\}$; $C)$ $\{20\}$; $D)$ $\{10\}$.

**66.** Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$(\sqrt{x})^{log_4 x+2} = 8.$$

$A)$ $\left\{\frac{1}{8}\right\}$; $B)$ $\left\{\frac{1}{16}\right\}$; $C)$ $\{2\}$; $D)$ $\{8\}$.

**67.** Суммаи решаҳои муодиларо ёбед:

$$log_x 9 + log_3 x = 3.$$

$A)$ $\{11\}$; $B)$ $\{13\}$; $C)$ $\{12\}$; $D)$ $\{9\}$.

**68.** Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$log_5 x + 1 = log_x 25.$$

$A)$ $\{5\}$; $B)$ $\left\{\frac{1}{15}\right\}$; $C)$ $\left\{\frac{1}{5}\right\}$; $D)$ $\{2\}$.

**69.** Муодиларо ҳал кунед:

$$\frac{lgx+6}{lgx-2} = -3.$$

$A)$ $\{1\}$; $B)$ $\{3\}$; $C)$ $\{4\}$; $D)$ $\{2\}$.

**70.** Суммаи решаҳои муодиларо ёбед:

$$x^{log_7 4} - 5 \cdot 2^{log_7 x} + 4 = 0.$$

$A)$ 54; $B)$ 58; $C)$ 48; $D)$ 50.

**71.** Суммаи решаҳои муодиларо ёбед:

$$x \cdot 10^{lg_x 11} = 110.$$

$A)$ 23; $B)$ 21; $C)$ 18; $D)$ 24.

**72.** Ҳосили зарби решаҳои муодиларо ёбед:

$$x^{log_3 x} = \sqrt[4]{3}.$$

$A)$ 4; $B)$ 3; $C)$ 2; $D)$ 1.

**73.** Мувофиқати байни муодилаҳои логарифмӣ ва решаҳои онҳоро муайян кунед:

| | |
|---|---|
| $A)$ $log_{0,5}(3x-2) = log_2(2x-1)$, | 1. 5; |
| $B)$ $lgx + \lg(x-3) = 1$, | 2. $2 \pm \sqrt{5}$; |
| $C)$ $log_3 x + log_3(x-2) = 1$, | 3. 1; |
| $D)$ $log_{\sqrt{2}}(x^2 - 4x + 3) = 4$, | 4. 6; |
| | 5. 3. |

**74.** Системаи муодилаҳои логарифмиро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ log_2 x - log_2 y = 1. \end{cases}$$

$A)$ (2; 5); $B)$ (1; 3); $C)$ (2; 3); $D)$ (4; 2).

**75.** Системаи муодилаҳои логарифмиро ҳал карда, қимати $x + y$ - ро ёбед:

$$\begin{cases} 3log_2 x - log_2 y = 1, \\ log_{0,5} x + 2log_2 4y = 7. \end{cases}$$

$A)$ 6,5; $B)$ 7; $C)$ 6; $D)$ 5.

**76.** Системаи муодилаҳои логарифмиро ҳал карда, қимати $5x - y$ - ро ёбед:

$$\begin{cases} log_{0,5}(x-1) + log_2 y = 3, \\ 3x - 2y = -10. \end{cases}$$

$A)$ 3; $B)$ 2; $C)$ 4; $D)$ 3,4.

**77.** Системаи муодилаҳои логарифмиро ҳал карда, қимати $\frac{x}{y}$ - ро ёбед:

$$\begin{cases} 3log_2(x-2) - 2log_{\sqrt{2}}y = -2, \\ log_{\sqrt{3}}(x-y+1) = 2. \end{cases}$$

$A)$ 1,5; $B)$ 0,6; $C)$ 2,5; $D)$ 1,8 .

**78.** Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 2.$$

$A)\ (-\infty;\ 1{,}25)$; $B)\ (1;\ 1{,}25)$; $C)\ (0;\ 1)$; $D)\ (1;\ 1{,}25]$.

**79.** Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$log_4(1-3x) \leq -1.$$

$A)\ \left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right]$; $B)\ \left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right)$; $C)\ [\frac{1}{4};\ \frac{1}{3})$; $D)\ (1;\ 1{,}25]$.

**80.** Қимати бутуни калонтарини *x*, ки ҳалли нобаробарии зерин аст, ёфта шавад:

$$log_{0,5}(1-0{,}5x) \geq -3.$$

$A)$ 1; $B)$ 2; $C)$ 3; $D)\ -1$ .

**81.** Қимати бутуни хурдтарини *x*, ки ҳалли нобаробарии зерин аст, ёфта шавад:

$$log_{0,5}(x^2-7x+12) > log_{0,5}(17-3x)$$

$A)$ 0; $B)\ -1$; $C)$ 2; $D)\ -2$ .

**82.** Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$log_{\frac{1}{3}}(2x+5) \geq -2.$$

$A)\ (2;\ 4)$; $B)\ [2{,}5;\ 8)$; $C)\ [-2{,}5;\ 2]$; $D)\ (-2{,}5;\ 2]$ .

**83.** Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$lg(x+5) \leq 2 - lg2.$$

$A)\ (5;\ 14);\quad B)\ [-5;\ 45);\quad C)\ (-5;\ 45];\quad D)\ (-1;\ 25).$

**84.** Қимати бутуни калонтарини $x$-ро, ки нобаробарии зеринро қаноат мекунонад, ёбед:

$$log_3(7-4x) \leq 3.$$

$A)\ 2;\quad B)\ 1;\quad C)\ 3;\quad D)\ 4.$

**85.** Нобаробарии логарифмиро ҳал кунед:

$$log_{\frac{1}{2}}(7x-21) > log_{\frac{1}{2}}(6x).$$

$A)\ (3;\ 21);\quad B)\ [3;\ 21);\quad C)\ [3;\ 21];\quad D)\ (3;\ 12).$

**86.** Ҳалҳои бутуни нобаробариро ёбед:

$$log_{0,1}(1-3x) \geq \lg(2x+1).$$

$A)\ 1;\ 2;\quad B)\ 0;\quad C)\ 0;\ 1;\quad D)\ 0;\ 1;\ 2.$

**87.** Ҳалли нобаробарии зеринро ёбед:

$$log_{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{2}{x-3}\right) < -1.$$

$A)\ (-1;\ 3);\quad B)\ [-1;\ 3);\quad C)\ (1;\ 3);\quad D)\ (-1;\ 4).$

**88.** Қимати хурдтарини $x$, ки ҳалли нобаробарии зерин аст, ёфта шавад:

$$log_{0,5}(2-3x) \geq log_{0,5}(4x-1).$$

$A)\ \frac{4}{7};\quad B)\ \frac{3}{8};\quad C)\ \frac{3}{7};\quad D)\ \frac{2}{7}.$

**89.** Мувофиқати байни нобаробариҳои логарифмӣ ва ҳалҳои онҳоро муайян кунед:

$A)\ log_3\left(1-\frac{x}{2}\right) < -1,$ 1. $[-7,5;\ 2,5);$

$B)\ log_{0,2}(x-1) > log_5 2,$ 2. $\left(\frac{7}{5};\ \ 2\right);$

$C)\ \frac{1}{2}log_{\sqrt{3}}(5x-7) < 1,$ 3. $\left(\frac{4}{3};\ +2\right);$

$D)\ log_{0,5}(1-0{,}4x) \geq -2,$ 4. $(-2;\ +\infty),$

5. $(1;\ \ 1{,}5).$

**Ба параграфи 7.**

**90.** Ҳосилаи функсияро ёбед:

$$f(x) = e^{x^2} - 4x.$$

$A)\ 2xe^{x^2} - 4;$ $B)\ 2e^{x^2} - 4;$ $C)\ xe^{x^2} - 4x;$ $D)\ e^{x^2} - 4.$

**91.** Ҳосилаи функсияро ёбед:

$$f(x) = 4^{\frac{x}{2}} + ctg\frac{x}{2}.$$

$A)\ \frac{ln4}{2}4^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2sin^2\frac{x}{2}};$ $B)\ \frac{1}{2}4^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{cos^2\frac{x}{2}};$

$C)\ 4^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2sin^2\frac{x}{2}};$ $D)\ \frac{ln4}{2} - \frac{1}{sin^2\frac{x}{2}}.$

**92.** Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаи $x = -3$ ёбед:

$$f(x) = 3^x \cdot x^3$$

$A)\ 1 - ln3;$ $B)\ ln3 - 2;$ $C)\ ln3 + 1;$ $D)\ 2 - ln3.$

**93.** Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаи $x = 0$ ёбед:

$$f(x) = 0{,}2^{-x} - sin\frac{x}{2}.$$

$A)\ ln5 - \frac{1}{2};$ $B)\ ln3 + \frac{1}{2};$ $C)\ 2ln2 - \frac{1}{2};$ $D)\ ln4 + 0{,}5.$

**94.** Ҳосилаи функсияро ёбед:

$$f(x) = 3^{-x} + ex.$$

$A) -ln3 \cdot 3^{-x} + e;$ $B)\ ln3 \cdot 3^{-x} + 2e;$

$C)\ -ln3 \cdot 3^{x} + e;$ $D)\ 3^{-x} + e.$

**95.** Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_0^1 2e^{2x}dx.$$

$A)\ e + 1;$ $B)\ 3e - 2;$ $C)\ e^2 - 1;$ $D)\ 3e.$

**96.** Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+1}.$$

$A)\ ln3 - 1;$ $B)\ ln3 - ln2;$ $C)\ e;$ $D)\ ln4.$

**97.** Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_5^8 \frac{dx}{9-x}.$$

$A)\ ln2;$ $B)\ ln\frac{1}{4};$ $C)\ 2ln4;$ $D)\ ln4.$

**98.** Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_3^6 \frac{dx}{2x-1}.$$

$A)\ 0{,}5ln2{,}2;$ $B)\ 0{,}5ln\frac{1}{4};$ $C)\ 2ln0{,}2;$ $D)\ 0{,}4ln4.$

**99.** Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{6-5x}.$$

$A)\ 0{,}2ln2{,}2;\quad B)\ 0{,}2ln\frac{6}{11};\quad C)\ 2ln\frac{11}{6};\quad D)\ 0{,}2ln\frac{11}{6}.$

**100.** Ҳосилаи функсияро ёбед:

$$f(x) = log_5(1-3x).$$

$A)\ \frac{3}{ln5\cdot(3x-1)};\quad B)\ \frac{3}{ln5\cdot(1-3x)};\quad C)\ \frac{3ln5}{3x-1};\ D)\ \frac{3x-1}{ln5}.$

**101.** Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаи $x = 2{,}5$ ёбед:

$$2log_4\sqrt{1-2x}.$$

$A)\frac{2}{3ln2}\ ;\quad B)\ \frac{3}{5ln4};\quad C)\ \frac{1}{2ln4};\quad D)\ \frac{1}{3ln4}.$

**102.** Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаи $x = 3$ ёбед:

$$f(x) = -\frac{1}{2}log_{0,2}(x+3)^4.$$

$A)\ \frac{1}{3ln5};\quad B)\ -\frac{1}{3ln5};\quad C)\ \frac{5}{3ln2};\quad D)\ \frac{4}{ln6}.$

**103.** Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаи $x = 6$ ёбед:

$$f(x) = \frac{3}{2}log_{\sqrt{3}}(2-x)^4.$$

$A)\ \frac{2}{ln3}\ ;\quad B)\ \frac{3}{ln3};\quad C)\ \frac{1}{2ln3};\quad D)\ \frac{8}{3ln3}.$

## ҶАВОБҲО

**94.** Дуюм, панҷум ва ҳафтумаш. **98.** $[0;\ 2{,}5]$. **99.** а) 9; б) 1. **100.** $\sqrt{a}\left(\sqrt[4]{a}-2\right)\left(\sqrt[4]{a}+2\right)$; б) $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$. **101.** 2,25. **102.** а) $x>y$; б), в) $x<y$. **103.** а), б), г) $a<1$; в) $a>1$. **105.** а) $(1;\infty)$; б) в) $(-\infty;0)$; г) $(-5;\infty)$; д) $(-2;\infty)$; е) $[2;+\infty)$; ж) $[0;\infty)$; з) $[1;\infty)$. **106.** а) $y_{\min}=0{,}5$, $y_{\max}=2$; б) $y_{\min}=2$, $y_{\max}=10$; в) $y_{\min}=\frac{1}{4}$, $y_{\max}=4$; г) $y_{\min}=-\frac{5}{6}$, $y_{\max}=0$. **107.** а) +; б) +; в) -; г) -. **108.** а) 2; б) 1; в) –1; г) 0. *Нишондод*: графики функсияҳои $y=3^x$ ва $y=1-x$-ро дар як системаи координатӣ кашида пайхас менамоем, ки абсиссаи нуқтаи буриш $x=0$ аст; исбот мекунем, ки графикҳо дигар нуқтаи буриш надоранд. Барои ин аз хосиятҳои мувофиқи функсияҳои нишондиҳандагӣ ва хаттӣ истифода мебарем. Ҳангоми $x>0$ будан функсияи $y=3^x$ қиматҳои аз 1 калонро қабул мекунад, вале функсияи $y=1-x$ мувофиқан қиматҳои аз 1 хурдтарро (Ҳангоми $x<0$ будан функсияҳо мувофиқан қиматҳои аз 1 хурд ва аз 1 калонро қабул менамоянд.). Хулоса, графикҳо дар дигар нуқтаҳо ҳамдигарро намебуранд. **109.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 2. **110.** а) $(-\infty;2)$; б) $(3;\infty)$. **111.** а), б) $(0;\infty)$ (ниг. ба нишондоди машқи 108). **112.** а) 9; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{7}{3}$; г) $\sqrt{1{,}6}$. **113.** а) $x+y$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}+4}$; в) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; г) $\sqrt[3]{x}-2$. **114.** а) якумаш; б) дуюмаш. **115.** а) $\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{x^2}$. **116.** а) $\frac{\pi}{4}+n\pi$, $n\in Z$; б) $\frac{2}{3}\pi+4n\pi$, $n\in Z$. **117.** а) 5; б) –4; в) 3,5; г) 4. **118.** а) 2; б) –1; в) 2,5; г) –2,25. **119.** а) –1,5; б) –2,5; в) -4; г) –5. **120.** а) 3;

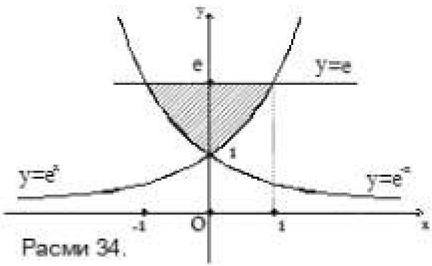
б) 0; в) $-\frac{2}{3}$; г) 3. **121.** а) 0; б) 1; в) 0; г) 2. **122.** а) 2; б) 1; в) 3; г) $\frac{1}{2}$. **123.** а) 1; б) 1; в) –1; г) 3. **124.** а) 4; б) –1; в) -0,5; г) –2. **125.** а) 1 ва 3; б) 0; в) 3 ва 4; г) 2. **126.** а) 17; б) 0 ва $\frac{1}{2}$; в) 2; г) 0. **127.** $x$ калон аст. **128.** 1. **129.** $1\frac{1}{3}$. **130.** 28 ва 20. **131.** а) $[-1;\infty)$; б) $(5;\infty)$; в) $[-4;\ +\infty)$; г) $(-\infty;0]$. **132.** а) $(-2;\infty)$; б) $(-\infty;2)$; в) $\left[\frac{3}{2};\infty\right)$; г) $(-\infty;0]$. **133.** а) (-0,25; ∞); б) $(3;\infty)$; в) $\left[\frac{2}{3};\infty\right)$; г) $(-\infty;1]$. **134.** а) $\left[\frac{1}{3};3\right]$; б) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right]\cup[3;+\infty)$; в) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup[4;\infty)$; г) $(0;2)$. **135.** а) $(-\infty;2)$; б) $(-\infty;4{,}5)$; в) $(-2;-1]$; г) $(-\infty;-1)\cup[2;\infty)$. **136.** а) $(-\infty;0]$; б) $(-2;+\infty)$; в) $(-2;1)$; г) $[0;\infty)$. **137.** $y_{\max}=1$, ҳангоми $x=0$ будан. **138.** (-3;-5) ва (5;3). **139.** а) $\frac{1}{4}$; б) –1. **140.** 2. **141.** $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $tg\alpha=2{,}4$. **142.** 1. **143.** а) (3; -1); б) $\left(\frac{3}{14};-\frac{1}{14}\right)$; в) (2; -1); г) (0; 1). **144.** а) (1; 1); б) (1; 1); в) (5; 3); г) (25; 16) ва (16; 25). **145.** $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi,\quad n\in Z$. **146.** 200. **147.** $f_{\min}=0$ ҳангоми $x=0$, $f_{\max}=\frac{1}{2}$ ҳангоми $x=-0{,}5$. **148.** а) $20\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}(\pi+2)$. **149.** а) $x\neq1$; б) $[-2;2]$. **153.** а) 5; -3; 1,5; $\frac{2}{3}$. б) 3; -1; 0,5; 0,4. в) 2; -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$. **154.** а) 3; б) 2; в) $\frac{1}{10}$; г) $3\sqrt[3]{9}$. **155.** а) $\frac{1}{2}$

; б) 25; в) 16; г) $\frac{1}{36}$. **156.** а) $\frac{1}{81}$; б) 1; в) $\frac{1}{7}$; г) 32. **157.** а) $\ell og_4 16$; $\ell og_4 \frac{1}{16}$; $\ell og_4 4$; $\ell og_4 1$. б) $\ell og_2 2$; $\ell og_2 \frac{1}{2}$; $\ell og_2 1$; $\ell og_2 16$. в) $\ell og_3 81$; $\ell og_3 \frac{1}{3}$; $\ell og_3 3$; $\ell og_3 9$. г) $\ell og_5 \frac{1}{125}$; $\ell og_5 \frac{1}{25}$; $\ell og_5 25$; $\ell og_5 5$. **158.** а) 3; б) 3,14; в) 1; г) 1,4. **159.** а) 12; б) $3\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. **160.** а) 4; б) $\frac{1}{16}$; в) 4; г) 1. **161.** $\left[-\frac{2}{7};\infty\right)$. **162.** 16%. **163.** 4905. **164.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in Z$. **165.** 1. **166.** б) $-0{,}2\left[2(1+\ell og_2 a)-\frac{3}{7}\ell og_2 b\right]$. **167.** б) $1-2\ell ga-\ell gb-3\lg c$. **168.** а) 3; б)-1; в) –4; г) 2. **169.** а) $1+a+b$; б) $1+b$; в) $3a+b$; г) $2+a$. **170.** а) 2; б) 4; в) 2; г) –1. **171.** а) 6; б) $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) 2. **172.** а) 7,5; б) $4\frac{4}{9}$; в) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$; г) $\frac{1}{4}$. **173.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{5}$; в) 2; г) 2. **174.** а) 49; б) 5; в) 3; г) 27. **175.** а) –3; б) $\frac{1}{2}$; в) –1; г) 1. **178.** 3. **179.** $-\frac{1}{3}$. **181.** $1+\sqrt{a}$. **182.** $1+\sqrt{3}$. **184.** а) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$; б) $(-4;4)$; в) $[0;9)$; г) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **185.** а) $\left(-\infty;-\frac{7}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$; б) $(-3;1)$; в) $\left(\frac{2}{3};1\right)$; г) $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$. **186.** а) $(2\pi n;2\pi n+\pi)$, $n\in Z$; б) $(0;\infty)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; г) $(-\infty;0)$. **187.** а) Дуюмаш калон; б), в), г) якумаш калон; д), е) дуюмаш калон.

**188.** а), б), в), г) якумаш калон; д), е) дуюмаш калон. **189.** а) хурд; б) калон; в) хурд; г) калон. **190.** а) –1; б) 2; в) 0; г) 0. **191.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{81}$; в) 25; г) $\frac{1}{\pi^2}$. **192.** а) $f_{\min}=-\frac{1}{2}$ ҳангоми $x=2$, $f_{\max}=2$ ҳангоми $x=\frac{1}{16}$; б) $f_{\min}=0$ ҳангоми $x=1$, $f_{\max}=2$ ҳангоми $x=4$. **193.** $\frac{5}{2}$. **194.** Ҳ а л. Ҳангоми $x<1$ будан қисми чапи нобаробарӣ манфӣ буда, қисми росташ мусбат аст. Бинобар ин вай ҷой надорад. Ҳангоми $x>2$ будан тавре возеҳ аст, нобаробарӣ дуруст мебошад. Агар $1<x<2$ бошад, он гоҳ нобаробарии мазкур ба нобаробарии $2-x>2(x-1)$ ё ба $x<\frac{4}{3}$ баробарқувва аст. **Ҷ а в о б:** $\left(1;\frac{4}{3}\right)\cup(2;\infty)$. **195.** 10 ва 20 китоб. **196.** $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. **197.** 126. **199.** а) 2; б) –3; в) 4; г) $-\frac{1}{2}$. **200.** а) 0,4; б) 0,1. **201.** а), б) Дуюмаш калон; в) якумаш калон; г) дуюмаш калон. **202.** а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $6\frac{1}{4}$; г) $\varnothing$. **203.** а) $\left[\frac{5}{3};\infty\right)$; б) $(4;\infty)$; в) $(-\infty;0]$; г) $(0;\infty)$. **204.** *Нишондод:* аз формулаи гузариш ва баробарии $10^M=e$, ки $M=0{,}4343$ аст, истифода баред. **205.** 6. **206.** 10. **207.** $b-a$. **208.** $\frac{1}{2}\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. **209.** $(0;2]$. **210.** а) $\log_8 0{,}4$; б) $\log_{0,2}4$; в) $\log_3 7$; г) $\log_9 e$. **211.** а) $1+\log_{0,3}2$; б) $\pm\sqrt{\log_4 5}$; в) $\frac{\lg 6}{2}$; г) $\frac{2-\ln 2}{5}$. **212.** а) 9; б) 5; в) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; г) $e^2$. **213.** а) 5; б) –3 ва 1; в) 3; г) 4,5. **214.** а) $\frac{4}{25}$; б) 10; в)

18; г) 14. **215.** а) $\frac{9}{2}$; б) 100 ва 1000; в) 10; г) 2. **216.** а) 3 ва 9; б) $e^{-2}$ ва $e$; в) $\sqrt{3}$ ва 27; г) 0 ва 9. **217.** а) 4; б) $\frac{1}{7}$; в) 32; г) –21. **218.** а) $\frac{16}{5}$; б) 9; в) 32; г) $\frac{1}{2}$ ва 4. **219.** а) 0 ва 2; б) 2; в) 0,1 ва 100; г) 10 ва 100. **220.** 2. **221.** $25ab$. **222.** 36 ва 40 км/соат. **223.** 0,003. **224.** о ва $\frac{9}{4}$. **225.** а) $(2;\infty)$; б) $\left(\frac{1}{16};\infty\right)$; в) $(0{,}6;\infty)$; г) $\left(\frac{25}{4};\infty\right)$. **226.** а) $(2;\ 11)$; б) $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$; в) $\left(8\frac{2}{3};\ \infty\right)$; г) $(5;\infty)$. **227.** а) $(4;\infty)$; б) $[5;\ \infty)$; в) $\varnothing$; г) $\left(\frac{1}{4};4\right)$. **228.** а) (0; 1); б) (1; 3]; в) (-4; -3)$\cup$(4;5); г) $(-3;\ 2)$. **229.** а) $[1;e]$; б) $\left(0;5^{-\sqrt{3}}\right)\cup\left(5^{\sqrt{3}};\infty\right)$; в) $\left(0;10^{-4}\right)\cup(10;\infty)$; г) $\left[5^{-5};\ 5^{5}\right]$. **230.** а) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; б) $\left[e;\ e^{3}\right]$; в) $\left[-\frac{7\pi}{12}+\pi n;\ \frac{\pi}{12}+\pi n\right]$, $n\in Z$; г) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}};10\right)$. **231.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ . **232.** 1. **233.** Дар $(-\infty;3)$ афзуда, дар $(3;\infty)$ кам мешавад. $f_{\max}=1$ ҳангоми $x=3$ будан. **234.** $3-a$. **235.** 16 ва 24. **236.** а) (53; 28); б) (4; 16); в) (6; 2); г) (6; 8). **237.** а) (1; 4); б) (5; 2); в) (25; 36); г) (9; 6). **238.** а) (100; 10); б) (2; 18) ва (18; 2); в) (4; 2); г) (50; -49). **239.** $\frac{5}{5-a}$. **240.** $(2;3{,}5]$. **241.** 12 км/соат. **242.** Ҳ а л. Аз ду тарафи муодила аз рӯйи асоси $x$ $(x\neq 1,\ x>0)$ логарифм гирифта, муодилаи $\log_x 16\cdot\log_x 2=\log_x 8+1$-ро ҳосил мекунем. Агар хосиятҳои логарифмро истифода кунем, он гоҳ муодиларо дар намуди $4\log_x^{\,2} 2=3\log_x 2+1$ навишта метавонем. Гузориши

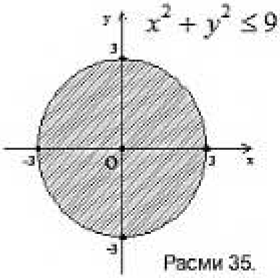
$t=\ell og_x 2$ -ро истифода карда, муодилаи квадратии $4t^2-3t-1=0$ -ро соҳиб мешавем. $t_1=-\frac{1}{4}$ ва $t_2=1$ решаҳои ин муодилаанд. Аз баробариҳои $\ell og_x 2=1$ ва $\ell og_x 2=-\frac{1}{4}$ ҳалли матлубро меёбем. Ҷ а в о б: $\frac{1}{16}$ *ва* $2$. **244.** а) $2e^x$; б) $3-5e^{-x}$; в) $-\frac{1}{3}e^x$; г) $-5e^{-x}+2x$. **245.** а) $e^x(\sin x+\cos x)$; б) $2e^x+3$; в) $8x-4^x\ell n4$; г) $x\cdot 3^x(2+x\ell n3)$. **246.** а) $e^{x^2}\left(2x\cdot\cos\frac{x}{2}-0{,}5\sin\frac{x}{2}\right)$; б) $6^{\frac{x}{2}}\left(\frac{\ell n6\cdot tg4x}{2}+\frac{4}{\cos^2 4x}\right)$; в) $\frac{(2+2^x)\ell n2}{(1+2^{-x})^2}$; г) $-\frac{0{,}2^{-x}(xln0{,}2+ln0{,}2+1)}{(x+1)^2}$. **247.** а) $y-x-1=0$; б) $y-2x\ell n2-2+2\ell n2=0$; в) $y+x-1=0$; г) $3y+x\ell n3-\ell n3-1=0$. **248.** а) Дар $\left(-\frac{1}{3};\infty\right)$ афзуда, дар $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ кам мешавад. $f_{\min}=-\frac{1}{3e}$ ҳангоми $x=-\frac{1}{3}$ будан; б) дар $\left(0;\frac{2}{\ell n4}\right)$ афзуда, дар $(-\infty;\ 0)\cup\left(\frac{2}{\ell n4};\infty\right)$ кам мешавад. $f_{\min}=0$ ҳангоми $x=0$ ва $f_{\max}=\left(\frac{2}{\ell n4}\right)^2\cdot 4^{-\frac{2}{\ell n4}}$ ҳангоми $x=\frac{2}{\ell n4}$ будан; в) дар $(-\infty;\ 1)$ афзуда, дар $(1;\ \infty)$ кам мешавад. $f_{\max}=\frac{1}{e}$ ҳангоми $x=1$ будан; г) Ҳ а л. $f'(x)=x\cdot 2^x(2+x\ell n2)$, $f'(x)>0$ агар $x>0$ ё $x<-\frac{2}{\ell n2}$ бошад. $f'(x)<0$ агар $-\frac{2}{\ell n2}<x<0$ бошад. Ҳамин тариқ, дар $\left(-\infty;\ -\frac{2}{\ell n2}\right)\cup(0;\ \infty)$ функсия афзуда, дар $\left(-\frac{2}{\ell n2};\ 0\right)$ кам мешавад. $f_{\min}=0$ ҳангоми $x=0$ ва $f_{\max}=\left(\frac{2}{\ell n2}\right)^2\cdot 2^{-\frac{2}{\ell n2}}$ ҳангоми $x=-\frac{2}{\ln 2}$ будан. **249.** $26\frac{2}{3}$. **250.** $\left(\frac{37}{8};\ -1\right)$. **251.** 0. **252.** Ҳ а л. $\frac{2a^2}{1+a^4}-1=\frac{2a^2-1-a^4}{1+a^4}=-\frac{(a^2-1)^2}{1+a^4}\le 0$. **253.** 8. **254.** а) $0{,}5(e-1)$; б) $\frac{1}{3}(e^3-1)$; в) $\frac{12}{\ell n2}$; г) $\frac{14}{\ell n4}$. **255.** а) $\frac{e^2-1}{e}$; б) $\frac{3}{\ell n4}-\frac{1}{\ell n2}$; в) $\frac{6}{\ell n3}$; г) $\frac{e^2+1}{2}-e$. **256.** а) $2-\frac{1}{\ell n2}$; б) Ҳ а л. Графики функсияҳои додашударо схемавӣ месозем (расми 34). Соҳаеро, ки масоҳати онро ёфтан зарур аст, бо хатти рах-рах қайд мекунем. Аз нақша дида мешавад, ки масоҳати матлуб чунин аст:



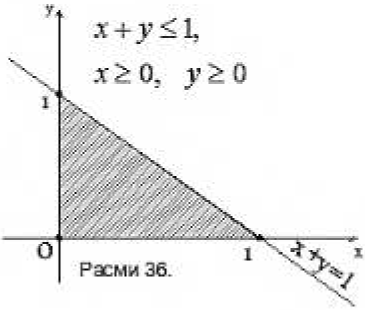
Расми 34.

$$S=2e-\int_{-1}^{0}e^{-x}dx-\int_{0}^{1}e^{x}dx=2e+e^{-x}\Big|_{-1}^{0}-e^{x}\Big|_{0}^{1}=2e+1-e-e+1=2;$$

в) $\frac{3}{\ell n4}-1$; г) $\frac{e^4-5}{4}$. **257.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{36}+\frac{n\pi}{6}$, $n\in Z$. **258.** Не. **259.** 10 рӯз; 20 деталӣ. **260.** а) Расми 35; б) Расми 36. **261.** $-3\frac{4}{7}$. **262.** а) $-(\frac{1}{4}\ell oga+\ell ogb+\log 2)$;



Расми 35.



Расми 36.

б) $-\frac{1}{2}(\log 2-\log 3+\frac{1}{3}\log c-\frac{1}{2}\ell og d)$. **263.** а) $\frac{5}{2+5x}$; б) $\frac{1}{(x+4)\ell n 0{,}2}$; в) $\frac{1}{x\ell n 10}-\cos x$; г) $\frac{2}{(2x+1)\ell n 3}$. **264.** а) $1+\ell n x$; б) $x(2\ell n x+1)$; в) $\frac{1-\ell n x}{x^2}$; г) $\frac{\ell n x-1}{\ell n^2 x}$. **265.** а) $\frac{1+x[x-2(x+3)\ell n(x+3)]}{(x+3)(x^2+1)^2}$; б) $\frac{x+(1-x)\ell n(1-x)}{(1-x)\ell n^2(1-x)}$; в) $\frac{x(2\ell n 3x-1)}{\ell n^2 3x}$;

г) $\frac{1+x(1-\ell n 4\ell og_4 x)}{x\ell n 4\cdot(x+1)^2}$. **266.** а) $y-x=0$; б) $y-2x+1=0$; в) $y-3ex+6=0$; г) $y-\frac{1}{\ell n 2}x=0$. **267.** а) дар $(0;\ e^{-2})$ кам шуда, дар $(e^{-2};\ \infty)$ меафзояд. $f_{\min}=-\frac{2}{e}$ ҳангоми $x=e^{-2}$ будан; б) дар $(0;\ e)$ афзуда, дар $(e;\ \infty)$ кам мешавад. $f_{\max}=\frac{1}{e}$ ҳангоми $x=e$ будан; в) дар $(0;\ 1)$ кам шуда, дар $(1;\ \infty)$ меафзояд. $f_{\min}=1$ ҳангоми $x=1$ будан; г) дар $(0;\ \frac{1}{\sqrt{e}})$ кам шуда, дар $(\frac{1}{\sqrt{e}};\ \infty)$ меафзояд. $f_{\min}=-\frac{1}{2e}$ ҳангоми $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ будан. **268.** $e-1$. **269.** –2 ва 1. **270.** $\frac{3^{\lg x}\ell n 3}{\cos^2 x}$. **271.** $\sqrt[4]{x}-3$. **272.** (12; 7) ва (-7; -

12). **273.** а) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$; б) $\sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1}$; в) $\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}$; г) $-\sqrt{7}x^{-\sqrt{7}-1}$. **274.** а) $-e\cdot x^{-e-1}$; б) $\frac{1}{2}\ell n4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\ell n4-1}$; в) $3\ell n2\cdot(3x)^{\ell n2-1}$; г) $\pi x^{\pi-1}$. **275.** а) $\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{2(1+\sqrt{2})}+C$; б) $\frac{x^{3\sqrt{2}+1}}{1+3\sqrt{2}}+C$; в) $\frac{x^{e+1}}{e+1}+C$; г) $\frac{x^{1-\sqrt{5}}}{5(\sqrt{5}-1)}+C$. **276.** а) $2\ell n|x+3|+C$; б) $\ell n|x+1|+C$; в) $2\ell n|x|+C$; г) $\ell n\frac{x^2}{|x+4|}+C$. **277.** а) $\frac{62}{5}$; б) $4(\sqrt{2}-1)$; в) 5; г) 4. **278.** а) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\left(1-2^{-\sqrt{2}-2}\right)$; в) $90\frac{5}{7}$; г) $18\frac{3}{4}$. **279.** а) $2+\ell n4$; б) $3\ell n3$; в) $1{,}5\ell n2$; г) $8+\ell n2$. **280.** $(-\infty;\ \infty)$. **281.** 0,5. **282.** Қалам 7 дирам ва дафтар 14 дирам меистад. **283.** $f_{\min}=-2{,}5$ ҳангоми $x=-2$ ва $f_{\max}=-2$ ҳангоми $x=-1$ будан. **284.** Н и ш о н д о д: аз формулаи суммаи синусҳо ва фарқи косинусҳои ду кунҷ истифода баред. **287.** $\approx 3{,}4$ *сол*. **288.** $\approx 36{,}7$ *сол*. **289.** $\approx 5280$ *сол*. **290.** 1,21 маротиба. **291.** Тахминан баъди 57 сол. **292.** $\frac{1000\,\ell n0{,}6}{\ell n0{,}8}$. **293.** $y(y-1)(y-2)$. **294.** $-(\sin\alpha+\cos\alpha)$. **295.** 12 см ва 5 см. **296.** –4 ва 5. **297.** $\frac{4}{3}$. **299.** а), г) Якумаш; б), в) дуюмаш. **300.** а) $\frac{1}{28}$; б) 1; в) 2; г) $-\frac{5}{2}$. **301.** а) 0; б) $\ell n3$; в) 0 ва 1; г) –1 ва 1. **302.** а) $(3;\infty)$; б) $(-\infty;-0{,}5)$; в) $[-1{,}5;\infty)$; г) $(-\infty;-0{,}25\ ]$. **303.** а) $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; б) $(-\infty;0)\cup(\frac{1}{2};\infty)$; в) $(-\infty;0]$; г) $[\ 0;\infty)$. **304.** а) (0; 1); б) (1; 1); в) $(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\sqrt{2})$ ва $(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2})$; г) (2; 1) ва (1; 2).

**305.** а) 2,5; б) –3; в) –2; г) $-\frac{1}{2}$. **306.** а) 40; б) $\frac{1}{6}$; в) 0,4; г) 0,3.

**307.** б) $5\ell gc-\frac{2}{3}(1+\ell gb)$; г) $2(1+\ell og_{0,4}b)-4{,}5\ell og_{0,4}c$. **308.** а) 49;

б) 63; в)$17\frac{7}{9}$; г)0,09. **310.** а) $\left(\frac{1}{3};\infty\right)$; б) $(-\infty;7)$; в) (-3; 3); г) (-2;

3). **311.** б), в) якумаш; а), г) дуюмаш. **312.** а) $\ell og_2 5$; б) $\ell og_{0,3}\frac{2}{3}$;

в) $\frac{1}{\ell og_4 1{,}25}$; г) $-log_2 108$. **313.** а) 18,5; б) 2; в) 0,6; г) $\frac{5}{7}$. **314.** а) 3

ва 9; б) 1; в) – 4 ва 5; г) $-\sqrt{6}$ ва $\sqrt{6}$. **315.** а) 2; б) 2; в) 0; г) 100

ва 0,01. **316.** а) $[3\frac{1}{8};\infty)$; б) $\left[\frac{11}{4};\infty\right)$; в) $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$; г)

$\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$. **317.** а) (-3; 1); б) $\left[-3;\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};4\right]$; в)

(0; 1); г) $(0,\ 0{,}001]\cup[10,\ \infty)$. **318.** а) (2; 5) ва (5; 2); б) $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$; в)

$\left(\frac{1}{4};\ 8\right)$ ва (2; 1); г) (2; 4). **319.** а) $6e^{5-2x}$; б) $16\cdot 7^{4x-1}\ell n7$; в)

$-14e^{-14x}$; г) $-3\cdot 5^{-3x}\ell n5$. **320.** а) $\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{3}{2}e^{-2x}+C$; б) $6e^{0,5x}+C$;

в) $\frac{4^x}{\ell n4}+C$; г) $\frac{0{,}3^x}{\ell n0{,}3}+C$. **321.** а) $\frac{1}{x\ln 10}+\lg 5x$; б) $ctgx$; в)

$\frac{3}{(3x+1)\ell n2}$; г) $\frac{2x}{(x^2+1)\ell n0{,}2}$. **322.** а) $5\sqrt{3}x^{5\sqrt{3}-1}$ ва $\frac{x^{5\sqrt{3}+1}}{5\sqrt{3}+1}+C$

; б) $-ex^{-e-1}$ ва $\frac{x^{1-e}}{1-e}+C$; в) $\frac{1}{\pi}x^{\frac{1}{\pi}-1}$ ва $\frac{\pi x^{\frac{1}{\pi}+1}}{\pi+1}+C$; г) $\sqrt{23}x^{\sqrt{23}-1}$ ва

$\frac{x^{\sqrt{23}+1}}{\sqrt{23}+1}+C$. **323.** а) $\ell n|x+3|+C$; б) $4\ell n|x|+C$; в) $\ell n\frac{\sqrt{|x|}}{|x+3|}+C$; г) $\frac{3}{2}\ell n|2x+1|+C$. **324.** а) $\frac{20}{\ell n5}$; б) $e-1$; в) $\frac{\ell n5}{5}$; г) $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$.

## Ҷавобҳои масъалаҳои тестӣ

1. B. 2. C. 3. A. 4. C. 5. C. 6. D. 7. A. 8. B. 9. C. 10. B. 11. A. 12. D. 13. B. 14. D. 15. A. 16. C. 17. A-3; B-4; C-1; D-2. 18. B. 19. A. 20. A. 21. C. 22. D. 23. B. 24. D. 25. A. 26. C. 27. B. 28. A. 29. D. 30. C. 31. B. 32. B. 33. A-2; B-4; C-3; D-1. 34. A. 35. C. 36. B. 37. B. 38. B. 39. D. 40. B. 41. A. 42. C. 43. D. 44. A. 45. D. 46. B. 47. C. 48. A. 49. B. 50. D. 51. B. 52. A. 53. A-3; B-1; C-5; D-2. 54. A. 55. D. 56. B. 57. C. 58. D. 59. C. 60. B. 61. A. 62. D. 63. C. 64. A. 65. D. 66. B. 67. C. 68. C. 69. A. 70. D. 71. B. 72. D. 73. A-3; B-5; C-2; D-1. 74. D. 75. C. 76. A. 77. A. 78. D. 79. C. 80. A. 81. A. 82. D. 83. C. 84. B. 85. A. 86. B. 87. A. 88. C. 89. A-3; B-5; C-2; D-1. 90. A. 91. A. 92. A. 93. A. 94. A. 95. C. 96. B. 97. D. 98. A. 99. D. 100. A. 101. C. 102. A. 103. B.

*Боби III*

# ТАКРОР

Дар поён мисолу масъалаҳое гирд оварда шудаанд, ки ҳалли онҳо зарурияти истифодаи тамоми паҳлӯҳои маводди назариявиро аз курсҳои «Математика»-и синфҳои IV-VI ва «Алгебра»-и синфҳои VII-XI тақозо мекунад. Маводди ин боб барои тайёрӣ ва бомуваффақият супурдани имтиҳони хатмкунӣ пешбинӣ мешавад.

## § 8. АДАДҲОИ ҲАҚИҚӢ

### 26. Ададҳои ратсионалӣ ва ирратсионалӣ

**325.** Исбот кунед, ки ҳосили зарби се адади пай дар пайи дилхоҳи натуралӣ ҳам ба 2 ва ҳам ба 3 тақсим мешавад.

**326.** Исбот кунед, ки адади шумораи нулҳояш ҷуфти 1000…0001 ба адади 11 тақсим мешавад.

**327.** Исбот кунед, ки барои ҳеҷ гуна қимати натуралии $n$ ифодаи $n^2+1$ ба 3 тақсим намешавад.

**328** Дар адади 642… ба ҷойи нуқтаҳо ду рақамро чунон нависед, ки адади ҳосилшудаи панҷрақама: а) ба 3 ва ба 5; б) ба 4 ва ба 9 тақсим шавад.

**329.** Суммаи се адади тоқи пай дар пай ба 75 баробар аст. Адади аввалинашро ёбед.

**330.** Суммаи чор адади ҷуфти пай дар пай ба 84 баробар аст. Адади охиринашро ёбед.

**331.** Исбот кунед, ки

а) $|a|=|-a|$;  б) $a\le|a|$;  в) $|a|^2=a^2$.

**332.** Қимати ифодаро ёбед:

а) $\left(5{,}05:\dfrac{1}{40}-2{,}8\cdot\dfrac{5}{6}\right)\cdot 3+1{,}6\cdot 0{,}1875$;

б) $\left(\dfrac{1}{2}+0{,}125-\dfrac{1}{6}\right)\cdot\left(6{,}4:\dfrac{80}{3}\right)+\dfrac{1}{8}$;

в) $\left(6\dfrac{3}{5}:6-8{,}016\cdot 0{,}125+\dfrac{2}{15}\cdot 0{,}03\right)\cdot 2\dfrac{3}{4}$;

г) $\left(9\dfrac{3}{20}-1{,}24\right):2\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{3}{4}+2\dfrac{5}{8}\right):0{,}625$.

**333.** Ҳисоб кунед:

а) $\dfrac{\dfrac{3}{4}\cdot 1{,}8\cdot 1\dfrac{1}{5}:0{,}07}{\dfrac{1}{5}:0{,}49\cdot 2\dfrac{5}{8}}$;  б) $\dfrac{12{,}75\cdot\dfrac{4}{25}\cdot 1{,}8}{1\dfrac{1}{2}\cdot 2{,}04:20}$;

в) $\dfrac{0{,}2\cdot(6{,}2:0{,}31-\dfrac{5}{6}\cdot 0{,}9)}{2+1\dfrac{4}{11}\cdot 0{,}22\cdot 0{,}1}$;  г) $\dfrac{(1{,}75\cdot\dfrac{2}{5}+1{,}75:1\dfrac{1}{8})\cdot 1\dfrac{5}{7}}{\dfrac{17}{40}-0{,}325):\dfrac{1}{5}\cdot 0{,}4}$.

**334.** *КТУ* -и ададҳои: а) 180 ва 120;  б) 72 ва 90-ро ёбед.

**335.** *ХКУ* -и ададҳои: а) 180 ва 140;  б) 32 ва 48-ро ёбед.

**336.** Маълум, ки $a\approx 9{,}6$ ва $b\approx 4{,}2$ аст. Қимати тақрибии ифодаро ёбед: а) $4a+b$;  б) $a-2b$;  в) $a\cdot b$;  г) $\dfrac{a}{b}$.

**337.** Ба намуди касри одӣ нависед:

а) 1, (4);  б) 0, (37);  в) 1, 0(7);  г) 1, 2(62);  д) 1,(26).

**338.** Нишон диҳед, ки ададҳои $\sqrt{3}$ ва $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ададҳои ирратсионалианд.

**339.** Ададҳоро бо тартиби афзуншавӣ ҷойгир кунед. Аз байни онҳо ададҳои ирратсионалиро нишон диҳед:

а) $\sqrt{3}$; -2; -1,8; $\dfrac{\pi}{4}$; б) $\ell og_2 5$; -2; $\dfrac{5}{8}$; $-\sqrt{5}$;

в) 0, (1); $\dfrac{5}{6}$; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{e}{2}$; г) $e$; -1, (4); $\sqrt{10}$; $\ell g100$.

**340.** Ададҳоро муқоиса кунед:

а) $\dfrac{2}{\ell g\frac{1}{3}}$ ва $\dfrac{3}{2\ell g\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt{3}+2$ ва $\sqrt{15}$;

в) $\ell og_2 5$ ва $\ell og_5 2$; г) $8^{\ell og_3 6}$ ва $6^{\ell og_3 8}$;

д) $\cos 2{,}3$ ва $\cos 6{,}4$; е) $\sqrt{3}+\sqrt{8}$ ва $\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

**341.** Ратсионалӣ (бутун) будани ададҳоро нишон диҳед:

а) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}-\sqrt{3}$; б) $(\sqrt{3}+1)^2+(1-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$;

в) $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}-0{,}8\sqrt{6}$; г) $(2\sqrt{8}-4\sqrt{18}+\sqrt{32}):\sqrt{2}$;

д) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}-4}-\dfrac{1}{3\sqrt{2}+4}$; е) $\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}$.

## 27. Фоизҳо ва таносубҳо

**342.** $p$ - фоизи адади $a$ - ро ёбед, агар: а) $p=12$, $a=18$; б) $p=35$, $a=64$; в) $p=24$, $a=48$; г) $p=105$, $a=120$ бошад.

**343.** $p$ - фоизи адад ба $a$ баробар аст. Ададро ёбед, агар:

а) $p=4$, $a=7$; б) $p=36$, $a=16$; в) $p=22$, $a=68$; г) $p=18$, $a=46$ бошад.

**344.** Адади $a$ нисбати адади $b$ чанд фоизро ташкил мекунад, агар: а) $a=40$, $b=50$; б) $a=75$, $b=35$; в) $a=160$, $b=365$; г) $a=14$, $b=92$?

**345.** Доя аз 16 сар гов 96 л, дояи дигар аз 14 сар гов 84,28 л шир дӯшиданд. Маҳсулнокии кори кадоме аз дояҳо хубтар аст?

**346.** Узви номаълуми таносубро ёбед:

а) $5\frac{3}{5}:3\frac{1}{3}=x:5\frac{1}{4}$; б) $3\frac{1}{6}:4\frac{1}{2}=1:x$;

в) $\frac{x}{2{,}1}=\frac{7{,}4}{15}$; г) $\frac{0{,}4}{x}=\frac{14}{3\frac{1}{6}}$.

**347.** Бузургии $x$ аз таносуби зерин ёфта шавад:

а) $\dfrac{x}{3\frac{1}{2}\cdot(3\frac{1}{4}-2{,}2)}=12:\dfrac{\frac{1}{2}-0{,}3}{2+1\frac{3}{5}}$;

б) $\dfrac{16{,}2\cdot 0{,}25-7{,}4:\frac{37}{2}}{x}=9:(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9)$.

**348.** Аз ду маҳал, ки масофаи байнашон 31 км аст, дар як вақт ду савора ба роҳ баромаданд. Суръати ҳаракати яке аз саворaҳо 12 км/соат, суръати ҳаракати дигар 15 км/соат буд. Баъди чанде онҳо бо ҳам вомехӯранд. То лаҳзаи вохӯрӣ ҳар кадоме аз савораҳо кадом масофаро тай кардааст?

**349.** Фарқи ду каср ба $\dfrac{2}{9}$ баробар буда, суратҳои онҳо ҳамчун 4:1 ва махраҷҳои мувофиқи онҳо ҳамчун 3:1 нисбат доранд. Ин касрҳоро ёбед.

## 28. Прогрессияҳои арифметикӣ ва геометрӣ

**350.** Суммаи узвҳои сеюм ва нуҳуми прогрессияи арифметикӣ ба 8 баробар аст. Суммаи 11 узви аввалаи ин прогрессияро ёбед.

**351.** Узви якум ва чоруми прогрессияи арифметикӣ мувофиқан ба 1,2 ва 1,8 баробаранд. Суммаи шаш узви аввалаи онро ёбед.

**352.** Ҳисоб кунед: 7,5+9,8+12,1+…+53,5.

**353.** Суммаи ҳамаи ададҳои дурақамаро ҳисоб кунед.

**354.** Дар байни 3 ва 33 чунин панҷ ададро ёбед, ки онҳо прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд.

**355.** Дар прогрессияи арифметикӣ узви даҳум ба 13 ва узви панҷум ба 18 баробар аст. Фарқи прогрессияро ёбед.

**356.** Прогрессияи арифметикии $(a_n)$–ро ёбед, агар $a_1 + a_5 = 24$ ва $a_2 \cdot a_3 = 60$ бошад.

**357.** Барои кадом қимати $x$ ададҳои $\ell g2$, $\ell g(3^x - 3)$, $\ell g(3^x + 9)$ прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд?

**358.** Махраҷи прогрессияи геометрӣ ба –2, суммаи панҷ узви аввалаи он ба 5,5 баробар аст. Узви панҷуми ин прогрессияро ёбед.

**359.** Махраҷи прогрессияи геометрии $(b_n)$–ро ёбед, агар $b_1 + b_4 = 14$ ва $b_2 + b_5 = 42$ бошад.

**360.** Узви якуми прогрессияи геометрии $(b_n)$–ро ёбед, агар:

а) $b_6 = -\frac{4}{27}$, $q = -\frac{1}{3}$; б) $b_6 = \frac{243}{64}$, $q = 1{,}5$ бошад.

**361.** Узви якуми прогрессияи геометрӣ 150, чорумаш 1,2 мебошад. Узви панҷуми прогрессияро ёбед.

**362.** Ҳисоб кунед:

$$32 - \frac{96}{5} + \frac{288}{25} - \frac{864}{125} + \ldots$$

**363.** Узви сеюми прогрессияи геометрии беохир камшавандаро ёбед, агар суммаи он ба 1,6 ва узви дуюмаш ба –0,5 баробар бошад.

**364.** Суммаи узвҳои прогрессияи геометрии беохир камшавандаро ёбед, агар узви сеюм 2 ва узви шашум $\frac{1}{4}$ бошад.

**365.** Касри даврии беохирро дар шакли касри одӣ нависед:

а) 0,2(31); б) 0,11(3); в) 8,4(1); г) 2,(02).

# §9. ТАБДИЛДИҲИИ АЙНИЯТИИ ИФОДАҲО

## 29. Ифодаҳои алгебравӣ

**366.** Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $a^4 - 1$; б) $4xy + 12y - 4x - 12$;

в) $a^3 + a^2b + a^2 + ab$; г) $x^2 - y^2 - x - y$.

**367.** Амалҳоро иҷро кунед:

а) $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$; б) $\frac{4}{a-2} + \frac{8}{2a-a^2}$;

в) $\frac{m^2}{m^2-25} \cdot (m^2 + 5m)$; г) $\frac{1}{a^2+ab} : \frac{1}{a^2-ab}$.

**368.** Ифодаро сода кунед:

а) $\frac{x+y}{2xy-y^2}\cdot\left(x+y-\frac{x^2}{x+y}\right)$; б) $\frac{2x^2-2y^2}{x}\cdot\frac{4x}{x-y}-\frac{16xy}{x+y}$;

в) $\left(\frac{a}{b^2}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{ab}{b^2-a^2}-\frac{2}{a+b}$;

г) $\frac{x-3}{x^2-3x+9}-\frac{x}{9+3x}:\left(\frac{9}{x^3-9x}+\frac{1}{x+3}\right)$.

**369.** Ифодаро сода кунед:

а) $\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}$;

б) $\frac{x}{y}\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}\left(\frac{y^3}{x^3}-\frac{y^4}{x^4}\right)\right)\right)$;

в) $\left(\frac{x}{y^2+xy}+\frac{x-y}{x^2-xy}\right):\left(\frac{y^2}{x^3-xy^2}+\frac{1}{x-y}\right)$;

г) $\frac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}-\frac{a^4-16}{a^2+4}$.

## 30. Ифодаҳое, ки дорои радикалҳо ва дараҷаҳои нишондиҳандаашон касрианд

**370.** Махраҷро аз ирратсионалӣ озод кунед:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{2}{\sqrt{17}}$; г) $\frac{4}{7-\sqrt{3}}$.

**371.** Сурати касрро аз ирратсионалӣ озод кунед:

а) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{14}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$.

**372.** Ҳисоб кунед:

а) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+810000^{0,25}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}+(0,63)^{0}$;

б) $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$;

г) $2\sqrt{5}-2\sqrt{45}+2\sqrt{20}$.

**373.** Ифодаро сода кунед:

а) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{25}b^{\frac{2}{3}}-4}{\sqrt[3]{5}\,b^{\frac{1}{3}}+2}-\sqrt[3]{5}\,b^{\frac{1}{3}}$;

в) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$;

г) $\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$.

**374.** Ифодаро сода карда, қиматашро барои қиматҳои додашудаи параметрҳо ёбед:

а) $\dfrac{\sqrt{(b+2)^2-8b}}{\sqrt{b}-\dfrac{2}{\sqrt{b}}}$ ҳангоми $b=0{,}0025$;

б) $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}+x}{x+\sqrt{x}+1}$ ҳангоми $x=4$;

в) $\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}+4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}:\left(\sqrt{abc}+2\right)$ ҳангоми $a=0{,}04$;

г) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\left(a^2-ab\right)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$ ҳангоми $a=1{,}2$ ва $b=0{,}6$

будан.

## 31. Ифодаҳои тригонометрӣ

Ифодаҳоро сода кунед (375-376):

**375.** а) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{4\sin 25^0\sin 65^0}{\cos 40^0}$;

в) $\sqrt{2}\left(\sin^4\dfrac{\pi}{8}-\cos^4\dfrac{\pi}{8}\right)$; г) $\cos 2\gamma+2\sin(\gamma+30^0)\sin(\gamma-30^0)$.

**376.** а) $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha$; б) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}-\dfrac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$;

в) $\dfrac{\sin 3\alpha\cos^3\alpha+\cos 3\alpha\sin^3\alpha}{\sin 4\alpha}$;

г) $\dfrac{1+\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}-ctg^2\alpha-ctg^2\beta$.

**377.** Ёбед:

а) $tg\alpha$ -ро, агар $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ бошад;

б) $ctg\alpha$ -ро, агар $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ бошад;

в) $\sin\alpha$ -ро, агар $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}4$ бошад;

г) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ -ро, агар $tg\alpha = \frac{2}{3}$ бошад.

**378.** Ҳисоб кунед:

а) $\cos 15^0 - \sin 15^0$;   б) $\frac{\sin 120^0}{1+\cos 120^0} \cdot \frac{\cos 60^0}{1+\cos 60^0}$;

в) $2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right)$;

г) $\frac{\sin 20^0 \sin 50^0 \sin 70^0}{\sin 80^0}$.

**379.** Ҳисоб кунед:

а) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;   б) $\frac{10\sin 40^0 \sin 50^0}{\cos 10^0}$;

в) $\frac{\pi}{12}\left[arc\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arc\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg\left(-\sqrt{3}\right)\right]$;

г) $\cos^2\left(\frac{7}{8}\pi + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{8}\pi + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)$.

**380.** Ҳисоб кунед:

а) $tg\beta$ -ро, агар $tg\alpha = 1$ ва $tg(\alpha - \beta) = -2$;

б) $tg\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$-ро, агар $tgx=2$;

в) $\sin(2\alpha+3\pi)$-ро, агар $tg\alpha=\frac{2}{3}$;

г) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$-ро, агар $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ бошад.

## 32. Ифодаҳое, ки дараҷаҳо ва логарифмҳоро дар бар мегиранд

Ададҳоро муқоиса кунед (381-382):

**381.** а) $2^{400}$ ва $3^{200}$; б) $-\ell og_4\frac{1}{4}$ ва $8^{\ell og_7 1}$;

в) $5^{200}$ ва $2^{500}$; г) $\ell og_5\sqrt{2}$ ва $\ell og_3\frac{1}{27}$.

**382.** а) $\ell og_3 4+\ell og_3 6$ ва $\ell og_3(4+6)$;

б) $\ell og_8 9-\ell og_8 7$ ва $\ell og_8(9-7)$;

в) $4\ell og_6 2$ ва $\ell og_6(4-2)$;

г) $\ell og_2 1{,}5+\ell og_2 3$ ва $\ell og_2 1{,}5^2$.

**383.** Ифодаро сода кунед:

а) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ell og_9 4}+25^{\ell og_{125}8}$; б) $2^{4\ell og_4 a}-5^{\frac{1}{2}\ell og_{\sqrt{5}}a}$.

**384.** Қимати ифодаро ёбед:

а) $\frac{\ell g2+\ell g16}{2\ell g2+\ell g4}$; б) $\ell og_3\ell og_4\sqrt[9]{4}$;

в) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\ell og_2 7}}$; г) $\frac{2}{5}\left(\ell og_3 81+16^{\ell og_2 3}\right)^{\ell og_{85}25}$.

**385.** Аз баробарӣ $x$ -ро ёбед:

а) $\ell og_3 x = \ell og_{\frac{1}{3}} 5$; б) $\ell g x = \ell g 6 + \ell g 2$;

в) $\ell og_4 x = \ell og_2 3 + \ell og_2 \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; г) $\ell og_3 x = \dfrac{1}{2} \ell og_3 16 + 3 \ell og_3 0{,}5$.

**386.** Ҳисоб кунед:

а) $\ell og_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}} + \dfrac{1}{4} \ell og_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} b\sqrt{a}$ -ро, агар $\ell og_a b = 14$;

б) $\ell og_{\sqrt[4]{ab}} \dfrac{b}{\sqrt{a}} + \ell og_{\sqrt[4]{ab}} \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$ -ро, агар $\ell og_a b = 3$ бошад.

**387.** Қимати ифодаро ёбед:

а) $\left( 2^{2 + \frac{1}{\ell og_3 2}} + 25^{\frac{1}{2 \ell og_3 5}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $2^{\frac{1}{2 \ell og_5 2}} \cdot 5^{\ell og_5^2 2} - \sqrt{5} \cdot 2^{\ell og_5 2} - \left( \dfrac{1}{3} \right)^{\ell og_3 25}$.

## §10. ФУНКСИЯҲО

### 33. Функсияҳои ратсионалӣ

**388.** Фосилаҳои бефосилагии функсияро ёбед:

а) $y = \dfrac{x-2}{x^2 - x}$; б) $y = x^2 - \dfrac{1}{x+1}$;

в) $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}$; г) $y = \dfrac{1}{4x^2 - 2x - 2}$.

**389.** Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед:

а) $y = x^3 - 2x$;  б) $y = \frac{4x^2}{1-x^2}$;  в) $y = 4x^4 - 2x^2 + 7$;

г) $y = -\frac{4}{x^3}$;  д) $y = \frac{2}{x^2} + 3$;  е) $y = x^5 - 2x^3$.

**390.** Фосилаҳои доималоматии функсияро ёбед:

а) $y = \frac{x-2}{3x}$; б) $y = \frac{x^2-9}{4-x^2}$; в) $y = 1 - \frac{x-3}{5x+2}$ г) $y = -x^2 + 3x - 2$.

**391.** Фосилаҳои афзуншавӣ (камшавӣ) ва нуқтаҳои экстремалии функсияро (агар чунин нуқтаҳо вуҷуд дошта бошанд) ёбед:

а) $y = 2x^2 + 3x + 1$;  б) $y = 1 - \frac{1}{x}$;  в) $y = (x-1)^4 - 1$;  г) $y = \frac{x-1}{x+1}$.

**392.** Функсияро тадқиқ карда, графикашро созед:

а) $y = 2x - 5$;  б) $y = 2x^2 - 7x + 3$;

в) $y = -x^2 + 4x - 3$;  г) $y = -3 + (x+1)^2$.

**393.** Магар графики функсияҳои:

а) $y = x^2$ ва $y = x + 12$;  б) $y = -\frac{2}{x^2}$ ва $y = x^2 - 2$

нуқтаҳои умумӣ доранд?

## 34. Функсияҳои тригонометрӣ

**394.** Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = \frac{4}{\sin^2 x}$;  б) $y = \frac{1}{1 + \cos 2x}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos x - \dfrac{3}{2}}$;  г) $y = \dfrac{x^2}{\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}}$.

**395.** Соҳаи қиматҳои функсияро ёбед:

а) $y = 2 - \cos^2\dfrac{x}{2}$;  б) $y = 2\sin x\, ctgx$;

в) $y = |\cos x| - 1$;  г) $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$.

**396.** Фосилаҳои доималоматии функсияро ёбед:

а) $y = 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;  б) $y = 1 - tg2x$;

в) $y = 1 - \sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}$;  г) $y = 2 + \cos 2x$.

**397.** Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед:

а) $y = \dfrac{x}{\sin x} - \cos x$;  б) $y = \dfrac{\cos x \sin^2 x}{x}$;

в) $y = tg4x - ctg\,2x$;  г) $y = \dfrac{\cos 2x}{x^2}$.

**398.** Даври функсияро ёбед:

а) $y = \sin 4x$; б) $y = 2\,ctgx$; в) $y = 1 - \cos 6x$; г) $y = 3\,tg\dfrac{x}{2}$.

**399.** Экстремали функсияро ёбед:

а) $y = 2 + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;  б) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

в) $y = 0{,}25\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$;  г) $y = \cos^2(5x - \pi)$.

**400.** Экстремуми функсияро муайян кунед:

а) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$;  б) $y = 2 - 6\cos 2x$;

в) $y = 1 + |\cos 2x|$ ; г) $y = 1 + 2|tgx|$ .

## 35. Функсияҳои дарачагӣ, нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ

**401.** Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = 8x - x^2$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $y = \sqrt[8]{4 - x^2}$ ;

г) $y = \sqrt{x \cdot 4^x - 4^{x+1}}$ ; д) $y = \sqrt[10]{2^{\cos x} - 1}$;

е) $y = \ell og_3(1 + 4x - x^2)$; ж) $y = \ell og_3 \cos x$;

з) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\ell g(x+10)^2}$ ; и) $y = \sqrt[4]{\ell g(4x^2 - x)}$.

**402.** Соҳаи қиматҳои функсияро ёбед:

а) $y = 3\sqrt{x+1}$; б) $y = 4^{3-x} - 1$; в) $y = 1 - \sqrt[4]{x}$; г) $y = 1 + |\ell og_3 x|$ .

**403.** Фосилаҳои доималоматии функсияро ёбед:

а) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 2$; б) $y = 4 - 5^x$;

в) $y = \ell og_3(x+2)$ ; г) $y = \ell og_2(x-3) - 2$ .

**404.** Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед:

а) $y = 2^x + 2^{-x}$ ; б) $y = \ell og_4(1 - x^2)$;

в) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ ; г) $y = x^{\frac{3}{5}}$.

**405.** Экстремуми функсияро ёбед:

а) $y = \sqrt{25 - x^2}$ ; б) $y = 5^{\frac{1}{x^2+1}}$; в) $y = \ell og_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$; г) $y = 2^{\sin x}$ .

# §11. МУОДИЛАҲО ВА НОБАРОБАРИҲО. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО ВА НОБАРОБАРИҲО

## 36. Муодилаҳо ва нобаробариҳои ратсионалӣ

Муодиларо ҳал кунед (406-407):

**406.** а) $2(x-1)-7=4-(6x+2)$; б) $2-8(x+2)=3\cdot(x-1)-7$;

в) $\dfrac{2x+1}{5}=7-\dfrac{5(x+4)}{2}$; г) $2-\dfrac{x-4}{3}=x-\dfrac{4(5+2x)}{9}$.

**407.** а) $|2x-3|=5$; б) $|2-7x|=8$;

в) $\left|1-\dfrac{x+3}{2}\right|=2$; г) $\left|\dfrac{4x-1}{5}-2\right|=1$.

**408.** Барои кадом қимати $a$ муодилаи:

а) $ax-2x=4(x-2)$ ҳалли ягона дорад;

б) $a(1-x)+3=3x+ax$ ҳал надорад;

в) $1+2(x+3a)=(a-1)x+19$ ҳалли бешумор дорад?

Нобаробариро ҳал кунед (409-410):

**409.** а) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{9}{10}x>\dfrac{1}{10}-x$; б) $x-\dfrac{x+4}{4}+\dfrac{3x-1}{2}<3$;

в) $\dfrac{12x-1}{3}<4x-3$; г) $\dfrac{3x-2}{4}<2(x-1)-\dfrac{x}{8}$.

**410.** а) $|2x-3|<1$; б) $|4x+3|\geq 2$;

в) $(x-1)|5-3x|<2$; г) $(x-2)|2x+1|\leq 0$.

**411.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $x^2-2x-8=0$; б) $3x^2+2x=0$;

в) $\frac{4x^2-1}{3}=x(10x-9)$; г) $\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{5}$.

**412.** Барои кадом кимати $k$ муодилаи:

а) $(k-1)x^2+(k+4)x+(k+7)=0$ дуто ҳалли гуногун дорад;

б) $9x^2-2x+k=6-kx$ дуто ҳалли якхела дорад;

в) $3kx^2-6x+k-2=0$ ҳал надорад?

**413.** Муодилаи $2x^2-8x-11=0$ -ро ҳал накарда: а) суммаи решаҳо; б) ҳосили зарби решаҳо; в) суммаи чаппаи решаҳо; г) суммаи квадратҳои решаҳоро ёбед.

Муодиларо ҳал кунед (414-415):

**414.** а) $\frac{x^2-16}{x+3}=0$; б) $\frac{x}{2x+3}=\frac{1}{x}$;

в) $\frac{x+1}{6}+\frac{20}{x-1}=4$; г) $\frac{4}{x-1}-x=2$.

**415.** а) $\frac{x-6}{x-12}-\frac{x-12}{x-6}=\frac{5}{6}$; б) $\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$;

в) $\frac{14x^2}{16-x^2}+\frac{11}{x-4}=\frac{49}{x+4}$; г) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$.

**416.** Нобаробариро ҳал кунед:

а) $2x^2+13x-7<0$; б) $-2x^2-5x+18\ge 0$;

в) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\ge 0$; г) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)}<0$.

## 37. Муодила ва нобаробариҳои ирратсионалӣ

Муодиларо ҳал кунед (417-419):

**417.** а) $\sqrt{x+2}=x$; б) $(x-5)(x+2)\sqrt{x-7}=0$;

в) $2\sqrt{x+5}=x+2$; г) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0$.

**418.** а) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$; б) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$;

в) $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$; г) $\sqrt{1-x\sqrt{x^2-1}}=x-1$.

**419.** а) $\sqrt{\dfrac{10+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{10-x}{x}}=\sqrt{6}$; б) $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$;

в) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$; г) $\sqrt[3]{5+\sqrt{x+15}}=1$.

Нобаробариро ҳал кунед (420-421):

**420.** а) $\sqrt{x-5}<1$; б) $\sqrt{-x}\cdot(x+1)>0$;

в) $\sqrt{9x-20}<x$; г) $\sqrt{x+61}<x+5$.

**421.** а) $\sqrt{5-x}>\sqrt{x+1}$; б) $\sqrt{x^2+x+2}<2$;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x^2+x-1}\geq 0$; г) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\leq 0$.

## 38. Муодила ва нобаробариҳои тригонометрӣ

Муодиларо ҳал кунед (422-424):

**422.** а) $2\sin x-\sqrt{3}=0$; б) $tg2x-1=0$;

в) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$;  г) $3ctg\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$.

**423.** а) $\cos^2 x-\sin^2 x=1$;  б) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$;

в) $2\cos 2x+5\sin x-3=0$;  г) $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$.

**424.** а) $2\sin^2 3x+5\sin 3x=0$;  б) $\sin(15^0+x)+\sin(45^0-x)=0$;

в) $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$;  г) $1-\cos x-2\cos\frac{x}{2}=0$.

**425.** Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\sin x>\frac{1}{2}$; б) $2\cos 2x\le\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}tg2x\le 1$; г) $tgx+ctgx\ge 0$.

### 39. Муодила ва нобаробариҳои нишондиҳандагӣ

Муодиларо ҳал кунед (426-429):

**426.** а) $\left(\frac{5}{2}\right)^x=\left(\frac{4}{25}\right)^2$;  б) $\sqrt[4]{125^{3-2x}}=\frac{5}{\sqrt[4]{5}}$;

в) $2^{5x+1}=4^{2x}$;  г) $2^{x-2}=1$.

**427.** а) $\left(\frac{11}{2}\right)^{8x^2+5x}=\left(\frac{2}{11}\right)^{-2x^2-8x}$;  б) $\left(\frac{33}{16}\right)^{\frac{11}{\sqrt{x+1}}+5}=\left(\frac{16}{33}\right)^{\frac{7}{\sqrt{x+1}}-8}$;

в) $7\cdot 5^x-5^{x+1}=2\cdot 5^{-3}$;  г) $2\cdot 4^{x+1}-2^{x+1}-1=0$.

**428.** а) $6^{x-2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-2}{2}}=66$;

б) $3^{2x+3}+\sqrt{9^{2x+1}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x}=91$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x+3}+49^{x-1}+7^{2x-1}=399$;

г) $4^{2-x}-4^{-(x-1)}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}-\frac{1}{\sqrt{16^{x-1}}}=516$.

**429.** а) $2\cdot 5^{\frac{2}{\sqrt{x}}}-3\cdot 10^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-5\cdot 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}}=0$;

б) $9\cdot 256^{\sqrt{x}}-6\cdot 144^{\sqrt{x}}-8\cdot 81^{\sqrt{x}}=0$;

в) $9\cdot 16^{x}-7\cdot 12^{x}-16\cdot 9^{x}=0$;  г) $11-3^{x}=\sqrt{3^{x}-5}$.

**430.** Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\frac{\sqrt{32}}{16}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$;  б) $3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x}>\frac{1}{9}$;

в) $4^{x}-10\cdot 2^{x}+16<0$;  г) $4{,}2^{x^2+2x-15}>1$.

## 40. Муодила ва нобаробариҳои логарифмӣ

Муодиларо ҳал кунед (431-433):

**431.** а) $\ell og_5(x+1)=\ell og_5(4x-5)$;

б) $\ell og_{\frac{1}{3}}(2x-1)=\ell og_3\frac{1}{x+3}$;

в) $2\ell og_{0,5}x=\ell og_{0,5}(2x^2-x)$;

г) $\ell og_2(4-x)+\ell og_2(1-2x)=2\ell og_2 3$.

**432.** а) $\ell og_6(2x^2-x)=1-\ell og_6 2$; б) $2\ell og_3{}^2 x-7\ell og_3 x+3=0$;

в) $\ell og_{\frac{3}{5}}\dfrac{2x+3}{x-2}=1$; г) $\ell og_{3-x}5-\dfrac{1}{2}=0$.

**433.** а) $\ell og_{0,1}[x(x-7)]-\ell og_{0,1}\dfrac{9(x-7)}{x}=0$; б) $\ell og_4 x+\ell og_2 x=3$;

в) $\ell og_3 x+\ell og_x\dfrac{1}{9}=1$; г) $\ell og_{\frac{3}{5}}x+4\ell og_{\frac{5}{3}}x=3$.

**434.** Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\ell og_{\frac{1}{2}}(6-x)>-2$; б) $\ell g(3x-2)\geq 1$;

в) $\ell og_2(3-2x)-\ell og_2 13<0$; г) $\ell g(x^2+x+4)<1$.

## 41. Системаи муодилаҳо ва нобаробариҳои ратсионалӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (435-436):

**435.** а) $\begin{cases}3x+5y=21,\\ 2x-y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{3}y=1,\\ 3x-5y=-5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}4x-3y=-4,\\ 4y-10x=3;\end{cases}$ г) $\begin{cases}5x-8y=0,\\ x-1{,}5y=2.\end{cases}$

**436.** а) $\begin{cases}x^2-y^2=14,\\ 3x+y=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=20,\\ xy=8;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2+y=6,\\ x+y^2=6;\end{cases}$ г) $\begin{cases}y^2-xy=12,\\ x^2-xy=-3.\end{cases}$

**437.** Барои кадом қимати $a$ системаи муодилаҳои:

а) $\begin{cases} ax+y=1, \\ x-5y=7 \end{cases}$ ҳалли ягона дорад;

б) $\begin{cases} x+ay=1, \\ ax+y=2a \end{cases}$ ҳал надорад;

в) $\begin{cases} 3x+ay=3, \\ ax+3y=3 \end{cases}$ ҳалҳои бешумор дорад.

**438.** Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x-4>5-2x, \\ 3-2x<7+x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-\dfrac{3x-1}{2}>\dfrac{2}{3}, \\ 10x-2>1+4x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 17(3x-1)-50x+1<2(x+4), \\ 12-11x<11x+10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{x-2}\le 0, \\ x(x-5)<0. \end{cases}$

## 42. Системаи муодилаҳои ирратсионалӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (439-440):

**439.** а) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2, \\ 4\sqrt{x}+2\sqrt{y}=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ xy=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=6, \\ x-y=12. \end{cases}$

**440.** а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}, \\ x+y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ x+y=35; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ xy=27; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2, \\ x-2y+1=0. \end{cases}$

## 43. Системаи муодилаҳои тригонометрӣ

**441.** Ҳалли системаи муодилаҳоро дар фосилаи додашуда ёбед:

а) $\begin{cases} 2\sin x=\sqrt{2}\sin y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\sin y \;\; \textit{дар} \;\; (0;2\pi); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin(x+y)=1, \\ \cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\; \textit{дар} \;\; (0;\pi); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x+\cos y=1, \\ \sin^2 x-\cos^2 y=1 \;\; \textit{дар} \;\; (0;2\pi); \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{9}, \\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2} \;\; \textit{дар} \;\; (0;\pi); \end{cases}$

## 44. Системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (442-445):

**442.** а) $\begin{cases} 2^x+2^y=12, \\ x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\cdot 3^{x-1}-3\cdot 2^y=-1, \\ 3^{x+1}+5\cdot 2^{y-1}=14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\cdot 4^x + 3\cdot 5^y = 11, \\ 5\cdot 4^x + 4\cdot 5^y = 24; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^x - 2^y = -1, \\ 2^{3x} - 2^{3y} = -7. \end{cases}$

**443.** а) $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y = 12, \\ 2^y\cdot 3^x = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \ell og_4 x - \ell og_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \ell og_{\frac{1}{9}}(x+y) = -2, \\ \ell og_5(x-y) = 2. \end{cases}$

**444.** а) $\begin{cases} \ell og_2 x - \ell og_2 y = 1, \\ \ell og_2 xy = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \ell og_2(x+14) + \ell og_2(x+y) = 6, \\ \ell og_4(x+y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{\ell g x - \ell g 4}{\ell g y - \ell g 3} = -1, \\ \ell og_2(x-y) = 5 - \ell og_2(x+y); \end{cases}$ г) $\begin{cases} \ell g x - \ell g y = 7, \\ \ell g x + \ell g y = 5. \end{cases}$

**445.** а) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y = 144, \\ \ell og_{\sqrt{2}}(y-x) = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \ell og_3(2x+y^2) = 1, \\ 2^{x+y^2} - 4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \ell og_5(\ell og_3 x - \ell og_3 y) = 0, \\ 4^{x-y} = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \ell og_9 x - \ell og_3 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

## 45. Масъалаҳои матнӣ

**446.** Аз ду деҳа дар як вақт ба пешвози ҳамдигар автобус ва мошини боркаш ба ҳаракат сар карданд. Баъди ним соат онҳо вохӯрданд. Масофаи байни деҳаҳоро ёбед, агар маълум бошад, ки суръати автобус ба 60 км/соат ва суръати мошини боркаш ба 48 км/соат баробар аст.

**447.** Ҳавз ҳангоми кушодани 4 ҷумак дар 45 дақиқа бо об пур мешавад. Агар 6-то ҳамин хел ҷумакро якбора кушоем, ҳавз дар чанд дақиқа бо об пур мешавад?

**448.** Аз 48 кг тухмӣ $\frac{3}{4}$ ҳиссаашро барои кишт истифода бурданд. Чӣ қадар тухмӣ боқӣ мондааст?

**449.** Трактор 24 га заминро, ки 15%-и масоҳати майдонро ташкил медод, шудгор кард. Масоҳати майдонро ёбед.

**450.** Падар аз писар 24 сол калон аст. Баъд аз 5 сол ӯ назар ба писараш 5 баробар калон мешавад. Ҳозир падар чандсола аст?

**451.** Се бинои баландошёна 540 тиреза доранд. Бинои дуюм назар ба бинои якум 2 баробар бештар ва назар ба бинои сеюм 40 тиреза камтар дорад. Шумораи тирезаҳои ҳар як биноро ёбед.

**452.** Агар ба болои суммаи солҳои се писар адади 5-ро илова кунед, синни падар ҳосил мешавад. Синни писари калонӣ баъд аз 6 сол, синни писари мобайнӣ баъд аз 9 сол ва синни писари хурдӣ баъд аз 10 сол ба нисфи синни падарашон баробар хоҳад шуд. Ҳозир падар ва ҳар як писар чандсола мебошанд?

**453.** Дар 9 соат заврақи мотордор ба самти ҷараёни дарё ва дар 11 соат ба муқобили ҷараёни дарё масофаи якхеларо тай мекунад. Суръати заврақро дар оби ором ёбед, агар маълум бошад, ки суръати дарё 2 км/соат аст.

**454.** Дар тахтаи синф ададе навишта шудааст. Яке аз хонандагон ба он 23-ро зам карда, дигарӣ аз он 1-ро тарҳ кард. Натиҷаи замкунӣ аз натиҷаи тарҳкунӣ 7 маротиба зиёд шуд. Дар тахта кадом адад навишта шуда буд?

**455.** Як тарбуз аз дигарӣ 2 кг ва аз сеюмӣ 5 маротиба сабук аст. Тарбузҳои якум ва сеюм якҷоя аз дуюм 3 маротиба вазнин мебошанд. Вазни ҳар як тарбуз чанд килограмм аст?

**456.** Барои 600 г конфет ва 1,5 кг кулчаҳои қандин 4,62 сомонӣ доданд. Як килограмм кулчаи қандин нисбат ба конфет

1,4 сомонӣ арзон аст. Нархи 1 кг конфет ва 1 кг кулчаи қандин чанд сомонӣ аст?

**457.** Сайёҳон 640 км масофаро 4 соат бо мошин ва 7 соат бо қатора тай карданд. Суръати қатора ва мошинро ёбед, агар маълум бошад, ки суръати қатора аз суръати мошин 5 км/соат зиёд аст.

**458.** Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 12 баробар аст. Миқдори даҳиҳои ин адад аз худи адад 12 маротиба хурд аст. Ададро ёбед.

**459.** Ду нафар барои иҷрои кор 117 сомонӣ музд гирифтанд. Шахси якум 15 рӯз ва дуюм 14 рӯз кор карда буд. Дар як рӯз ҳар кадоми онҳо чанд сомонӣ музд мегирифтанд, агар маълум бошад, ки шахси якум дар 4 рӯз нисбат ба шахси дуюм дар 3 рӯз 11 сомонӣ зиёд музд гирифтааст?.

**460.** Аз банди А ба банди В пиёдагард равон шуд. Баъди 1 соату 24 дақиқа ба ҳамон самт аз банди А велосипедрон равон шуд ва пас аз як соати ҳаракаташ масофаи ӯ ва пиёдагард 1 км –ро ташкил медод. Баъди боз як соат ҳаракат кардан ҳар ду велосипедронро зарур буд, ки барои ба банди В расидан масофаи нисбат ба пиёдагард 2 маротиба камтарро тай кунад. Суръати пиёдагард ва велосипедронро ёбед, агар маълум бошад, ки масофаи байни банди А ва В 27 км аст.

**461.** Масоҳати секунҷаи росткунҷа 180 см$^2$ аст. Катетҳои ин секунҷаро ёбед, агар яке аз онҳо аз дигараш 31 см зиёд бошад.

**462.** Ду адади натуралии пайдарпайро ёбед, ки суммаи квадратҳои онҳо ба 61 баробар бошад.

**463.** Дар толори синамо 320 ҷой буд. Баъди он ки миқдори ҷойҳои ҳар як қаторро 4-то зиёд ва боз як қатори дигар илова карданд, миқдори ҷойҳо 420-то шуд. Дар толор дар аввал чанд қатор ва дар ҳар як қатор чанд ҷой буд?

**464.** Қатора барои бартараф кардани ақибмонии 1- соата суръаташро дар тули 720 км назар ба суръати аввалааш 10 км/соат зиёд кард. Суръати аввалаи қатораро ёбед.

**465*.** Баъди 4 соати сар додани ҷумаки якум ҷумаки дуюмро кушоданд. Онҳо якҷоя дар 8 соат ҳавзро аз об пур карданд. Ҳар кадом ҷумак дар алоҳидагӣ ҳавзро дар чанд соат аз об пур мекунад, агар маълум бошад, ки барои ин ба ҷумаки якум 8 соат вақти зиёд лозим аст?

**466*.** Аз маркази ноҳияи Айнӣ ба сӯйи шаҳри Душанбе автобус бо суръати 40 км/соат равон шуд ва баъди 15 дақиқа бо мошини сабукрави аз шаҳри Душанбе меомада воҳӯрд. Мошини сабукрав ба маркази ноҳияи Айнӣ расида, баъди 16,5 дақиқа боз ба сӯйи Душанбе равон шуд. Вай дар масофаи 20 км аз Душанбе бо автобус ҳамшафат шуд ва аз он гузашта рафт. Агар суръати мошини сабукрав 50 км/соат бошад, масофаи байни маркази ноҳияи Айнӣ ва шаҳри Душанбе чӣ қадар аст?

## §12. ҲОСИЛА, ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ, ИНТЕГРАЛ ВА ТАТБИҚИ ОНҲО

### 46. Ҳосила

**467.** Аз таърифи ҳосила истифода карда, ҳосилаи функсияи $f(x)$-ро дар нуқтаи $x_0$ ёбед:

а) $f(x)=2-3x$, $x_0=4$; б) $f(x)=2x^2$, $x_0=3$;

в) $f(x)=2x-4$, $x_0=1$; г) $f(x)=x^3+2$, $x_0=-1$.

Ҳосилаи функсияро ёбед (468-471):

**468.** а) $f(x)=\frac{2}{5}x^5+2x^3-x+1$; б) $f(x)=(1-x)cosx$;

в) $f(x)=(x^2+3)(x^2-4x)$; г) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-2}$.

**469.** а) $f(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$; б) $f(x)=(\sqrt{x}-1)tgx$;

в) $f(x)=\dfrac{x-x^3}{1-2x}$; г) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-2\cos x}$.

**470.** а) $f(x)=x^2\cdot 5^x$; б) $f(x)=3^x+\ell nx$;

в) $f(x)=e^{-2x}+\ell og_2 3x$; г) $f(x)=\dfrac{\ell nx}{e^x+2}$.

**471.** а) $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$; б) $f(x)=\sqrt[6]{2+x^2}-\dfrac{1}{(2x-1)^2}$;

в) $f(x)=(2-3x^2)^7$; г) $f(x)=\ell g4x-e^{2x}$.

**472.** Қимати ҳосилаи функсияи $f(x)$-ро дар нуқтаи $x_0$ ҳисоб кунед:

а) $f(x)=(1+2x^2)^3$, $x_0=4$; б) $f(x)=2e^{-x}+\ell n(x+1)$, $x_0=0$;

в) $f(x)=2tgx-\cos x$, $x_0=0$; г) $f(x)=2x\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

**473.** Маълум, ки ҳосилаи функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;b)$: а) мусбат; б) манфӣ аст. Нисбат ба рафтори ин функсия дар ин фосила чӣ гуфтан мумкин аст? Агар: в) ғайриманфӣ; г) ғайримусбат бошад-чӣ?

## 47. Татбиқи ҳосила

**474.** Муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x_0$ нависед:

а) $f(x)=x^2$, $x_0=2$; б) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\dfrac{\pi}{4}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2+7}}$, $x_0=5$; г) $f(x)=\cos 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

**475.** Қимати тақрибии функсияи $f(x)$-ро дар нуқтаи $x_0$ ҳисоб кунед:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x$, $x_0=2{,}0043$;

б) $f(x)=1+x^2-\dfrac{1}{3}x^3$, $x_0=1{,}98$.

**476.** Қимати тақрибии ифодаро ҳисоб кунед:

а) $\sqrt{15{,}84}$; б) $\cos 61^0$; в) $0{,}998^{20}$; г) $\sqrt[3]{8{,}008}$.

**477.** Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ, нуқтаҳои экстремалии функсияро ёбед:

а) $y=x^3+2x+1$; б) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$;

в) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$; г) $f(x)=x^2e^{x+1}$.

Функсияро тадқиқ карда графикашро созед (478-481):

**478.** а) $f(x)=x(3-x^2)$; б) $f(x)=x^3-3x^2+2$;

в) $f(x)=x^2(x-3)$; г) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^3$.

**479.** а) $f(x)=4x^2-2x$; б) $f(x)=x^3-3x^2$;

в) $f(x)=2x^3-x^2-x$; г) $f(x)=-x^4+8x^2$.

**480*.** а) $f(x)=1-2\sin 2x$; б) $f(x)=\cos 2x-1$;

в) $f(x)=\sin^2 x-\sin x$; г) $f(x)=1-\sin\dfrac{x}{2}$.

**481*.** а) $f(x)=x-\ell nx$; б) $f(x)=x\ell nx$;

в) $f(x)=2^{x^2-x}$; г) $f(x)=xe^{-x}$.

Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x)$-ро дар фосилаи додашуда ёбед (482-484):

**482.** а) $f(x)=\frac{8}{3}x^3-18x^2+28x$, $[0;\ 1{,}5]$;

б) $f(x)=x^2\sqrt{3-x}$, $[1;\ 3]$;

в) $f(x)=\frac{2}{x}+x^2$, $[0{,}5;\ 1]$;

г) $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4$, $[1;\ 3]$.

**483.** а) $f(x)=-x^3-6x^2+9$, $[-2;\ 2]$;

б) $f(x)=x^3+3x^2-12x$, $[-1;\ 3]$.

**484.** а) $f(x)=2\sin x+\sin 2x$, $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

б) $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $f(x)=3\sin x+4\cos x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $f(x)=x+\cos^2 x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

**485.** Адади 10-ро ба намуди ду ҷамъшаванда тавре ифода кунед, ки суммаи дучандаи квадрати ҷамъшавандаи якум ва сечандаи квадрати ҷамъшавандаи дуюм хурдтарин бошад.

**486.** Адади 18-ро ба намуди суммаи се ҷамъшавандаи мусбат тавре ифода кунед, ки ҷамъшавандаи якум ба ҷамъшавандаи сеюм баробар бошад ва суммаи квадратҳои ҳамаи се ҷамъшаванда хурдтарин бошад.

**487.** Суммаи дарозиҳои катети секунҷаи росткунҷа ба 30 см баробар аст. Барои он ки масоҳати ин секунҷа калонтарин шавад, ҳар як катеташ бояд ба чанд баробар бошад?

**488.** Аз росткунҷаҳое, ки периметрашон ба $p$ баробар аст, ҳамонашро ёбед, ки дорои масоҳати калонтарин аст.

**489.** Дар параболаи $y = x^2$ нуқтаеро ёбед, ки масофааш то нуқтаи А(2; 0) хурдтарин аст.

**490.** Нуқта аз рӯйи қонуни $s(t) = 2t^2 + 12t + 1$ ростхатта ҳаракат мекунад (масофа бо метрҳо, вақт бо сонияҳо чен мешавад). Суръат ва шитоби ҳаракатро ёбед. Дар кадом лаҳза суръати ҳаракат 36 м/сония мешавад?

**491.** Ҷисм аз баландии 20 м бо суръати аввалаи 50 м/сония ба боло амудӣ партофта шудааст: а) баъди 4 сония вай аз сатҳи замин дар кадом баландӣ воқеъ мешавад? б) баъд аз чанд сония ҷисм ба нуқтаи баландтарин мерасад ва дар кадом масофа аз замин ҷойгир мешавад ( $g = 10$ м/сония$^2$ қабул кунед).

**492.** Дар кадом нуқтаи параболаи $y = -\frac{x^2}{2} - 1$ расанда ба тири абсиссаҳо дар таҳти кунҷи $45^0$ моил аст?

**493.** Ҷисм амудӣ бо суръати аввалаи $\vartheta_0 = 100$ м/сония ба боло партофта шудааст. Қонуни ҳаракати он $S = \vartheta_0 t - 4{,}9t^2$ аст. Суръатро дар охири сонияи 5-ум ёбед.

**494.** Нуқта ростхатта аз рӯйи қонуни $S = 3t^3 - t^2 + t$ ҳаракат мекунад (вақти $t$ бо соат, масофаи $S$ бо метр ҳисоб карда мешавад). Суръат ва шитобро дар охири соати 2-юм ёбед?

## 48. Функсияи ибтидоӣ

**495.** Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$ -ро ёбед:

а) $f(x)=2\sin x+\cos 6x$; б) $f(x)=x^3+x^{-7}+x^{1+\sqrt{2}}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+3$; г) $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2 2x}+\dfrac{3}{\sin^2 x}$.

**496.** Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи $M$ мегузарад:

а) $f(x)=\dfrac{3}{x}$, $M\left(\dfrac{1}{e};4\right)$; б) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}+\sin x$, $M(0;2)$;

в) $f(x)=x^{-4}$, $M\left(2;\dfrac{1}{3}\right)$; г) $f(x)=\cos 2x$, $M(0;1)$.

**497.** Функсияеро ёбед, ки ҳосилааш дар нуқтаи дилхоҳи $x$ ба $4x-1$ баробар буда, қиматаш дар нуқтаи 2 ба 3 баробар аст.

**498.** Маълум, ки $f'(x)=4-x^3$ ва $f(1)=2$ аст. Функсияи $f(x)$ -ро ёбед.

**499.** Нуқтаи моддӣ бо суръати $\vartheta(t)=2t+1$ ростхатта ҳаракат мекунад. Муодилаи ҳаракатро ёбед, агар маълум бошад, ки ҳангоми $t=3$ будан координатаи ин нуқта ба 5 баробар аст.

## 49. Интеграл

Ҳисоб кунед (500-501):

**500.** а) $\int\limits_{-2}^{1}(x^2-2x+3)dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(2x+\frac{\pi}{4})dx$;

в) $\int_0^1 (4e^{4x}+2)dx$;  г) $\int_0^1 (3^x \ell n3+1)dx$.

**501.** а) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx$;  б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 4x+\frac{2}{\pi}\right)dx$;

в) $\int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-x\right)dx$;  г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin^2\frac{x}{2}-1\right)dx$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудро ҳисоб кунед (502-503):

**502*.** а) $y=4x-x^2$, $y=5$, $x=0$, $x=3$;

б) $y=\frac{4}{x}$,  $y=-x^2+4x+1$, $(x>0)$;

в) $y=-x^2-4x+4$, $y=10$, $x=-3$, $x=0$;

г) $y=-x+2$,  $y=\sqrt{x}$, $y=0$.

**503*.** а) $y=x^2$, $y=5x^2-1$;

б) $y=x^2-4x+5$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

в) $y=(x-3)^2$, $y=9-2x$;

г) $y=2\sqrt{x}$, $y=0$ $x=4$, $x=9$.

**504*.** Масоҳати фигураи бо хатҳои $y=x^2-2x+2$, расандаи он дар нуқтаи абсиссааш баробари 3, хатҳои $x=0$ ва $y=0$ маҳдудро ёбед.

**505*.** Масоҳати фигураи бо параболаи $y=-x^2+4x-3$ ва расандаҳои он дар нуқтаҳои $M_1(0;-3)$ ва $M(3;0)$ маҳдудро ёбед.

**506*.** Барои кадом қимати $a>0$ масоҳати фигурае, ки бо хатҳои

$$y=-\frac{x}{2}+\frac{2a}{x^2}+1,\quad y=0,\quad x=a,\quad x=2a$$

маҳдуд аст, калонтарин мешавад?

**507*.** Барои кадом қимати $a>0$ масоҳати фигураи бо хатҳои

$$y=\frac{x}{6}+\frac{1}{x^2},\quad y=0,\quad x=a,\quad x=2a$$

маҳдуд хурдтарин мешавад?

## ҶАВОБҲО

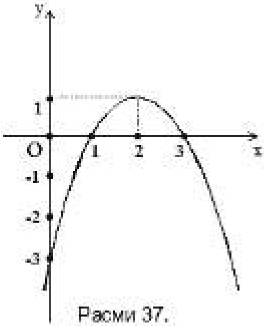
**328.** Масалан: а) 64215; б) 64224. **329.** 23. **330.** 24. **332.** а) 599,3; б) 0,235; в) 0,2805; г) 8,79. **333.** а) 21,6; б) 24; в) $1\frac{182}{203}$; г) $19\frac{1}{3}$. **334.** а) 60; б) 18. **335.** а) 1260; б) 96. **336.** в) 40,3; г) 2,3. **337.** а) $1\frac{4}{9}$; б) $\frac{37}{99}$; в) $1\frac{7}{90}$; г) $1\frac{26}{99}$; д) $1\frac{26}{99}$. **338.** а) *Нишондод:* баръаксашро фарз карда, барои зиддият ҳосил кардан аз тасдиқи зерин истифода кунед: *агар квадрати адад ба 3 тақсим шавад, он гоҳ худи адад низ ба 3 тақсим мешавад*. **339.** г) –1,(4), $\ell g100$, $e$, $\sqrt{10}$. Ададҳои $e$ ва $\sqrt{10}$ ирратсионалианд. **340.** а) Якумаш калон; б) дуюмаш калон. **341.** а) 2; б) 4; в) $\frac{11}{5}$; г) –4; д) 4; е) 10. **342.** а) 2,16; б) 22,4; в) 11,52; г) 126. **343.** а) 175; б) $44\frac{4}{9}$; в) $309\frac{1}{11}$; г) $255\frac{5}{9}$. **344.** а) 80; б) $214\frac{2}{7}$; в) $43\frac{61}{73}$; г) $15\frac{5}{23}$. **345.**

Дуюмаш. **346.** а) $8\frac{41}{50}$; б) $1\frac{8}{19}$; в) 1,036; г) $\frac{19}{210}$. **347.** а) 793, 8; б) $\frac{73}{360}$. **348.** $13\frac{7}{9}$ км ва $17\frac{2}{9}$ км. **349.** $\frac{8}{9}$ ва $\frac{2}{3}$. **350.** 44. **351.** 10,2. **352.** 640,5. **353.** 4905. **354.** 3; 10,5; 18; 25,5; 33. **355.** –1. **356.** –2, 5, 12, 19, 26,… **357.** Барои $x=2$. **358.** 8. **359.** 3. **360.** а) 36; б) $\frac{1}{2}$. **361.** 0,24. **362.** 20. **363.** 0,125. **364.** 16. **365.** а) $\frac{229}{990}$; б) $\frac{17}{150}$; в) $8\frac{37}{90}$; г) $2\frac{2}{99}$. **366.** а) $(a-1)(a+1)(a^2+1)$; б) $4(x+3)(y-1)$; в) $a(a+1)(a+b)$; г) $(x+y)(x-y-1)$. **367.** а) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; б) $\frac{4}{a}$; в) $\frac{m^3}{m-5}$; г) $\frac{a-b}{a+b}$. **368.** а) $\frac{2x+y}{2x-y}$; б) $\frac{8(x^2+y^2)}{x+y}$; в) $-\frac{1}{b}$; г) $\frac{(x-3)(3-x^2)}{3(x^2-3x+9)}$. **369.** а) 1; б) $\frac{x-y}{x}$; в) $\frac{x-y}{y}$; г) 8. **370.** а) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})$; в) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$; г) $\frac{2}{23}(7+\sqrt{3})$. **371.** а) $\frac{1}{4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$; б) $\frac{2}{3(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$; в) $\frac{7}{\sqrt{14}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{7}+2}$. **372.** а) 37,5; б) –6; в) 3; г) 0. **373.** а) 1; б) –2; в) 0; г) $\frac{(x+y)^2}{4xy}$. **374.** а) 0,05; б) $-\frac{1}{3}$; в) 5; г) 2,52. **375.** а) 1; б) 2; в) -1; г) $\frac{1}{2}$. **376.** а) 1; б) 0; в) 0,75; г) 0. **377.** а) 0,75; б) $\frac{3}{2}$; в) –0,96; г) $-\frac{1}{5}$. **378.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) 0,25; г) 0,25. **379.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) 5; в) $\frac{1}{34}$; г) 1. **380.** а) –3; б) –7; в) $-\frac{12}{13}$; г) 0,28. **381.** а), г) якумаш калон; б) ҳар ду баробар; в) дуюмаш калон.

**382.** а), в), г) якумаш калон; б) дуюмаш калон. **383.** а) $4\frac{3}{4}$; б) $a(a-1)$. **384.** а) 1,25; б) –2; в) 2; г) 10. **385.** а) 0,2; б) 12; в) 2; г) 0,5. **386.** а) 0,125; б) 2. **387.** а) 4; б) –0,04. **388.** а) Ҳамаи қиматҳо ғайр аз 0 ва 1; г) ҳамаи қиматҳо ғайр аз –0,5 ва 1. **389.** а), г), е) тоқ; б), в), д) ҷуфт. **390.** а) Дар $(2;\ \infty)$ *ва* $(-\infty;\ 0)$ мусбат аст; б) дар $(-3;\ -2)$ *ва* $(2;\ 3)$ мусбат аст; в) дар $(-\infty;\ -1{,}25)$ ва $(-0{,}4;\ \infty)$ мусбат аст; г) дар $(1;\ 2)$ мусбат аст. **391.** а) дар $(-\infty;\ -0{,}75)$ кам шуда, - 0,75 нуқтаи экстремалӣ мебошад; б) Бо истиснои нуқтаи 0 дар тамоми тири ададӣ афзуншаванда аст. Нуқтаи экстремалӣ надорад: в) дар $(-\infty;\ 1)$ кам шуда, нуқтаи $x=1$ экстремалӣ аст. **392.** в) *Ҳал.* Схемаи умумии тадқиқи функсияи дилхоҳро истифода карда, графикро месозем: 1. Соҳаи муайянии функсияи мазкур маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ, яъне фосилаи $(-\infty;\ \infty)$ аст; 2. Функсия на ҷуфт, на тоқ ва на даврӣ аст; 3. Ҳосилаи тартиби якуми функсияро ёфта, онро ба нул баробар карда, решаҳои муодилаи ҳосилшударо меёбем, яъне $y'=-2x+4$, $y'=0$ ё ин ки $-2x+4=0$, аз ин ҷо $x=2$ нуқтаи критикӣ аст; 4. Нобаробариҳои $y'>0$ ва $y'<0$-ро ҳал мекунем. Маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $-2x+4<0$ фосилаи $(2;\ \infty)$ аст. Бинобар ин, дар ин фосила функсия камшаванда аст. Маҷмуи ҳалҳои $-2x+4>0$ фосилаи $(-\infty;\ 2)$-ро ташкил медиҳад. Дар ин фосила функсия афзуншаванда аст; 5. Барои ёфтани нуқтаҳои экстремалӣ ҷадвал тартиб медиҳем:

| $x$ | $(-\infty;\ 2)$ | 2 | $(2;\ \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | – |
| $y$ | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ |
| | | max | |

Функсия дар нуқтаи $x=2$ дорои максимум будааст. Қимати максимум 1 аст; 6. Азбаски ададҳои 1 ва 3 решаҳои муодилаи $-x^2+4x-3=0$ мебошанд, пас графики функсия тири абсиссаро дар нуқтаҳои (1; 0) ва (3; 0) мебурад; 7. Зоҳиран фаҳмост, ки $y(0)=-3$ аст, пас график тири ординатаро дар



Расми 37.

нуқтаи (0; -3) мебурад; 8. Ҳангоми беохир афзудан ё кам шудани аргумент функсия беохир кам мешавад, ё тавре мегӯянд ба $-\infty$ майл мекунад; 9. Фосилаҳои доималоматии функсия чунинанд: дар (1; 3) мусбат буда, дар $(-\infty;\ 1)$ *ва* $(3;\ \infty)$ манфӣ аст. Натиҷаҳои тадқиқро ба ҳисоб гирифта, графики функсияро месозем (расми 37). **393.** а) Ҳа, нуқтаҳои абсиссаашон $x=-3$ ва $x=4$; б) не. **394.** а) $x\neq n\pi$, $n\in Z$; б) $x\neq\frac{2n+1}{2}\pi, n\in Z$; в) $x\neq\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $n\in Z$; г) $x\neq 2n\pi, n\in Z$. **395.** а) $[1;\ 2]$; б) $[-2;\ 2]$; в) $[-1;\ 0]$; г) $[0;\ \sqrt{2}]$. **396.** а) дар $\left(-\frac{3\pi}{4}+2n\pi;\ \frac{\pi}{4}+2n\pi\right)$, $n\in Z$ мусбат аст. **397.** а) Ҷуфт; б) тоқ; в) тоқ; г) ҷуфт. **398.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\pi$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $2\pi$. **399.** а) $-\frac{\pi}{6}+n\pi, n\in Z$; б) $\frac{n\pi}{2}, n\in Z$; в) $\frac{\pi}{6}-\frac{(2n+1)\pi}{4}$, $n\in Z$; г) $\frac{\pi(n+2)}{10}$, $n\in Z$. **400.** а) $y_{\max}=y_{\min}=1$; б) $y_{\min}=-4$, $y_{\max}=8$; в) $y_{\min}=1$, $y_{\max}=2$; г) $y_{\min}=1$, $y_{\max}$ вуҷуд надорад. **401.** а) $(-\infty;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ \infty)$; в) $[-2;2]$; г) $[4;\infty)$; д) $\left[-\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ \frac{\pi}{2}+2n\pi\right]$, $n\in Z$; е) $\left[2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{5}\right]$; ж)

$\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$; з) $(-\infty;\ -11)\cup(-11;-10)\cup(-10;-9)\cup(-9;2]\cup[3;+\infty)$; и) $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8};+\infty\right)$. **402.** а) $[0;\infty)$; б) $(-1;\ \infty)$; в) $(-\infty;1]$; г) $[1;\infty)$. **403.** а) Дар $(-\infty;\ -1)$ мусбат аст; б) дар $(-\infty;\ \ell og_5 4)$ мусбат аст; в) дар $(-1;\ \infty)$ мусбат аст; г) дар $(7;\ \infty)$ мусбат аст. **404.** а) Ҷуфт; б) ҷуфт; в) тоқ; г) тоқ. **405.** а) $y_{\max}=y(0)=5$; б) $y_{\max}=y(0)=5$; в) $y_{\max}=y(0)=0$; г) $y_{\min}=y\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)=0{,}5$, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$=2, $n,k\in Z$. **406.** а) $1\frac{3}{8}$; б) $-\frac{4}{11}$; в) $-1\frac{3}{29}$; г) 12,5. **407.** а) –1 ва 4; б) $-\frac{6}{7}$ ва $1\frac{3}{7}$; в) –5 ва 3; г) 1,5 ва 4. **408.** а) Барои $a\neq 6$; б) барои $a=-1{,}5$; в) барои $a=3$. **409.** а) $(-3;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ 2)$; в) $\varnothing$; г) $\left(1\frac{1}{3};\ \infty\right)$. **410.** а) (1; 2); б) $\left(-\infty;\ -\frac{5}{4}\right]\cup\left[-\frac{1}{4};\ \infty\right)$; **411.** а) –2 ва 4; б) $-\frac{2}{3}$ ва 0; в) $\frac{1}{26}$ ва 1; г) 1 ва 4. **412.** а) Барои $k\in\left(-7\frac{1}{3};\ 2\right)$ ва $k\neq 1$; б) барои $k=20\pm 6\sqrt{5}$; в) барои $k\notin(-1;\ 3)$. **413.** а) 4; б) –5,5; в) $-\frac{8}{11}$; г) 27. **414.** а) –4 ва 4; б) –1 ва 3; в) 11 ва 13; г) –3 ва 2. **415.** а) 8,4 ва 24; б) –3; в) $-5\frac{5}{7}$ ва 3; г) –3 ва 7. **416.** а) (-7; 0,5); б) $[-4{,}5\ ;2]$; в) $[1;\ 2]\cup(3;\ \infty)$; г) $(-\infty;\ 2)\cup(3;\ 5)$. **417.** а) 2; б) 7; в) 4; г) 6. **418.** а) 1; б) $-\frac{27}{8}$ ва 1; в) 30 ва –61; г) $\frac{5}{4}$. **419.** а) 6; б) 25; в) 3; г) $\varnothing$.

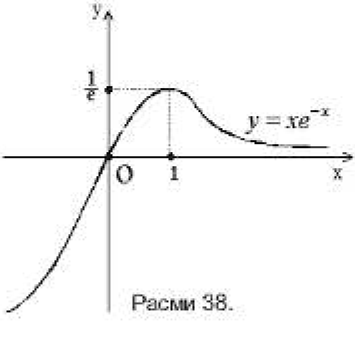
**420.** а) $[5;\ 6)$; б) (-1; 0); в) $\left[2\frac{2}{9};\ 4\right]\cup(5;\ \infty)$; г) $(3;\ \infty)$. **421.** а) $[-1;\ 2)$; б (-2;1); в) $(-\infty;\ -1)\cup(0,5;\ +\infty)$; г) $(-\infty;-1\ ]\cup\ \{x=2\}$.

**422.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi$, $n\in Z$; б) $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$, $n\in Z$; в) $2n\pi-\frac{\pi}{6}$, $n\in Z$; г) $-\frac{1}{18}\pi+\frac{n\pi}{3}$, $n\in Z$. **423.** а) $n\pi$, $n\in Z$; б) $\frac{5\pi}{6}+n\pi$, $n\in Z$; в) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+n\pi$ ва $(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k,n\in Z$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in Z$. **424.** а) $\frac{n\pi}{3}$, $n\in Z$; б) $105^0+n\pi, n\in Z$; в) $\frac{n\pi}{5}$ ва $\frac{k\pi}{7}$, $k,n\in Z$; г) $\pm 2\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+4n\pi$, $n\in Z$. **425.** а) $\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2n\pi\right)$, $n\in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{12}+2n\pi;\ \frac{11\pi}{12}+2n\pi\right)$, $n\in Z$; в) $\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}\right]$, $n\in Z$; г) $\left(n\pi;\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, $n\in Z$. **426.** а) –4; б) 1; в) –1; г) 2. **427.** а) 0 ва $\frac{1}{2}$; б) 35; в) –3; г) –1. **428.** а) 4; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) –3. **429.** а) 1; б) 0,25; в) 2; г) 2. **430.** а) $(-\infty;-1,5]$; б) $(-1\frac{1}{3};\ \infty)$; в) (1; 3); г) $(-\infty;\ -5)\cup(3;\ \infty)$. **431.** а) 2; б) 4; в) 1; г) $-\frac{1}{2}$. **432.** а) –1 ва 1,5; б) $\sqrt{3}$ ва 27; в) –3; г) –22. **433.** а) –3; б) 4; в) $\frac{1}{3}$ ва 9; г) $\frac{5}{3}$. **434.** а) (2; 6); б) $[\ 4;\infty)$; в) $\left(-5;\ \frac{3}{2}\right)$; г) (-3; 2). **435.** а) (2; 3); б) $\left(26\frac{2}{3};\ 17\right)$; в) (0,5; 2); г) (32; 20). **436.** а) $\varnothing$; б) (4; 2); (2; 4) ва

(-2; -4); в) (2; 2); г) (1; 4) ва (-1; -4). **437.** а) Барои $a \neq -0{,}2$; б) барои $a = \pm 1$; в) $a = 3$. **438.** а) $(3;\ \infty)$; б) $(0{,}5;\ \infty)$; в) $\left(\frac{1}{11};\ \infty\right)$; г) $(0;\ 2)$. **439.** а) (16; 4); б) (4; 1) ва (1; 4); в) (9; 1) ва (1; 9); г) (16; 4). **440.** а) (4; 1) ва (1; 4); б) (27; 8) ва (8; 27); в) (27; 1) ва (1; 27); г) (1; 1). **441.** а) $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\left(\frac{2\pi}{9};\ \frac{\pi}{9}\right)$. **442.** а) (3; 2); б) (1; 1); в) (1; 0) ва (0; 1); г) (0; 1). **443.** а) (2; 1); б) (3; 2); в) (4; 2); г) (53; 28). **444.** а) (4; 2); б) (50; -49); в) (6; 2); г) ($10^6$; $10^{-1}$). **445.** а) (2; 4); б) (1; 1) ва (1; -1); в) (3; 1); г) (1; 1) ва (4;2). **446.** 54 км. **447.** Дар 30 дақиқа. **448.** 12 кг. **449.** 160 га. **450.** 25 сола. **451.** 100, 200, 240. **452.** 40, 14, 11 ва 10 сола. **453.** 20 км/соат. **454.** 5. **455.** 2; 4 ва 10 кг. **456.** 3,2 ва 1,8 сомонӣ. **457.** 60 км/соат ва 55 км/соат. **458.** 48. **459.** 5 ва 3 сомонӣ. **460.** 5 км/соат ва 11 км/соат. **461.** 9 ва 40 см. **462.** 5 ва 6. **463.** 20 қатор ва дар ҳар як қатор 16 ҷой. **464.** 80 км/соат. **465.** 24 соат ва 16 соат. **466.** 165 км. **467.** а) –3; б) 12; в) 2; г) 3. **468.** а) $2x^4+6x^2-1$; б) $-\cos x-(1-x)\sin x$; в) $2(2x^3-6x^2+3x-6)$; г) $\frac{(x-2)\cos x-\sin x}{(x-2)^2}$. **469.** а) $2x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\frac{tgx}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\cos^2 x}$; в) $\frac{4x^3-3x^2+1}{(1-2x)^2}$. **470.** а) $x\cdot 5^x(2+x\ell n5)$; б) $3^x\ell n3+\frac{1}{x}$; в) $-2e^{-2x}+\frac{1}{x\ell n2}$; г) $\frac{2+e^x(1-x\ell nx)}{x(e^x+2)^2}$. **471.** а) $2\cos 2x-3\sin 3x$; б) $\frac{x}{3\sqrt[6]{(2+x^2)^5}}+\frac{4}{(2x-1)^3}$; в) $-42x(2-3x^2)^6$; г) $\frac{1}{x\ell n10}-2e^{2x}$. **472.** а) 52272; б) –1; в) 2; г) 2. **473.** а) Функсия афзуншаванда аст; б) функсия камшаванда аст; в) функсия камшаванда нест; г) функсия афзуншаванда нест. **474.** а) $y-4x+4=0$; б) $y-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=0$; в) $32y+x-21=0$; г) $2y+2\sqrt{3}x-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-1=0$. **475.** а) 0,0043; б) 2,647. **476.** а) 3,982; б) 0,485; в) 0,96; г) 2,00067. **477.** г) Дар $(-\infty;\,-2)\cup(0;\,\infty)$ афзуншаванда аст, нуқтаҳои 0 ва –2 экстремалианд. **481.** г) Ҳ а л. Схемаи умумии тадқиқро татбиқ менамоем: 1) Соҳаи муайянии функсия фосилаи $(-\infty;\,\infty)$ аст; 2) Функсия на ҷуфт, на тоқ ва на даврӣ мебошад; 3) Ҳосиларо ёфта, онро ба нул баробар карда, решаҳои муодилаи ҳосилшударо меёбем: $y'=(xe^{-x})'=e^{-x}+xe^{-x}\cdot(-1)=(1-x)e^{-x}$, $y'=0$, $(1-x)e^{-x}=0$, $x=1$ -нуқтаи критикӣ; 4) Нобаробариҳои $y'>0$ ва $y'<0$-ро ҳал мекунем. Аз $y'>0$ ё $(1-x)e^{-x}>0$ бармеояд, ки $1-x>0$ ё $x<1$. Мувофиқан аз $y'<0$, $x>1$ бармеояд. Инак, дар фосилаи $(-\infty;\,1)$ функсия афзуншаванда буда, дар фосилаи $(1;\,\infty)$ камшаванда мебошад. Барои ёфтани нуқтаҳои экстремалӣ ҷадвал тартиб медиҳем:

| $x$ | $(-\infty;\,1)$ | 1 | $(1;\,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ |
| | | max | |

Аз ҷадвал фаҳмида мешавад, ки функсия дар нуқтаи $x=1$ дорои максимум аст. Қимати максимум ба $e^{-1}$ баробар аст; 6) График тири абсиссаро дар нуқтаи $x=0$ мебурад; 7) График тири ординатаро намебурад; 8) Ҳангоми беохир кам шудани аргумент



Расми 38.

функсия беохир кам шуда, ҳангоми беохир афзудани аргумент ба нул наздик мешавад; 9) Дар $(-\infty;\ 0)$ манфӣ буда, дар $(0;\ \infty)$ мусбат аст. Бо назардошти натиҷаҳои тадқиқ графикро месозем (расми 38). **483.** а) *Ҳал.* 1. Нуқтаҳои критикиро, ки ба порчаи $[-2;\ 2]$ тааллуқ доранд, меёбем: $f'(x)=-3x^2-12x=-3x(x+4)$, $f'(x)=0$, $-3x(x+4)=0$. Қиматҳои $x=0$ ва $x=-4$ решаҳои ин муодилаанд. Аз онҳо танҳо $x=0$ ба $[-2;\ 2]$ тааллуқ дорад; 2. Қиматҳои функсияро дар ин нуқта ва дар охирҳои порча ҳисоб карда, ҳосил мекунем: $f(-2)=8-6\cdot 4+9=-7$, $f(0)=9$, $f(2)=-8-6\cdot 4+9=-23$; 3. Калонтарини ин қиматҳо 9 буда, хурдтаринаш –23 аст. *Ҷавоб:* $f_{\max}=f(0)=9$, $f_{\min}=f(2)=-23$. **485.** 6 ва 4. **486.** 6,6 ва 6. **487.** 15 см ва 15 см. **488.** Квадрати тарафаш $\frac{p}{4}$. **489.** M(1; 1). **490.** $\vartheta(t)=s'(t)=4t+12$, $a(t)=4$, ҳангоми $t=6\,c$ $\vartheta=36$ метр/сония аст. **491.** а) 140 м; б) 5 сония, 145 м. **492.** Дар нуқтаи M(-1; -1,5). **493.** 51 метр/сония. **494.** 32 метр/соат, 34 метр/соат$^2$. **495.** а) $-2\cos x+\frac{1}{6}\sin 6x+C$; б) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^{-6}+\frac{x^{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}+C$; в) $\ell n|x-1|+3x+C$; г) $tg2x-3ctgx+C$. **496.** а) $3\ell n|x|+7$; б) $-\frac{1}{2(x+1)^2}-\cos x+3\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{3x^3}+\frac{3}{8}$; г) $\frac{\sin 2x}{2}+1$. **497.** $2x^2-x-3$. **498.** $4x-\frac{x^4}{4}-\frac{7}{4}$. **499.**

$t^2+t-7$. **500.** а) 15; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $e^4+1$; г) 3. **501.** а) 1,5; б) 0,5; в) 05; г) –1. **502.** а) 6; б) $4(3-\ell n4)$; в) 9; г) $\frac{7}{6}$. **503.** а) $\frac{2}{3}$; б) $4\frac{2}{3}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) $25\frac{1}{3}$. **504.** $2\frac{7}{8}$. **505.** 2,25. **506.** Барои $a=\frac{2}{3}$, $S_{\max}=\frac{4}{3}$. **507.** Барои $a=1$, $S_{\min}=\frac{3}{4}$.

## МАСЪАЛАҲОИ ҲАЛЛАШОН НИСБАТАН МУРАККАБ

Дар поён якчанд масъалаҳо оварда мешаванд, ки раванди ҳаллашон нисбатан мураккаб аст ё тавре мегӯянд, ғайристандартӣ мебошанд. Ҳалли ин масъалаҳо ба маводди назариявии синфҳои 6 - 11 такя мекунад. Як қисми онҳо худсоз буда, қисми дигарашон аз озмунҳо ва олимпиадаҳои ноҳиявӣ, минтақавӣ ва ҷумҳуриявӣ гирифта шудаанд. Мақсади пешниҳоди ин мавод дар кори тайёрӣ ба чунин озмуну олимпиадаҳо кумак кардан аст.

**508.** Ададҳои $x_1$ $x_2$ решаҳои муодилаи $x^2-2x-1=0$ мебошанд. Муодилаи квадратие тартиб диҳед, ки решаҳояш $x_1+2x_2$ ва $2x_1+x_2$ бошанд.

**509.** Исбот кунед, ки агар решаҳои муодилаи $x^2+px+q=0$ ҳақиқӣ бошанд, он гоҳ решаҳои муодилаи $x^2+(a+\frac{1}{a})px+q(a-\frac{1}{a})^2=0$ низ ҳақиқианд.

**510.** Бигузор $S_n=\alpha^n+\beta^n$ бошад, ки дар ин ҷо $\alpha$ ва $\beta$ решаҳои муодилаи $ax^2+bx+c=0$ ҳастанд. Вобастагии байни $S_n$, $S_{n-1}$ ва $S_{n+2}$ -ро ёбед.

**511.** Барои кадом қиматҳои $a$, нобаробарии $2x+a>0$ хулосаи нобаробарии $x+1>3a$ аст?

**512.** Ҳамаи он қиматҳои $x$-ро ёбед, ки барои ҳар гуна қимати параметри $a$-и ба фосилаи (1;2) тааллуқдошта, нобаробарии $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ -ро қаноат мекунонанд.

**513**. Барои ҳар кадом қимати $a$, миқдори ҳалҳои муодилаи $\sqrt{2|x|-x^2}=a$ –ро муайян кунед.

**514.** Муодиларо ҳал кунед: $\sqrt{x+\sqrt{x+a}}=a$.

**515.** Муайян кунед, ки барои кадом қиматҳои $a$, муодилаи $a\left(2^{x}+2^{-x}\right)=5$ решаи ягона дорад ва ин решаро ёбед.

**516.** Ифодаро сода кунед:

$$а)\ \sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{9}{2}};\qquad б)\ \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$

**517.** Исбот кунед, ки қимати ифодаи $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^{2}}}+\sqrt[3]{26}$ аз радикал вобаста нест.

**518.** Ҳисоб кунед: $\cos84^{0}\cdot\cos24^{0}\cdot\cos48^{0}\cdot\cos12^{0}$.

**519.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $\left(x^{2}+3x-4\right)^{3}+\left(2x^{2}-5x+3\right)^{3}=\left(3x^{2}-2x-1\right)^{3}$;

б) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^{x}+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{x}=10$;

в) $4^{x+\sqrt{x^{2}-2}}-5\cdot2^{x-1+\sqrt{x^{2}-2}}=6$;

г) $1+7+13+\ldots+x=280$.

**520.** Ҳалли ҳақиқии муодиларо ёбед:

а) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$; б) $(x+2)^{4}+x^{4}=82$.

**521.** Муодилаи зеринро ҳал кунед:

$$\log_{2}\left(\cos^{2}xy+\frac{1}{\cos^{2}xy}\right)=\frac{1}{y^{2}-2y+1}.$$

**522.** Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$;

б) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$;

в) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

**523.** Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $x(y^2-z^2)+y(x^2-z^2)+z(x^2-y^2)$;

б) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$;

в) $x^8+x^7+1$;

г) $x^8+3x^4+4$.

**524**.Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\sqrt[4]{\frac{4-x}{x-5}}\geq\sqrt{\frac{x-4}{x}}$;      б) $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2+x-2)\leq 0$;

в) $\sqrt{x^2-x-12}<x$;      г) $\log_{0,4}\log_6\left(\frac{x^2-4x}{x-4}\right)<0$;

д) $(8{,}4)^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}}<1$;      е) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}}>\frac{1}{\sqrt{27}}$.

**525.** Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y=\frac{1}{\lg\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)}$;  б) $y=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{4-x^2}$.

**526.** Нобаробариро исбот кунед:

а) $\frac{a^3+b^6}{2}\geq 3ab^2-4,\ a\geq 0$;  б) $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\geq ab-ac+2bc$;

в) $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$;      г) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

**527.** Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$а)\ \begin{cases}\sqrt{(x+3)^2}=x+3,\\ \sqrt{(x-3)^2}=3-x;\end{cases}\qquad б)\ \begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=a+\dfrac{1}{a},\\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=c+\dfrac{1}{c},\end{cases}$$

$$в)\ \begin{cases}xy=1,\\ x+y+\cos^2 z=2;\end{cases}\qquad г)\ \begin{cases}x^2+y^2=a,\\ x+xy+y=b.\end{cases}$$

**528.** Системаи муодилаҳо ҳал карда шавад:

$$а)\ \begin{cases}a(yz-zx-xy)=xyz,\\ b(zx-xy-yz)=xyz,\\ c(xy-yz-zx)=xyz;\end{cases}\qquad б)\ \begin{cases}(x+y)(x+y+z)=72,\\ (y+z)((x+y+z))=120,\\ (z+x)((x+y+z))=96.\end{cases}$$

**529.** Қимати хурдтарини функсияро ёбед:

$$а)\ y=x(x+1)(x+2)(x+3);\qquad б)\ y=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

**530.** Суммаи се узви прогрессияи геометрӣ 114 аст. Агар ин се ададро ҳамчун узвҳои прогрессияи арифметикӣ ҳисоб кунем, он гоҳ онҳо мувофиқан узвҳои якум, чорум ва биступанҷум мешаванд. Ин ададҳоро ёбед.

**531.** Ададҳои $a^2, b^2, c^2$ прогрессияи арифметикианд. Исбот кунед, ки ададҳои $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}$ низ прогрессияи арифметикӣ мебошанд.

**532.** Ададҳои $x$, $y$, $z$ бо тартиби навишташуда прогрессияи геометрӣ ва ададҳои $x+y$, $y+z$, $z+x$ прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Махраҷи прогрессияи геометриро ёбед.

**533.** Суммаи прогрессияи беохир камшаванда ба 4 ва суммаи кубҳои узвҳои ҳамин прогрессия ба 192 баробар аст. Узви якум ва махраҷи ин прогрессияро ёбед.

**534.** Маълум, ки суммаҳои $m$ ва $n$ узвҳои прогрессияи арифметикӣ бо ҳам баробаранд. Исбот кунед, ки $S_{m+n}=0$ аст.

**535.** Муодилаи расандаи умумии параболаҳои $y=x^2+4x+8$ ва $y=x^2+8x+4$ –ро тартиб диҳед.

**536.** Ҳамаи қиматҳои $a$-ро, ки барояшон функсияи $y=\frac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+5$ дар $R$ афзуншаванда аст, ёбед.

**537.** Баробарии $(x-2)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{100}x^{100}$ дода шудааст. Қимати суммаи $a_1+2a_2+\ldots+100a_{100}$-ро ҳисоб кунед.

**538.** Адади дурақамаеро ёбед, ки он ба суммаи рақами якум ва квадрати рақами дуюмаш баробар бошад.

**539.** Ду адади серақамаеро ёбед, ки суммаи онҳо ба 498 каратӣ буда, ҳосили тақсимашон ба 5 баробар бошад.

**540.** Суммаро ҳисоб кунед:

$$а)\ S_n=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{n}{3^{n-1}};$$

$$б)\ S_n=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2;$$

$$в)\ S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n};$$

$$г)\ S_n=1\cdot 2+2\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^n.$$

**541.** Ҳосили зарбро ёбед: $P_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdot\ldots\cdot\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$.

**542.** Айниятро исбот кунед:

$$а)\ 3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1;$$

*б)* $arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{8}+\ldots+arctg\frac{1}{2n^2}=arctg\frac{n}{n+1}$;

*в)* $tgx+\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}ctg\frac{x}{2^n}-2ctg2x$;

*г)* $1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

**543.** Қимати калонтарини функсияи $y=\sin x+\sqrt{2}\cos x$-ро ёбед.

**544.** Соҳаи қиматҳои функсияи $y=\cos^2 x-\cos x$-ро ёбед.

**545.** Ягон ҳалли муодилаи функсионалии $f(f(x))+f(x)=2x+1$ - ро ёбед.

**546.** Нишон диҳед, ки қимати ифодаи $7^n+3n-1$ барои ҳар гуна $n$-и натуралӣ ба адади 9 тақсим мешавад.

**547.** Кадомаш калон аст: $\sqrt{2^{\sqrt{3}}}$ ё $\sqrt{3^{\sqrt{2}}}$ ?

**548.** Агар $\cos\alpha=tg\beta$, $\cos\beta=tg\gamma$, $\cos\gamma=tg\alpha$ бошад, $\sin\alpha$ -ро ёбед.

**549.** Маълум, ки $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ аст. Исбот кунед, ки $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$ мебошад.

**550.** Мошин аз шаҳри А ба шаҳри Б бо суръати 50 км/соат ва аз Б ба А бо суръати 30 км/соат ҳаракат кард. Суръати миёнаи мошин ҳангоми рафтану бозгаштанаш чанд аст?

**551.** Соати 12-и рӯз ақрабакҳои соат ва дақиқа болои ҳамдигар мехобанд. Баъди ин боз кай аввалин маротиба онҳо чунин мавқеъро ишғол мекунанд?

**552.** Ду қатора дар як вақт аз ду банд ба муқобили ҳамдигар равон шуданд. Суръати қатораи якум 65 км/соат ва суръати қатораи дуюм 75 км/соат аст. Баъди чанд соат масофаи байни онҳо ба 70 км баробар мешавад, агар масофаи байни бандҳо 350 км бошад.

## ҶАВОБҲО

**508.** $x^2-6x+7=0$. **510.** $cS_n=-aS_{n+2}-bS_{n+1}$. **511.** Барои $a\geq\frac{2}{7}$.

**512.** (-1;2]. **513.** Агар $a$<0 ё $a$>1 бошад, муодила ҳал надорад; агар $a$=0 бошад, сето ҳал дорад; агар $a$=1 бошад, муодила дуто реша дорад. **514.** $x=a^2-a;\ a\geq 0$. **515.** $a=\frac{5}{2};\ x=0$. **516.** $а)\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}+2+\sqrt{2}\right);\ б)2.$ **518.** $\frac{1}{16}$. **519.** $а)\left\{-4;-\frac{1}{3};1;1{,}5\right\};$ $б)-2\ ва\ 2;\ в)2\frac{1}{4};\ г)55.$ **520.** а) -8 ва 4; б) -3 ва 1. **521.** *Нишондод:* тарафи рости муодила аз 1 калон набуда, тарафи чапаш аз 1 хурд нест. Онҳоро баробари 1 гирифта, системаи ҳосилшударо ҳал карда, ҷавобро ҳосил мекунем: $(2\pi k;1)\ ва\ ((2k+1)\pi;1),\ k\in Z$. **522.** $а)\left\{-1-\sqrt{8};-1+\sqrt{8};2;-4\right\};$ $б)-1;\ в)[5;10]$. **523.** $а)(x-z)(y+x)(y+z);$ б) $3(b+c)(a+b)(a+c);$ $в)(x^2+x+1)(x^6-x^5+x^3-x^2+1);$ $г)(x^4+x^2+2)(x^4-x^2+2)$. **524.** $а)[4;5);$ $б)\left[-\frac{3}{5};-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right);$ $в)[4;+\infty);$ $г)\ (6;+\infty);$ д)$(-\infty;3);\ е)(-\infty;-1)\cup(0;2)$. **525.** $а)\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right);\ б)\ [-2;2]$.

**527.** $а)[-3;3];$ $б)$ агар $\frac{x+y}{xy}=u;\ \frac{x-y}{xy}=v$ гузорем, он гоҳ $u$ ва $v$-ро ёфта, баъд $x$ ва $y$-ро бо осонӣ меёбем; $в)$ $\left(1;1;\frac{\pi}{2}+\pi k\right),k\in Z;$ $г)$ аз гузориши $x+y=u;\ xy=v$

истифода баред. **528.** $a)\left\{(0;0;z);\ (0;y;0);(x;0;0),\ x=-\dfrac{2bc}{b+c};\right.$ $\left.y=-\dfrac{2ac}{a+c};\ z=-\dfrac{2ab}{a+b}\right\}$; $б)\ \{(2;4;6);\ (-2;-4;-6)\}$. **529.** $а)\ y_{\min}=-1$ ҳангоми $x^2+3x+1=0$; $б)\ y_{\min}=-1$ ҳангоми $x=0$. **530.** 2;14;98. **532.** -2 ё 1. **533.** $q=-\dfrac{1}{2}, b_1=6$. **535.** $y=8x+4$. **536.** Барои $a\in(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$. **537.** -100. **538.** 89. **539.** 166 ва 830. **540.** $а)\ S_n=\dfrac{9}{4}\left(1-\dfrac{2n+3}{3^{n+1}}\right)$; $б)\ S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $в)\ S_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$; $г)\ S_n=2^{n+1}(n-1)+2$. **541.** $P_n=2-\dfrac{1}{2^{2^{n+1}-1}}$. **543.** $\sqrt{3}$. **544.** $\left[-\dfrac{1}{4};2\right]$. **545.** $f(x)=x+\dfrac{1}{3}$. **547.** Дуюмаш калон. **548.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **550.** 37,5 км/соат. **551.** Баъди $65\dfrac{5}{11}$ дақиқа. **552.** Ҳам баъди 2 соат ва ҳам баъди 3 соат.

## МУНДАРИҶА

*Алиев Боймурод*

# АЛГЕБРА

Китоби дарсӣ барои синфи 11-уми
муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

**Муҳаррир:** М. Ф. Абдукаримов

**Мусаҳҳеҳ:** С. Неккадамов

**Муҳаррири техникӣ:** Қ. Назаров

**Тарроҳ:** Ф. Нарзуллоева

Ба матбаа 05.06.2023 супорида шуд.
Ба чоп 11.08.2023 иҷозат дода шуд. Андозаи 60x90 1/16.
16 ҷузъи чопӣ. Адади нашр 15 000 нусха. Супориши № 01/23

Нарх 25 сомонӣ 71 дирам

Муассисаи нашриявии "Маориф"-и
Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон.
734024, ш. Душанбе, кӯчаи Аҳмади Дониш, 50.
Тел: 222-14-66, E-mail: Nashriya@maorif.tj

Дар матбааи ҶДММ "Торус", Ҷумҳурии Тоҷикистон,
шаҳри Душанбе, хиёбони Айнӣ 126 чоп шудааст.